

学部授業「物理学基礎論 B (電磁気学)」講義ノート
京都大学理学部物理学第二教室宇宙線研究室

鶴 剛

Ver 2014_0

2014/10~2015/1

<http://www-cr.scphys.kyoto-u.ac.jp/member/tsuru/lecture/>

最初に...

1. 式を覚えたり計算できることは立派なこと。しかし大切なのは意味 (心) を理解すること。
2. また定性的・半定量的な「直観的理解」というものを大切にしたい。
3. 式には色々な表現の仕方がある。その仕方の違いにびっくりしないこと。

目次

第 1 章	電荷にはたらく力	7
1.1	電荷とは	7
1.2	クーロンの法則と単位	7
1.2.1	単位	7
1.2.2	1g が電荷になったら	8
1.2.3	もう 1 つの単位 cgs	8
1.3	ベクトルによるクーロン力の表現方法	8
1.3.1	ベクトル	8
1.3.2	位置ベクトル、2 点間を結ぶベクトル、単位ベクトル	9
1.3.3	2 つ電荷に働く力のベクトルの表現	9
1.3.4	n 個の電荷から受ける力のベクトルと重ね合わせの原理	9
1.4	内積 (スカラー積)	10
1.4.1	定義	10
1.4.2	余弦定理	10
1.4.3	成分による計算	10
1.4.4	物理での内積の例	11
1.5	外積 (ベクトル積)	11
1.5.1	定義	11
1.5.2	成分による計算	12
1.5.3	物理での外積の例その 1: 力のモーメント	12
1.5.4	物理での外積の例その 2: 平行六面体の体積	12
第 2 章	静電場の性質	13
2.1	電場 (あるいは、電気工学の「電界」)	13
2.1.1	電場の定義	13
2.1.2	複数の電荷が作る電場	13
2.1.3	連続的に分布する電荷の作る電場	14
2.2	色々な静電場の具体例	14
2.2.1	例題: 一様に電荷が分布する無限に長い棒が作る電場	14
2.3	電気力線と電場	15
2.4	積分形のガウスの法則: 1 番目の基本法則 (積分形)	16
2.4.1	言葉での積分形のガウスの法則	16
2.4.2	式を用いた積分形のガウスの法則	17
2.4.3	電束密度を用いたガウスの法則	18
2.5	積分形のガウスの法則の応用	18
2.5.1	例題: 直線上に一様に分布する電荷が作る電場	18
2.5.2	例題: 球面上に一様に分布する電荷が作る電場強度	19
2.5.3	例題: 球の内部に一様に電荷が存在する場合に作る電場強度	20
2.6	電場の線積分と保存力 (渦無しの法則?): 2 番目の基本法則 (積分形)	20
2.6.1	電場による仕事の線積分と保存力	20

2.6.2	電場による力は保存力: 2 番目の基本法則 (渦無しの法則) の積分形	21
2.7	電場と静電ポテンシャル	22
2.7.1	静電ポテンシャルと位置エネルギー	22
2.7.2	等ポテンシャル面	23
2.7.3	静電ポテンシャルから電場を求める (例題)	24
2.7.4	「山の高さと勾配」との類推: 等高線と gradient (勾配)	25
2.8	静電エネルギー	27
2.8.1	複数の電荷が持つ静電エネルギー	27
2.8.2	連続的に分布する電荷が持つ静電エネルギー	28
2.9	電気双極子	28
2.10	電気双極子展開、四重極子展開	29
2.11	遠隔作用、近接作用、電場	29
第 3 章	静電場の微分法則	31
3.1	ガウスの法則の微分形	31
3.1.1	導出	31
3.1.2	微分形のガウスの法則の意味 (div の意味)	32
3.2	2 番目の基本法則 (渦無しの法則) の微分形	33
3.2.1	渦無しの法則の意味 (rot の意味)	35
3.3	ガウスの定理とストークスの定理 (数学)	36
3.3.1	積分の公式	36
3.3.2	線積分	36
3.3.3	ガウスの定理 (数学)	37
3.3.4	ストークスの定理 (数学)	37
3.4	ポアソンの方程式	38
3.4.1	渦無しの法則と静電ポテンシャルの関係	38
3.4.2	ポアソンの方程式: ガウスの法則と静電ポテンシャル	38
3.4.3	(例題) ポアソン方程式の解の例その 1	39
3.4.4	ポアソン方程式の解の例その 2	39
3.5	電荷、電場、静電ポテンシャルの関係と基礎方程式のまとめ	40
第 4 章	導体と静電場	43
4.1	導体	43
4.1.1	導体と絶縁体	43
4.1.2	誘導電荷と電場	43
4.1.3	表面電荷と電場の関係	43
4.1.4	静電遮蔽	45
4.2	コンデンサー	45
4.2.1	電気容量の定義と一般型のコンデンサー	45
4.2.2	並行平板コンデンサー	45
4.2.3	(例題) 並行平板コンデンサーの例	46
4.2.4	コンデンサーに蓄えられるエネルギー	46
4.2.5	静電場のエネルギー	47
4.2.6	(例題) 円筒形コンデンサー	47
4.3	導体平面と点電荷 (鏡像法)	47
第 5 章	定常電流の性質	49

5.1	定常電流と電荷保存則	49
5.1.1	電流と電流密度	49
5.1.2	定常電流の保存則 (積分形と微分形)	49
5.2	オームの法則	49
5.3	オームの法則のミクロな過程	50
第 6 章	静磁場の基本法則	53
6.1	磁場の発生: 磁石と電流	53
6.1.1	磁荷が作る磁場と磁気双極子 (磁石)	53
6.1.2	電流による磁場の発生: エルステッドの発見	53
6.1.3	電流間に働く力: アンペールの発見	53
6.2	磁束線の保存則: 磁場に関するガウスの法則	54
6.2.1	磁力線	54
6.2.2	磁場に関するガウスの法則	54
6.3	磁場に関する渦の法則: アンペールの法則 (電流が作る磁場)	55
6.3.1	電流が無い場合のアンペールの法則	55
6.3.2	電流がある場合のアンペールの法則: 電流が作る磁場 ($\vec{B} \rightarrow \vec{i}$ の式)	55
6.3.3	(単) 電荷、単磁荷、電流、磁流 (?)	56
6.3.4	ソレノイドコイル	56
6.4	ベクトルポテンシャル	57
6.4.1	ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ とは ($\vec{A} \rightarrow \vec{B}$ の式)	57
6.4.2	ベクトルポテンシャルから電流密度を求める ($\vec{A} \rightarrow \vec{B} \rightarrow \vec{i}$ の式)	58
6.4.3	電流密度からベクトルポテンシャルを求める ($\vec{i} \rightarrow \vec{A}$ の式)	58
6.4.4	電流が発生する磁場の法則: ビオ-サバールの法則 ($\vec{i} \rightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ の式)	59
6.4.5	(例題) 円電流が作る磁場	60
6.5	静磁場の持つエネルギー	62
6.6	静磁場の基本法則のまとめ	62
6.6.1	電流、磁場、ベクトルポテンシャルの関係	62
第 7 章	磁場が電流に及ぼす力	65
7.1	磁場が電流に与える力: アンペールの力	65
7.1.1	アンペールの力	65
7.1.2	アンペールの力の例: 磁場がコイルに与える力	65
7.1.3	磁荷に作用する力と磁気双極子	65
7.2	運動する荷電粒子に与える力: ローレンツ力	67
7.2.1	ローレンツ力	67
7.2.2	サイクロトロン	67
7.3	ローレンツ力のパラドックス	67
第 8 章	時間的に変動する電場と磁場: 電磁誘導の法則	69
8.1	時間変化しない場合の復習	69
8.2	ファラデーの電磁誘導の法則: 磁場の時間変化は電場を作る	69
8.2.1	静止している閉回路を貫く磁場の時間変化	69
8.2.2	運動する導線内に発生する起電力	70
8.3	電荷保存則	71
8.4	アンペール-マックスウェルの変位電流: 電場の時間変化は磁場を作る	72
第 9 章	マックスウェルの法則と電磁場	75

9.1	マックスウェルの法則	75
9.1.1	マックスウェルの法則の一般式	75
9.1.2	電荷が無い場合のマックスウェル方程式	75
9.2	電磁波	76
9.3	偏微分	77
9.4	良く出て来る計算	78
9.5	ベクトル解析	79
9.5.1	grad の意味	79
9.5.2	div の意味	79
9.5.3	rot の意味	79
9.5.4	公式	79
9.5.5	球座標	79
9.6	円筒座標	80

第1章 電荷にはたらく力

1.1 電荷とは

みじかな全ての物質は、陽子が持つプラスの電荷と、電子が持つマイナスの電荷で満たされている。その数は非常に正確につり合っている。現在、1つの電子または陽子が持つ電荷の量 e は分かっており、以下に示す C という単位では

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19} [\text{C}] \quad (1.1)$$

である。これを電荷素量と呼ぶ。水素 1g の原子には

$$N_A = 6.02 \times 10^{23} \quad (1.2)$$

この陽子と同じ量の電子が存在している。陽子、電子それぞれは

$$e \cdot N_A = 9.6 \times 10^4 [\text{C}] \quad (1.3)$$

の電荷を持っていることになる。

1.2 クーロンの法則と単位

1.2.1 単位

R_{12} 離れた 2 つの電荷 q_1 と q_2 の間に働く力 F_{12} は以下のように書ける。

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2} \quad (1.4)$$

F_{12} は

$$1[\text{N}] = 1[\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}] \quad (1.5)$$

という単位がある。これを MKS 単位系と呼ぶ。MKS とはメートル [m]、キログラム [kg]、秒 [sec] のことである。

電荷については最初はどのようにでも取って良い。しかし、電流の源が電荷の流れだと知っており、その単位として

$$[\text{A}] \quad (1.6)$$

を使用している。であれば、この電流 1A が 1 秒間かかって運ぶ電荷の量を単位として決めるのが良いであろう。そこで

$$1[\text{C}] \equiv 1[\text{A}] \cdot 1[\text{sec}] \quad (1.7)$$

と定義する。これを MKSA 単位系と呼ぶ。電荷の単位が決まれば、力の比例係数 k についても決定する。これは k のままでも良いが、後のことを考えて、以下のように k は書き換える。

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.8)$$

ϵ_0 は「真空の誘電率 (permittivity of vacuum)」と呼び、

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} [\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (1.9)$$

になる。 4π は球の表面積が $4\pi R^2$ だからである。

1m 離れた場所に位置する 2 つの電子の間に働く力 F_{12} は以下ようになる。

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_{12}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{C})^2}{(1\text{m})^2} = 2.3 \times 10^{-28} [\text{N}] \quad (1.10)$$

1.2.2 1g が電荷になったら

(FY2013/1 回目: 2013/10/03 講義中の練習問題)

1g の物質中には、おおよそ 10^{23} 個の陽子と電子が存在している。水素原子なら 6.02×10^{23} 個で、ヘリウムでは中性子が質量の半分を担うので 3×10^{23} 個。それより重い原子もおおよそその数字になる。

さて、1g の陽子と 1g の陽子があったとする。1g の陽子が持つ電荷の量は

$$q = 6.02 \times 10^{23} \times 1.60217733 \times 10^{-19} = 9.6 \times 10^4 [\text{C}] \quad (1.11)$$

である。2 つの電荷を $R = 1\text{m}$ 離れた時に働く力は

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2} = 8.3 \times 10^{19} [\text{N}] \quad (1.12)$$

となる。1[kg] の質量が地球に引っ張られる力は 9.8[N] だから実にその $\sim 10^{19}$ 倍。つまり、 $\sim 10^{19} [\text{kg}]$ の質量と同じだと言うこと。これは 1 辺 2000[km] の立方体の体積の水の質量が地球に引かれる力に等しい。とてつも無い大きな力が働くことになる。

一方で、実際にはそんな恐ろしいことにはお目に掛かったことがない。ということは、1[g] の陽子の塊が存在することはまずなく、極めて良い精度で電子と陽子のバランスが取れていることを意味する。

1.2.3 もう 1 つの単位 cgs

実は MKSA に対してもう一つ比較的メジャーな cgs-Gauss という単位系がある。センチメートル [cm]、グラム [g]、秒 [sec] を基本単位としている。電荷の単位は (esu) で、電荷素量 e は

$$e = 4.803 \times 10^{-10} [\text{esu}] \quad (1.13)$$

である。Gauss は磁束密度 B の単位。

単位の国際標準規格では MKSA を使うことになっている。しかし、私の専門の天文学ではこちらの cgs-Gauss がメジャーであり、そちらでどうしても物事を考えてしまう。大きな物を扱うのに小さな単位を使うので、ますます数字が大きくなるのだが。

1m = 100cm 離れた場所に位置する 2 つの電子の間に働く力 F_{12} は以下ようになる。

$$F_{12} = \frac{e^2}{R_{12}^2} = \frac{(4.80 \times 10^{-10} [\text{esu}])^2}{(100 [\text{cm}])^2} = 2.3 \times 10^{-23} [\text{dyn}] = 2.3 \times 10^{-28} [\text{N}] \quad (1.14)$$

1.3 ベクトルによるクーロン力の表現方法

1.3.1 ベクトル

3 次元のベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の成分を以下のように書く。

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \vec{B} = (B_x, B_y, B_z) \quad (1.15)$$

$\vec{A}$ の長さはピタゴラスの定理より

$$|\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1.16)$$

である。

$\vec{A}$ と $\vec{B}$ の足し算は

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \quad (1.17)$$

である。 $\vec{A} + \vec{B}$ は、この 2 つのベクトルがなす平行四辺形の対角線のベクトルを意味する。

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z) \quad (1.18)$$

は、 $\vec{B}$ から $\vec{A}$ へ向かうベクトルを意味する。

1.3.2 位置ベクトル、2 点間を結ぶベクトル、単位ベクトル

空間上の点の位置を示すのに、座標の原点からその位置を結ぶ「位置ベクトル」を使用して表現する。すなわち、 (x, y, z) の位置の位置ベクトル $\vec{r}$ は

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad (1.19)$$

である。

空間上の 2 つ点、点 P_1 と点 P_2 について、それぞれの点の位置ベクトルを $\vec{r}_1$ 、 $\vec{r}_2$ とする。点 P_2 から点 P_1 へ引いたベクトル $\vec{R}_{12}$ は

$$\vec{R}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (1.20)$$

と書ける。 R_{12} は方向と長さの 2 つの情報を持つが、このうち距離 (長さ) R_{12} は

$$R_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} \quad (1.21)$$

である。方向 $\vec{n}_{12}$ は

$$\vec{n}_{12} = \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}} \quad (1.22)$$

と書ける。この $\vec{n}_{12}$ のことを長さが 1 なので「単位ベクトル」と呼ぶことが多い。

1.3.3 2 つ電荷に働く力のベクトルの表現

点 P_1 から P_2 (位置ベクトルなどは前に示した通り) にそれぞれ電荷量 q_1 、 q_2 を持つ電荷 q_1 と q_2 があった場合、 q_1 が q_2 から受ける力の大きさ $|\vec{F}_{12}|$ は以下のように書ける。

$$|\vec{F}_{12}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \quad (1.23)$$

力の方向を示す単位ベクトルとして $\vec{n}_{12}$ を使用すると、力のベクトルは

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{n}_{12}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \quad (1.24)$$

と書ける。ここで

$$\vec{n}_{12} = \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (1.25)$$

である。よって、

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (1.26)$$

と書ける。これはベクトル形式でのクーロンの法則である。成分毎に書き下すこともできる。

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}, \frac{y_1 - y_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}, \right. \quad (1.27)$$

$$\left. \frac{z_1 - z_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} \right) \quad (1.28)$$

1.3.4 n 個の電荷から受ける力のベクトルと重ね合わせの原理

n 個の電荷の電荷量を $q_1, q_2, \dots, q_n$ と書き、位置ベクトルを $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ と書く。それぞれの電荷から電荷量 q 、位置 $\vec{r}$ の電荷が受ける力を $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ と書くと、合力 $\vec{F}$ はそれぞれの力の合計である。

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (1.29)$$

となる。

ここでは、複数の点電荷から受ける合計の力は、それぞれ独立に求めた力の合計と等しいと置いた。すなわち、「ある点電荷に対して、2つ以上の点電荷が及ぼす力が、お互いに作用することなくベクトルの的に加算できる」ことを Coulomb 力に関する重ね合わせの原理と呼ぶ。

この原理が成り立つのは厳密には真空中に限られる。物質中では、これは近似的に成り立つに過ぎない。

式の書き方の問題だが、 $i = 1 \sim n$ の n 個の点電荷のうち、 i 番目の電荷が他の電荷から受ける力 $\vec{F}_i$ を

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ij} = \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^3} \quad (1.30)$$

と書いたりする。ここで $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ である。

1.4 内積 (スカラー積)

1.4.1 定義

2つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ に関して、その間の角を θ の場合、内積 (スカラー積) を以下の様に定義する。

$$A = |\vec{A}|, B = |\vec{B}|, \quad (1.31)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv AB \cos \theta \quad (1.32)$$

θ を $\vec{A}$ から $\vec{B}$ を計っても、その逆でも $\cos \theta$ は同じ値になる。よって、 $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の順番を変えても答えは変わらない。足し算と組み合わせることも問題はない。

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (1.33)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (1.34)$$

ベクトルがお互いに垂直であれば 0 になり、方向が同じなら長さの積と等しい。同じベクトルの内積は

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = |\vec{A}|^2 \quad (1.35)$$

となる。

1.4.2 余弦定理

三角形 OP_1P_2 に関して、頂点 O での角度を θ とすると余弦定理は

$$\overline{P_2P_1}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - 2\overline{OP_1}\overline{OP_2} \cos \theta \quad (1.36)$$

と書ける。 $\overrightarrow{OP_1} = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{OP_2} = \vec{r}_2$, $\overrightarrow{P_2P_1} = \vec{R}_{12}$ とすると、

$$R_{12}^2 = |\vec{R}_{12}|^2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (1.37)$$

$$= \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \quad (1.38)$$

$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta \quad (1.39)$$

すなわち、余弦定理と一致する。

1.4.3 成分による計算

$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ とし、 x, y, z 軸それぞれの単位ベクトルを $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ とすると、

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k} \quad (1.40)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k} \quad (1.41)$$

となる。

よって、

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}) \cdot (B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}) \quad (1.42)$$

$$= A_x B_x \vec{i} \cdot \vec{i} + A_y B_y \vec{j} \cdot \vec{j} + A_z B_z \vec{k} \cdot \vec{k} \quad (1.43)$$

$$+ (A_x B_y + A_y B_x) \vec{i} \cdot \vec{j} + (A_y B_z + A_z B_y) \vec{j} \cdot \vec{k} + (A_z B_x + A_x B_z) \vec{k} \cdot \vec{i} \quad (1.44)$$

$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.45)$$

となる。

1.4.4 物理での内積の例

大きさ F の力で物体を距離 s 動かす。両者の方向のなす角度を θ とすると、動かした際に行った仕事 W は

$$W = F s \cos \theta \quad (1.46)$$

である。よって力と移動をそれぞれベクトル $\vec{F}$ と $\vec{s}$ で表現すると、

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (1.47)$$

と書ける。

1.5 外積 (ベクトル積)

1.5.1 定義

2つのベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ に関して、その間の角を θ の場合、得られる外積 (ベクトル積) $\vec{C}$ を以下の様に定義する。

$$\vec{C} = \vec{A} \otimes \vec{B} \quad (1.48)$$

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \otimes \vec{B}| = AB \sin \theta \quad (1.49)$$

外積の大きさ、すなわち $\vec{C}$ は $\vec{A}$ と $\vec{B}$ のなす平行四辺形の面積の大きさに対応する。

$\vec{C}$ の向きは、 $\vec{A}$ と $\vec{B}$ がなす平面に垂直で、 $\vec{A}$ から $\vec{B}$ に向けて回転する右ネジの進む方向を向く。右手で親指、人差指、中指をそれぞれに対して垂直な状態にした場合、 $\vec{A}$ を親指、 $\vec{B}$ を人差指とすると $\vec{C}$ は中指である。 x, y, z 座標で考えた場合は、 x 軸, y 軸, z 軸それぞれ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ に対応する。

内積とは逆に外積はかけ算をする順番が重要である。すなわち

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = -\vec{B} \otimes \vec{A} \quad (1.50)$$

である。

和に対しては

$$\vec{A} \otimes (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \otimes \vec{B} + \vec{A} \otimes \vec{C} \quad (1.51)$$

である。

同じベクトルのかけ算は、 $\theta = 0$ なので、

$$\vec{A} \otimes \vec{A} = 0 \quad (1.52)$$

となる。

また、基本ベクトル $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ に対して、

$$\vec{i} \otimes \vec{i} = \vec{j} \otimes \vec{j} = \vec{k} \otimes \vec{k} = 0 \quad \vec{i} \otimes \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \otimes \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \otimes \vec{i} = \vec{j} \quad (1.53)$$

となる。

1.5.2 成分による計算

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k} \quad (1.54)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k} \quad (1.55)$$

の場合、

$$\vec{A} \otimes \vec{B} = (A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}) \otimes (B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}) \quad (1.56)$$

$$= A_x B_x \vec{i} \otimes \vec{i} + A_y B_y \vec{j} \otimes \vec{j} + A_z B_z \vec{k} \otimes \vec{k} \quad (1.57)$$

$$+ A_x B_y (\vec{i} \otimes \vec{j}) + A_y B_x (\vec{j} \otimes \vec{i}) + A_y B_z (\vec{j} \otimes \vec{k}) \quad (1.58)$$

$$+ A_z B_y (\vec{k} \otimes \vec{j}) + A_z B_x (\vec{k} \otimes \vec{i}) + A_x B_z (\vec{i} \otimes \vec{k}) \quad (1.59)$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k} \quad (1.60)$$

成分毎に書くと

$$(\vec{A} \otimes \vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y \quad (1.61)$$

$$(\vec{A} \otimes \vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z \quad (1.62)$$

$$(\vec{A} \otimes \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (1.63)$$

となる。

(FY2009/1 回目: 2009/10/1 はここまで)

1.5.3 物理での外積の例その1: 力のモーメント

一方が軸になり回転できる棒を考える。棒の長さと向きをベクトル $\vec{R}$ で示す。軸と反対の場所に力 $\vec{F}$ を加える。力の方向は軸に対して垂直であり、棒に対して角度 θ をなす。力のモーメント $\vec{N}$ を

$$\vec{N} = \vec{R} \otimes \vec{F} \quad (1.64)$$

$$|\vec{N}| = |\vec{R}| |\vec{F}| \sin \theta \quad (1.65)$$

と表す。

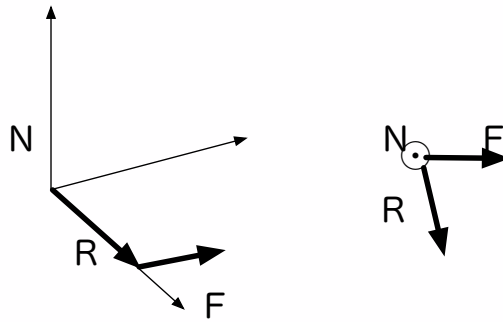


図 1.1: 力のモーメント

1.5.4 物理での外積の例その2: 平行六面体の体積

$$(\vec{A} \otimes \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \otimes \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \otimes \vec{A}) \cdot \vec{B} \quad (1.66)$$

は、3つのベクトルがなす平行六面体の体積を表す。

第2章 静電場の性質

2.1 電場 (あるいは、電気工学の「電界」)

2.1.1 電場の定義

電荷 q が q_1 より受ける力についてクーロンの法則は

$$\vec{F} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (2.1)$$

と書ける。これを書き直してみよう。まず、ベクトル $\vec{E}(\vec{r})$ を

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (2.2)$$

と定義すると

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}) \quad (2.3)$$

と書ける。 $\vec{E}(\vec{r})$ は $\vec{r} = (x, y, z)$ を変数とする関数であることを意味する。 $\vec{E}(\vec{r})$ を成分毎に書き下すと

$$E_x(x, y, z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} \quad (2.4)$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} \quad (2.5)$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z - z_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} \quad (2.6)$$

となる。この $\vec{E}$ のことを「電場」(電気工学では「電界」) 呼ぶ。特に時間的に変化しない電場のことを「静電場」と呼ぶ。電場の単位は力を電荷量で割った値になるので、 $[\text{N} \cdot \text{C}^{-1}]$ と書ける。 $[\text{C}] = [\text{A} \cdot \text{sec}]$ であり $[\text{N}] = [\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{sec}^{-2}]$ なので、 $[\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{sec}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}]$ と書ける。となる。一方、後で出て来る電位の単位 $[\text{V}]$ を使用すると $[\text{V} \cdot \text{m}^{-1}]$ とも書ける。結局、

$$[\text{N} \cdot \text{C}^{-1}] = [\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{sec}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}] = [\text{V} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (2.7)$$

となる。

(FY2013/1 回目: 2013/10/03 はここまで)

2.1.2 複数の電荷が作る電場

クーロン力が重ね合わせの原理に従ったことから、明らかに電場も重ね合わせの原理に従うことになる。すなわち、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{r}) \quad (2.8)$$

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (2.9)$$

$\vec{E}_i(\vec{r})$ は、 $\vec{r}_i$ の場所にいる i 番目の電荷が $\vec{r}$ の場所を作る電場である (これも書き方の問題で、 $\vec{E}_i(\vec{r}, \vec{r}_i)$ と書くようなこともあるので、驚いてはいけない。同じことを表現するにも色々流儀があり、要はその式で何を言いたいのかきちんと把握することが重要なのである)。

2.1.3 連続的に分布する電荷の作る電場

電荷が空間的に連続して分布する場合を考える。まず、 $\vec{r}'$ における電荷密度 $\rho(\vec{r}')[\text{C} \cdot \text{m}^{-3}]$ を導入する。これは単位体積あたりの電荷の量である。 $\vec{r}'$ での小さい体積 $\Delta V'[\text{m}^3]$ を考えるとその中に含まれる電荷の量は $\rho(\vec{r}')\Delta V'$ と書ける。よって、この電荷が $\vec{r}$ に作る電場は

$$\frac{\rho(\vec{r}')\Delta V'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.10)$$

と書ける。この小さい領域が複数あり $\vec{r}'_i, \Delta V'_i$ の様子に書くなら、それを足し合わせることで重ね合わせた合計の電場が計算できる。すなわち、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\rho(\vec{r}'_i)\Delta V'_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} \quad (2.11)$$

となる。

電荷が V の領域に分布していた場合は $\Delta V' \rightarrow dV'$ と書き直して積分記号を使い記述することになる。それを

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV' \quad (2.12)$$

と書く。この書き方は少々びっくりするかも知れないが、書き方の問題であり、恐れるには足りない。すなわち 3 次元の xyz 座標系で考えた場合、

$$\Delta V' = \Delta x' \Delta y' \Delta z' \quad (2.13)$$

であるから

$$dV' = dx' dy' dz' \quad (2.14)$$

となる。よって、電場の x 成分は

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{(x - x')\rho(x', y', z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz' \quad (2.15)$$

と書ける。 (x_0, y_0, z_0) と (x_1, y_1, z_1) を対角に持つ直方体状に分布しているなら、

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x')\rho(x', y', z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz' \quad (2.16)$$

となる。とにかく、一般的な形を表すために少々積分範囲などを曖昧な書き方をせざるを得ないだけで、その書き方自体でびっくりする必要はない。このような積分を「体積積分」と呼ぶ。

2.2 色々な静電場の具体例

2.2.1 例題: 一様に電荷が分布する無限に長い棒が作る電場

(FY2013/2 回目: 2013/10/17 講義中の練習問題)

一様に電荷が分布する無限に長い棒が作る電場を求める。棒からの距離を r とする。単位長さあたりの電荷の量 (電荷密度) を λ とおく。棒に沿って座標系 s とり、点 s と r を結ぶ線と棒との最短を結ぶ直線なす角度を θ とする。電場は対象性から考えて棒に沿った成分は 0 であり、棒に垂直な成分のみを考えれば良い。よって、短い長さ Δs が r に作る電場の棒に垂直な成分は

$$\frac{\lambda \Delta s}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{(r^2 + s^2)} = \frac{\lambda \Delta s}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(r^2 + s^2)^{3/2}} \quad (2.17)$$

である。棒は $s = -\infty \sim \infty$ まで伸びているので、それを重ね合わせて合計の電場を求めると

$$E(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(r^2 + s^2)^{3/2}} ds \quad (2.18)$$

と書ける。 $s = r \tan \theta$ の変数変換を行うと良い。すなわち

$$r^2 + s^2 = r^2(1 + \tan^2 \theta) = \frac{r^2}{\cos^2 \theta} = r^2 \sec^2 \theta \quad (2.19)$$

$$2s \cdot ds = r^2(-2) \frac{-\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta \quad (2.20)$$

$$s \cdot ds = r^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta = r^2 \frac{1}{\cos^2 \theta} \tan \theta \cdot d\theta = r \frac{s}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (2.21)$$

$$ds = r \sec^2 \theta d\theta \quad (2.22)$$

となる。 $s = -\infty \sim \infty$ は $\theta = -\pi/2 \sim \pi/2$ と書き換えられる。よって

$$E(r) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3 \sec^3 \theta} r \sec^2 \theta d\theta \quad (2.23)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (2.24)$$

となる。

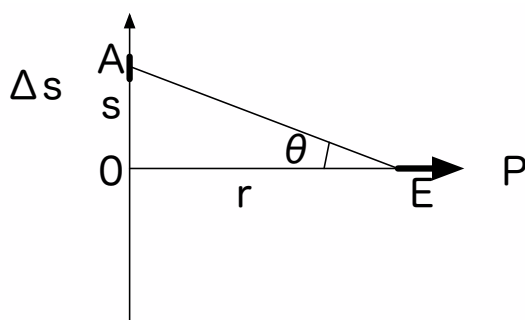


図 2.1: 無限に長い棒の作る電場

2.3 電気力線と電場

電場の様子を一目で分かるように図示するのに「電気力線」(electric line of force) を用いる。 q が半径 r に作る電場の大きさは

$$E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi r^2} \quad (2.25)$$

である。この式からわかる通り、電場の大きさを球の面積全部で足してやると半径によらない一定値

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.26)$$

となる。よって、 q から出る電気力線の本数は電荷 q の値に比例し、その数は減ったり増えたりしないと考えると都合が良い。そう決めると逆に電気力線の本数の密度は電場の大きさを表すことになる。すなわち、「ある場所での電場の方向は、電気力線の接線方向と一致し、電場の大きさは、電気力線の方法線に持つ単位面積を貫く電気力線の数 (電気力線の密度) に一致する」と言える。

上記の式と図 2.2(左) を見て、電荷 q を取り囲む球を考えた場合、球面を貫く電気力線の総本数 N を以下のように定義すると良いだろう。

$$N \equiv \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.27)$$

すなわち、電荷 q から放出される電気力線の本数 N は q/ϵ_0 本だと考えることができる。

「電気力線はプラスの電荷から放射され、一方でマイナスの電荷へは吸い込まれる。電荷の無い場所では途中で途切れたりわきだしたりはしない。」1 個だけ電荷が存在する場合は、等方的に放射され、空間に正負の電荷対がある場合は、電気力線は正の電荷から出て負の電荷に入るか、あるいは無限遠まで伸びる。図 2.2 は、プラスの電荷が 1 つだけあった場合と、プラス及びマイナスの電荷がそれぞれ 1 つずつ近くにあった場合の電気力線を描いている。

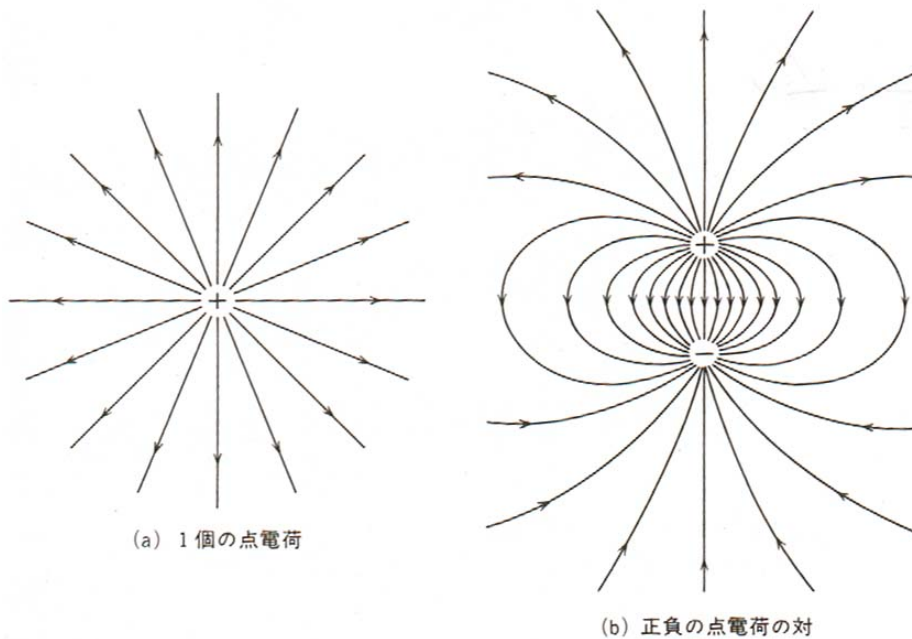


図 2.2: 電気力線。1 個の点電荷 (左)、正負の点電荷の対 (右)。

2.4 積分形のガウスの法則: 1 番目の基本法則 (積分形)

2.4.1 言葉での積分形のガウスの法則

さて、電気力線と電場の関係をもう少し考えよう。先ほどは単純な球面を考えたが、もっと複雑な閉曲面を考えることもできる。図 2.3(左) では、閉曲面の中に電荷 q が存在する。曲面の場所によって電気力線の密度 (すなわち電場の大きさ) に大小はあるが、それをすべて足し合わせると、 $N = q/\epsilon_0$ になることは直観的にわかる。

図 2.3(中) では、ある電気力線は出て再び入る。出るものを正に数え、入るものを負に数えると、その出入りはキャンセルされ、結局最終的に残るのは図 2.3(左) と同じく $N = q/\epsilon_0$ となる。

図 2.3(右) では、電荷は閉曲面の外にある。閉曲面に入った電気力線も結局はどこかで出て行くので、閉曲面を貫く電気力線を全て数えると 0 になる。

以上は直観的に明らかであろう。つまり、「閉曲面を貫く電気力線について、外へ出るものを正に数え、中に入るものを負に数える。こうして数えた閉曲面を貫く電気力線の総本数は、その閉曲面中に存在する電荷量が放出する電気力線の総本数と一致する。」と言える。

前の章では、電気力線の密度と電場は比例関係があることを述べた。これを利用すると上記のステートメントは以下のように言い替えることができる。「電場強度を閉曲面上で積分した値は、その閉曲面内に存在する電荷の総量と比例する」これを「積分形で表したガウスの法則」と呼ぶ。つまり、

$$(\text{閉曲面上で電場強度の積分値}) = (\text{閉曲面内の電荷量})/\epsilon_0 \quad (2.28)$$

ということである。

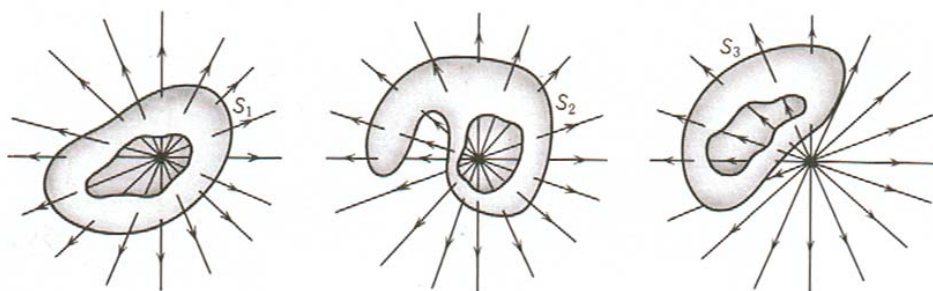


図 2.3: 閉曲面を貫いて出る電気力線の数。

2.4.2 式を用いた積分形のガウスの法則

言葉での説明をもう少し物理っぽく式で示すことにする。図 2.4 の左図に示す閉曲面を考え、その曲面の微小な部分を取り出す。大局的にはもちろん曲面だが、微小な部分なので平面と考えることができる。それを図 2.4 の右図に示す。

この微小平面 ΔS を貫く電気力線の数 ΔN とする。電気力線の密度 (= 電場強度) は、電気力線の方法を法線に持つ単位平面上での電気力線の数として定義されている。 ΔN の電気力線が垂直に貫く微小平面は (ΔS ではなく) 図 2.4(右) の $\Delta S'$ と書くと

$$\Delta S' = \Delta S \cos \theta \quad (2.29)$$

の関係がある。 θ は ΔS と $\Delta S'$ がなす角度である。すなわち、 $\Delta S'$ の法線方向である電気力線の方法 (すなわち電場 $\vec{E}$ の方法) と微小平面 ΔS の法線 $\vec{n}$ がなす角度である。

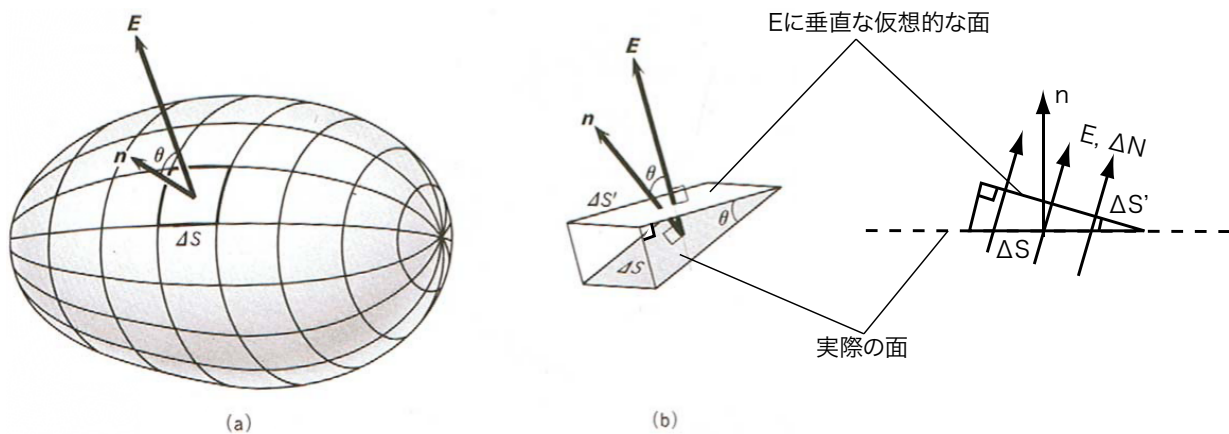


図 2.4: 閉曲面の微小な部分を貫く電気力線の数。

先程述べた通り、電気力線の密度は電場強度と等しいので、電気力線の密度は $\Delta N/\Delta S$ ではなく、 $\Delta N/\Delta S'$ である。よって

$$E = \frac{\Delta N}{\Delta S'} = \frac{\Delta N}{\Delta S \cos \theta} \quad (2.30)$$

である。従って、微小平面 ΔS の法線方向の単位ベクトルを $\vec{n}$ と定義すると、

$$\Delta N = E \cdot \Delta S' = E \cos \theta \cdot \Delta S = (\vec{E} \cdot \vec{n}) \Delta S = E_n \Delta S \quad (2.31)$$

となる (書き方の問題だが、このように $\vec{E}$ の $\vec{n}$ 成分を E_n と書くことがあるので注意)。この微小平面を集めれば閉曲面 S になるので、閉曲面 S を貫く電気力線の総数 N は

$$N = \sum \Delta N = \sum (\vec{E} \cdot \vec{n}) \Delta S \quad (2.32)$$

と書ける。閉曲面 S 内に存在する電荷量を q とすると、そこから放射される電気力線の本数は q/ϵ_0 であり、これが N と一致するので

$$N = \sum \Delta N = \sum (\vec{E} \cdot \vec{n}) \Delta S = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.33)$$

と書ける。今、左辺は和の記号で示しているが、これを微小平面の積分に書き直すと

$$N = \int_S dN = \int_S \{\vec{E} \cdot \vec{n}\} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.34)$$

となる。閉曲面 S 上を点を示す位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると、

$$N = \int_S dN = \int_S \{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.35)$$

と書いたりもする。

書き方について述べておくと、

$$\int_S f(\vec{r}) dS \quad (2.36)$$

は、 S という曲面上で $f(\vec{r})$ という値を足しあげる (積分する) ということを表現している。 $\vec{r}$ は閉曲面 S 上の各点の位置を示すベクトルのつもりで書いている。平面 S が 3 次元だと分かりにくいので、平面 S を (x_0, y_0) と (x_1, y_1) を対角上の頂点とする長方形だとすると、

$$\int_S f(\vec{r}) dS = \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx dy \quad (2.37)$$

ということになる。

ここまでは、1 個の電荷 q を考えていたが、別に複数でも良いし、さらには連続的に分布していても良い。以前の章で電荷密度の体積積分を示したので、その書き方にならう。結局、閉曲面 S の内部を領域 V とすると

$$N = \int_S dN = \int_S \{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (2.38)$$

となる。これが「積分形のガウスの法則」を式で示したものである。

当然わかと思うが、面積積分の $\vec{r}$ は閉曲面 S の上を 2 次元的に動き回るベクトルで、体積積分の $\vec{r}$ は領域 V の中を 3 次元的に動き回るベクトルであり、全然違うものである。

もし、閉曲面 S 中の電荷が無い、または正負の合計が 0 である場合、つまり全電荷量が 0 である場合は

$$\int_S \{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS = 0 \quad (2.39)$$

となる。

(FY2013/2 回目: 2013/10/17 はここまで)

2.4.3 電束密度を用いたガウスの法則

電束 $\vec{D}$ (electric flux density) を導入し、

$$\vec{D}(\vec{r}) \equiv \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.40)$$

と定義すると、ガウスの法則は

$$\int_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (2.41)$$

と書ける。ガウスの法則では $\vec{E}$ の代わりに $\vec{D}$ を使用することも多い。

2.5 積分形のガウスの法則の応用

2.5.1 例題: 直線上に一様に分布する電荷が作る電場

無限の長さを持つ直線上に線密度 $\lambda [\text{C} \cdot \text{m}^{-1}]$ を持つ電荷が、直線から r 離れた場所で作る電場強度 $E(r)$ は以下のように計算できる。

電気力線的な考え方 長さ $l [\text{m}]$ での電荷量は λl なので、これが作る電気力線の数 N は

$$N = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \quad (2.42)$$

対称性を考えると、電気力線の方向は電荷が分布する直線を中心線とする半径 r の円筒表面を垂直に貫いている。長さ l 、半径 r の円筒側面の表面積 S は

$$S(r) = 2\pi r \cdot l \quad (2.43)$$

となる。よって、半径 r での電気力線の密度と電場強度 $E(r)$ は

$$E = \frac{N}{S} = \frac{\lambda l / \varepsilon_0}{2\pi r \cdot l} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \quad (2.44)$$

となる。

ガウスの法則をダイレクトに使用する

$$\int_S \{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (2.45)$$

について、長さ l 、半径 r で作る円筒を考えると、電気力線および電場は対称性より電荷の分布する直線から円筒側面方向へ放射状に放射される。よって、側面の面積を $S(r)$ とすると

$$\int_S \{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS = E \cdot S = E \cdot 2\pi r l \quad (2.46)$$

となる。円筒内に存在する電荷量から右辺は

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \quad (2.47)$$

である。よって、

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \quad (2.48)$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \quad (2.49)$$

となる。

2.5.2 例題：球面上に一様に分布する電荷が作る電場強度

半径 R の球の表面上に一様に総電荷量 Q が存在する場合を考える。対称性より 4π 方向に等方的に電気力線が放射される。すなわち、電場も 4π 方向に等方的である。球の中心から r の距離にある場所での電場強度を

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (2.50)$$

となる。右辺の積分領域はもちろん球の中心から半径 r までの球の内部の領域を指す。

$r < R$ では、 r の内部には電荷は存在しない。よって、

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV = 0 \quad (2.51)$$

$$E(r) = 0 \quad (r < R) \quad (2.52)$$

となる。

一方で、 $r > R$ では、 r の内部に電荷 Q が存在するので、

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2.53)$$

となる。よって、

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2.54)$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \quad (r > R) \quad (2.55)$$

となる。すなわち、点電荷 Q が中心に存在する場合と同じ電場強度となる。

2.5.3 例題: 球の内部に一樣に電荷が存在する場合に作る電場強度

半径 R の球の内部に一樣に電荷密度 ρ が存在する場合に作る電場強度を求める。前節と同様に対称性を考えると、球の中心から r はなれた場所での電場強度は、 r より内部の電荷の総量が、球の中心に存在する場合と同じ値となる。電荷密度を ρ とすると、

$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4\pi r^3}{3} \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \quad (r < R) \quad (2.56)$$

となる。一方、 R より遠い所では、球の中心に総電荷量が存在するのと同じ電場強度を持つことになるので、

$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R) \quad (2.57)$$

2.6 電場の線積分と保存力 (渦無しの法則?): 2番目の基本法則 (積分形)

2.6.1 電場による仕事の線積分と保存力

静電場中で電荷を移動させる場合の仕事 電場中で電荷を移動させた場合に必要な仕事を計算する。図 2.5 の図 (a) を考える。点 Q に固定された電荷 q_1 が作る電場中で、電荷 q を O から曲線に沿って P まで移動させる。微小な距離 A から B へ移動させる場合に必要な仕事は、電場の向きに注意すると

$$\Delta W = F \cos \theta \Delta s, \quad F = qE \quad (2.58)$$

$$\Delta W = qE \cos \theta \cdot \Delta s \quad (2.59)$$

となる。一方、直線 QO 上で、 QP 、 QA 、 QB と同じ長さを持つ場所を P' 、 A' 、 B' とする。仮に電荷 q を点 A' から B' へ移動させると、それに必要な仕事 $\Delta W'$ は $\Delta s' = \Delta s \cos \theta$ に注意すると

$$\Delta W' = F \Delta s', \quad F = qE \quad (2.60)$$

$$\Delta W' = qE \Delta s' = qE \Delta s \cos \theta = \Delta W \quad (2.61)$$

となる。すなわち、点 A から B への移動に必要な仕事は点 A' から B' への移動に必要な仕事と同じであることがわかる。

OP 間の任意の点は OP' 上に一対一対応の点を持つので、上記の作業を繋いで行くことができる。結局、電荷 q を O から P へ移動させるのに必要な仕事 W は O から P' へ移動させるのに必要な仕事 W' に等しいことがわかる。

O から P へ進む経路はなにも図 2.5(a) だけではなく、様々な経路が可能である。(b) のような経路についても、 RR' と $R'P$ が打ち消し合う。

静電場中で電荷を移動させる場合の仕事のまとめ 結局まとめると、点 O から点 P へ移動させるのに必要な仕事は経路に依らず一定である。これを式で表す。 OP 上での位置ベクトル $\vec{r}$ での経路の接線方向の単位ベクトルを $\vec{t}(\vec{r})$ 、電場ベクトルを $\vec{E}(\vec{r})$ とすると、経路 OP を移動させるのに必要な仕事を W は

$$W = -q \sum (\vec{E} \cdot \vec{t}) \Delta s = -q \int_{OP} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds \quad (2.62)$$

と書き表され、 OP の経路に依らず一定である。

これを電荷量 q を取り去ると

$$- \int_{OP} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds \quad (2.63)$$

は OP の経路に依らず一定である、と言える。この積分値は OP' をまっすぐ進む場合と一致する。

点電荷 q_1 が作る電場中で電荷を移動させた場合の仕事 q_1 が作る距離 r での電場の大きさは

$$E(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (2.64)$$

であり、Q から O までの距離を r_0 、Q から P' および P までの距離を r とし、 E と t の向きが逆であることに注意すると、

$$-\int_{OP} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = -\int_{OP'} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = \int_{r_0}^r \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s^2} ds = \left[-\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s} \right]_{r_0}^r = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (2.65)$$

となる。仕事 W はこれに q を掛けた

$$W = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (2.66)$$

となる。

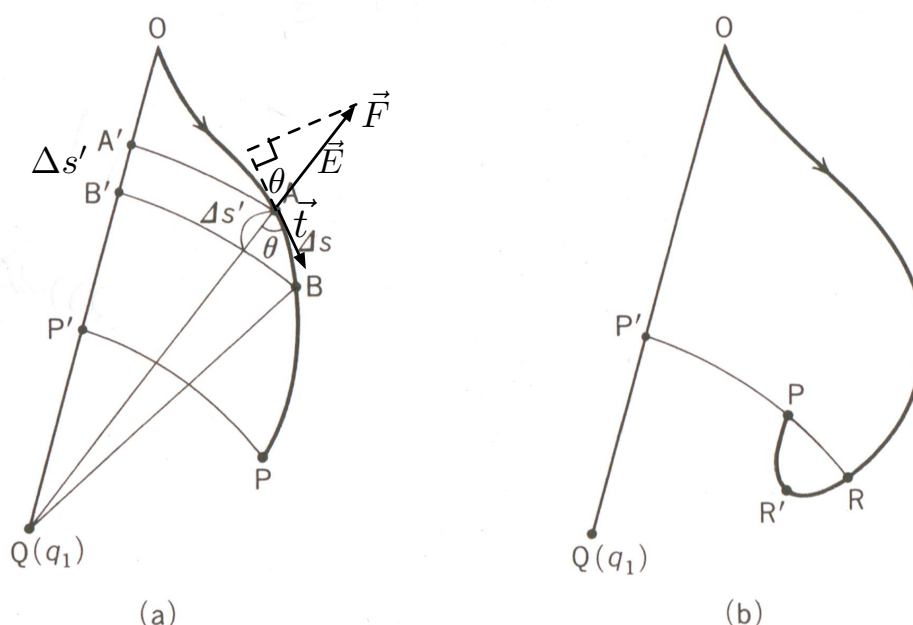


図 2.5: 点 Q に固定された電荷 q_1 が作る電場中で、電荷 q を O から曲線に沿って P まで移動させる。(a) の経路に沿った場合、移動に必要な仕事は、O からまっすぐ P' まで移動させるために要する仕事に等しい。(b) の経路に沿った場合も、点 Q に近付く場合の仕事はマイナスだと考え $\pm$ で合計すると結局 O からまっすぐ P' まで移動させるために要する仕事に等しくなる。

保存力 上記の議論は点電荷であったが、複数の電荷や連続的に電荷が分布する場合も、経路によらず上記の積分値は一定になると言える。結局、静電場下では、仕事は経路によらず始点と終点だけで決まる。このように、その力によってなされる仕事が経路によらず始点と終点だけで決まる力の種類を「保存力」と呼ぶ。

2.6.2 電場による力は保存力: 2 番目の基本法則 (渦無しの法則) の積分形

これまでの議論の別の言い方をする。図 2.6 で示される曲線 C について、上記の仕事は経路 OA'P と経路 OAP で同じ値を取るの、点を O をスタートし再び点 O に戻る経路 C での積分値は 0 となる。すなわち、

$$\oint_C (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = 0 \quad (2.67)$$

である。この式は、ガウスの積分法則とならぶ静電場での一般的な性質を与える重要な式である。ただし定着した名前は無い。名前が無いと呼びにくいので、「渦無しの法則」と呼ぶことにする。

この式は静電場の時にのみ成立する。電場が時間的に変化する場合は、渦無しの法則は成り立たない。渦無しの法則は Faraday の法則で時間変化の無い場合の式と一致する。

(FY2009/3 回目: 2009/10/29 はここまで)

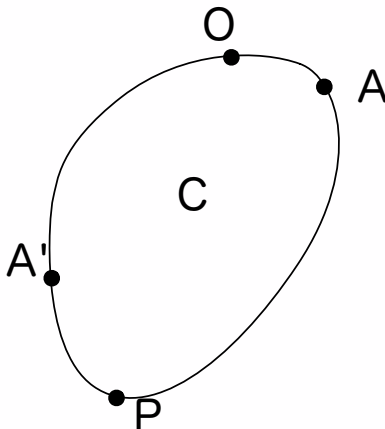


図 2.6: 閉じた曲線 C

2.7 電場と静電ポテンシャル

2.7.1 静電ポテンシャルと位置エネルギー

前のセクションでは静電場中で電荷を移動させた場合に必要な仕事を計算し、それが経路に依らないことを示した。ここで行われた仕事は、電荷の静電場に対する位置エネルギーとして蓄えられる。これは重力の場合と同様である。

静電場中の位置エネルギーと静電ポテンシャル 基準点 O に対して、電荷 q を P まで移動させた場合に蓄えられる位置エネルギーはなされた仕事に等しいので、

$$U(\vec{r}) = -q \int_{OP} (\vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{t}(\vec{r}')) ds' \quad (2.68)$$

とかける。ここで、 q を取り去った式 (あるいは単位電荷あたりの位置エネルギー)

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{OP} (\vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{t}(\vec{r}')) ds' \quad (2.69)$$

を「静電ポテンシャル (electostatic potential)」または「電位」と呼ぶ。単位は電圧と等しく V である。これに電荷量をかければエネルギー、すなわち単位 eV や J になる。

(FY2013/3 回目: 2013/10/24 はここまで)

点電荷が作る静電ポテンシャル 上記の電場を作る元として、点電荷を考える。まず簡単のために原点に存在する点電荷が半径 r の位置に作る電場は

$$E(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.70)$$

であるので、静電ポテンシャルは $r = \infty$ を基準とすると

$$\phi(r) = - \int_{OP} (\vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{t}(\vec{r}')) ds' = - \int_{\infty}^r E(s) ds' = - \int_{\infty}^r \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 s^2} ds' = \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 s} \right]_{\infty}^r = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.71)$$

となる。注意: ds' の方向は ∞ から r にとっている。積分変数を r' に変更する際には、 dr' の方向は ds' と逆である。つまり $ds' = -dr'$ という変数変換をすることになる。

もう少し一般的に $\vec{r}_1$ に存在する点電荷 q_1 が作る静電ポテンシャルについて与えておく。準点 O として無限遠を選べば、 $\vec{r}$ の位置での静電ポテンシャルは、

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|} \quad (2.72)$$

と書ける。

電場を作る電荷が $r_1, r_2, \dots, r_n$ の n 個あれば、

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (2.73)$$

となり、連続的に分布する場合は

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.74)$$

となる。

2.7.2 等ポテンシャル面

静電ポテンシャルが等しい面を「等ポテンシャル面」と呼び、電場の状態を示す電気力線とは別の方法として用いられる。電場を作る電荷が点電荷の場合は、その電荷を中心に持つ球面が等ポテンシャル面である。等ポテンシャルを等間隔にその面を書かせると、電荷中心付近では詰まっており、離れる程まばらになる。2 個の電荷 $+q$ と $-q$ が存在する場合は、図 2.7 になる。

等ポテンシャル面はその名の通り、同じポテンシャルを持つ、すなわち同じ電荷量であれば同じ位置エネルギーを持つ面である。よって、その面に沿って電荷を動かす際の仕事は 0 である。よって、等ポテンシャル面と電気力線および電場の向きは垂直であることがわかる。

等ポテンシャル面を跨ぐには仕事が必要で、その大きさはまたぐ等ポテンシャル面の数に比例する、と言って良い。等ポテンシャル面が詰まっているということは単位長さを移動させるのに必要な仕事が大い、ということであり、力が大いということである。すなわち、電場が大い、ということになる。

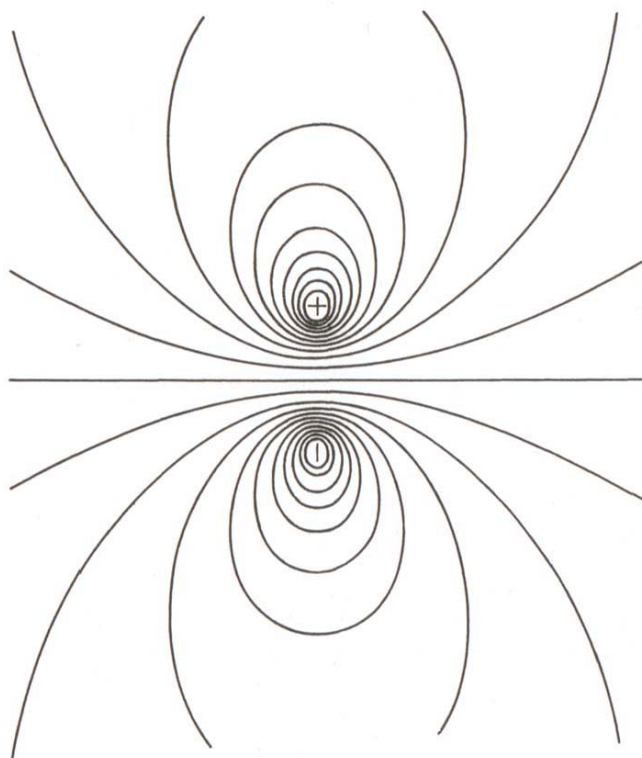


図 2.7: 2 個の点電荷 $+q$ と $-q$ による等ポテンシャル面。電気力線はこの面に垂直。図 2.2(右) を参照。

(FY2010/3 回目: 2010/10/21 はここまで)

2.7.3 静電ポテンシャルから電場を求める（例題）

これまでは電場（またはそれを作る電荷）を与えて静電ポテンシャルを求めたが、今度は逆に与えられた静電ポテンシャルから電場を計算する方法を考える。先ほど、等ポテンシャル面を描いた場合に、詰まっている程電場が強いことを述べた。詰まり具合は、つまりは単位長さあたりにいくつ等ポテンシャル面が存在するか、ということ。従って直観的には等ポテンシャル面を微分するようなことを考えれば良い。

考え方 図 2.8 に示す通り、短い距離 Δs を持つ点 P と点 P' に関して、 $\overrightarrow{PP'}$ の単位ベクトルを $\vec{t}$ 、電場を $\vec{E}$ とし、点 P および点 P' の静電ポテンシャルを ϕ_P 、 $\phi_{P'}$ とすると、電荷 q に関して力の向きを注意して位置エネルギー差を計算すると

$$q\phi_{P'} - q\phi_P = (-q\vec{E} \cdot \vec{t}) \Delta s \quad (2.75)$$

であるから、

$$\phi_{P'} - \phi_P = (-\vec{E} \cdot \vec{t}) \Delta s \quad (2.76)$$

となる。よって、ポテンシャルの差 $\Delta\phi$ とし、さらに微分形に持って行くと

$$\vec{E} \cdot \vec{t} = -\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = -\frac{d\phi(s)}{ds} \quad (2.77)$$

となる。この式の言わんとするところを言い替えると、左辺は単位ベクトル $\vec{t}$ の方向の電場の大きさであり、右辺は $\vec{t}$ 方向の静電ポテンシャルの傾きを示している。すなわち、一言で言えば「静電ポテンシャルの大きさの空間に対する変化量、傾きが電場である」ということになる。

P に対する P' は勝手な向きに置いて良い。よって、P に対して x 方向に P' を置くことで電場の x 成分が計算することができる。すなわち、

$$E_x = \vec{E} \cdot \vec{i} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (2.78)$$

となる。もう少しちゃんと変数を書き下すと

$$E_x(x, y, z) = -\frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial x} \quad (2.79)$$

となる。 $E_x(x, y, z)$ は座標 (x, y, z) における電場の x 成分、という意味である。

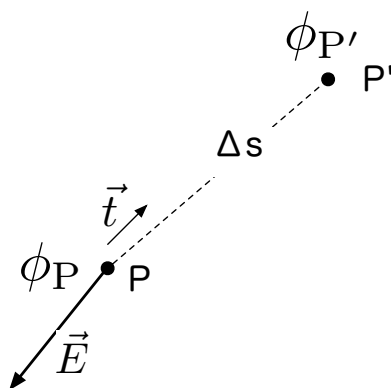


図 2.8: 静電ポテンシャルから電場分布を求める

(FY2009/4 回目: 2009/11/5 はここまで)

静電ポテンシャルから電場を計算 偏微分を使うと、静電ポテンシャルからの電場ベクトルを求める式は次の様に見える。

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(\vec{r}) = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = -\nabla\phi(\vec{r}) = -\text{grad } \phi(\vec{r}) \quad (2.80)$$

偏微分と Gradient、nabla さてここで、 $\frac{\partial}{\partial x}$ は「偏微分」と呼ばれる (偏微分の簡単な解説は、「数学に関するメモ」を参照。ここではさらに簡単な説明をする)。上記の例で示すと ϕ は x, y, z 座標の関数であるから、 $\phi(x, y, z)$ と書ける。この関数の x に関する偏微分は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} \quad (2.81)$$

を意味する。すなわち、3 つの変数のうち、残りの 2 つの変数 y と z は一定のまま触らず、 x のみを変化させた場合の ϕ の変化量、勾配ということになる。例えば、

$$\phi(x, y, z) = x^2 y^5 z^3 \quad (2.82)$$

とすると、

$$\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} = 2xy^5z^3, \quad \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} = 5x^2y^4z^3, \quad \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} = 3x^2y^5z^2 \quad (2.83)$$

となる。

偏微分を用いた関数の 1 次までの展開 偏微分を用いた関数 $f(\vec{r})$ の展開は一般に以下の様に表せる。

$$f(\vec{r}_0 + \Delta \vec{r}) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \quad (2.84)$$

$$\simeq f(x_0, y_0, z_0) + \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_0} \Delta x + \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_0} \Delta y + \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_0} \Delta z \quad (2.85)$$

変数変換 半径 r は x, y, z の 3 つの変数の関数 $r(x, y, z)$ で、関数 f は半径 r の関数 $f(r)$ だとする。関数 $f(r)$ は、半径 r だけの関数に見えるが、 r が x, y, z の 3 つの変数の関数なので、関数 $f(r)$ は実は x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ でもある。その場合、変数変換

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr} \frac{\partial r(x, y, z)}{\partial x} \quad (2.86)$$

が成立する。ここで

$$r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.87)$$

だとすると

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r} \quad (2.88)$$

と計算できる。

(FY2013/4 回目: 2013/10/31 はここまで)

ナブラ: ∇ nabla と呼ぶ ∇ という文字を導入し、

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.89)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \nabla \phi = \text{grad } \phi \quad (2.90)$$

と記述する。grad は gradient であり、スカラー量に対して ∇ を付けた場合に $\nabla \phi$ 全体を指してそう呼ぶ。

その他、偏微分に関する簡単な説明等を本講義録の最後の章の「数学に関するメモ」に記載したので、参照して欲しい。

(FY2011/3 回目: 2011/10/27 はここまで)

2.7.4 「山の高さと勾配」との類推: 等高線と gradient (勾配)

少し分かりにくければ「山の高さと勾配」を類推に考えると良いだろう (図 2.9)。勾配とは「横方向に対する高さ方向の比」である。

$$(\text{勾配}) \times (\text{歩いた水平距離}) = (\text{登った高度}) \quad (2.91)$$

であるから、山の等高線を等ポテンシャル面に類推し、勾配を電場の大きさ、勾配が最大の向きは電場及び電気力線の方
向と類推できる。

上空から見た際の位置 (x, y) での高度を $h(x, y)$ とすると、 x 方向の勾配は $\partial h / \partial x$ であり、 y 方向の勾配は $\partial h / \partial y$ と
なる。すなわち勾配のベクトルを以下のように定義することができる。

$$\overrightarrow{\text{勾配ベクトル}} = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (2.92)$$

勾配ベクトルは、 $h(x, y)$ を等高線だと考えて、もっとも急な登りの坂の方向を向いていると考えれば良い。

既に述べた通り、山の高さ $h(x, y)$ を静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ 、勾配を電場 $\vec{E}(\vec{r})$ と類推できる。山は空間2次元に対す
る値であるのに対して、静電ポテンシャルは空間3次元に対する値であることに注意すると、

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = -\nabla \phi \quad (2.93)$$

と類推できる。

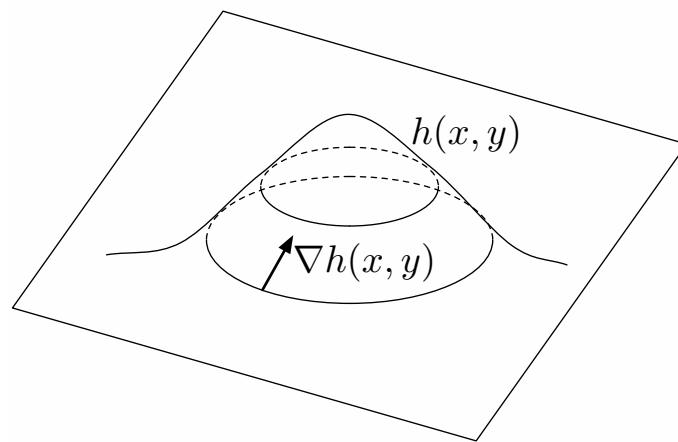


図 2.9: 山と勾配

(FY2013/5 回目: 2013/11/7 はここまで)

例題: 点電荷の場合に、静電ポテンシャルから電場を求める 原点に q_1 の電荷が置かれている場合に、 $\vec{r} = (x, y, z)$ に
作られる電場 $\vec{E}$ を求める。 ϕ は原理的には (x, y, z) の複数のパラメータで決まる関数であるが、ここでは半径 r だけに
依存する関数でもある。

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2.94)$$

これに対して、偏微分の公式を使うと

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (2.95)$$

$$(E_x, E_y, E_z) = - \left(\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{d\phi(r)}{dr}, \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d\phi(r)}{dr}, \frac{\partial r}{\partial z} \frac{d\phi(r)}{dr} \right) \quad (2.96)$$

である。

$$r = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.97)$$

なので

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \quad (2.98)$$

である。また、

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (2.99)$$

$$(2.100)$$

である。よって

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}, \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3}, \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} \right) \quad (2.101)$$

となる。

(FY2010/4 回目: 2010/10/28 はここまで)

2.8 静電エネルギー

ある分布を持つ電荷群それ自身が持つ電氣的なエネルギーのこと。位置エネルギーは、通常外の電荷が作る静電ポテンシャルによるエネルギー。ここで言う静電エネルギーは電荷群という自分の中にためこんだエネルギーのこと。混同しないように注意すること。

2.8.1 複数の電荷が持つ静電エネルギー

2 個の電荷の場合 2 つの電荷 q_1 と q_2 が距離 r_{12} 離れている場合の電氣的エネルギーについて求める。まず q_1 を固定、無限大の位置から q_2 を r_{12} の距離まで近付けることを考えると、 q_2 に対して行う仕事が電氣的エネルギーに等しくなるので、

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = q_1 \phi_2(\vec{r}_1) = q_2 \phi_1(\vec{r}_2) \quad (2.102)$$

となる。 $\vec{r}_1$ と $\vec{r}_2$ は 2 つの電荷の位置で、 $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ である。 q_2 を固定し、 q_1 を近付けた場合も全く同じである。よって、どちらをどちらに近付けたにかかわらず、この系に蓄えられた電氣的エネルギーと考えて良い。

3 個の電荷の場合 q_1 と q_2 に加え、 q_3 を置いた場合は、

$$\begin{aligned} U = U_{12} + U_{13} + U_{23} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \quad (2.103) \\ &= q_1 \phi_2(\vec{r}_1) + q_1 \phi_3(\vec{r}_1) + q_2 \phi_3(\vec{r}_2) = q_2 \phi_1(\vec{r}_2) + q_3 \phi_1(\vec{r}_3) + q_3 \phi_2(\vec{r}_3) \quad (2.104) \end{aligned}$$

となる。

n 個の電荷の場合 上記の 2 つの例からの類推で求めれば良い。順番が重要なのではなく、組合せであるということ。2 倍数えすぎないようにしなければならない。これに注意して、以下の様を書くことになる。

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i,j)} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (2.105)$$

一方、 q_i 以外の電荷が q_i に対して作る静電ポテンシャルを計算し、次に q_i を変えて全て足しあげる、という数え方も可能。その場合は、

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j(\neq i)} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (2.106)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi'_i, \quad \phi'_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j(\neq i)} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (2.107)$$

となる。この足し方だと順序で数えているので組合せの数にするために $1/2$ が必要になる。

2.8.2 連続的に分布する電荷が持つ静電エネルギー

連続的に電荷が分布している系では組合せで物事を考えるのは簡単では無いので、 n 個の時の数え方を参考にすると、

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.108)$$

となる。2重積分の形で書くと、

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' \quad (2.109)$$

2.9 電気双極子

静電ポテンシャル z 方向に d だけ離れた 2 つの点電荷 $+q$ と $-q$ がある。それぞれの位置を $(0, 0, +d/2)$ 、 $(0, 0, -d/2)$ とすると、座標 (x, y, z) での静電ポテンシャルは以下の様に書ける。

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - d/2)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z + d/2)^2]^{1/2}} \right\} \quad (2.110)$$

遠方での静電ポテンシャルと双極子モーメント 静電ポテンシャルの観測場所 (x, y, z) に比べて d は十分小さいと仮定すると、

$$\left[x^2 + y^2 + \left(z \pm \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{-1/2} \simeq (x^2 + y^2 + z^2 \pm zd)^{-1/2} \simeq (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \left(1 \mp \frac{1}{2} \frac{zd}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \quad (2.111)$$

なので、

$$\phi = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} \quad (2.112)$$

$$p = qd, \quad r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.113)$$

が得られる。 $p = qd$ は「電気双極子モーメント」と呼ぶ。さらに、一般的な方向を考えると

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.114)$$

が得られる。

(FY2009/5 回目: 2009/11/12 はここまで) (FY2011/4 回目: 2011/11/17 はここまで)

静電ポテンシャルから電場を求める 静電ポテンシャルから電場を求める式は

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi \quad (2.115)$$

である。

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r} \quad (2.117)$$

または、

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.118)$$

$$2r \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (2.120)$$

に注意して上記の偏微分を行うと、

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5} \quad (2.121)$$

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5} \quad (2.122)$$

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \quad (2.123)$$

$$p \equiv qd \quad (2.124)$$

となる。

電場を直接求める もちろん点電荷が作る電場の分布は分かっているので、静電ポテンシャルを用いず直接電場を求めることも可能である。位置 $(x, y, z \pm d/2)$ に存在する電荷 $\pm q$ が $\vec{r} = (x, y, z)$ に作る電場は

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x, y, z) - (0, 0, d/2)}{[x^2 + y^2 + (z - d/2)^2]^{3/2}} - \frac{(x, y, z) - (0, 0, -d/2)}{[x^2 + y^2 + (z + d/2)^2]^{3/2}} \right\} \quad (2.125)$$

である。

$$[x^2 + y^2 + (z \mp d/2)^2]^{-3/2} \simeq (x^2 + y^2 + z^2 \mp zd)^{-3/2} = r^{-3} \left(1 \mp \frac{zd}{r^2} \right)^{-3/2} \simeq r^{-3} \left(1 \pm \frac{3}{2} \frac{zd}{r^2} \right) \quad (2.126)$$

なので、

$$E_x(x, y, z) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5} \quad (2.127)$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5} \quad (2.128)$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5}, \quad (2.129)$$

$$p \equiv qd \quad (2.130)$$

となる。もちろん、静電ポテンシャルを用いて求めた式と一致する。

2.10 電気双極子展開、四重極子展開

2.11 遠隔作用、近接作用、電場

改めて電荷 q が q_1 より受ける力についてクーロンの法則を書くと

$$\vec{F} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (2.131)$$

と書ける。電場ベクトル $\vec{E}(\vec{r})$ を使うと

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}, \quad \vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}) \quad (2.132)$$

と書ける。式を見て少し考えよう

$$q = 0, \quad q_1 = 0 \quad (2.133)$$

の場合も

$$q = 0, \quad q_1 \neq 0 \quad (2.134)$$

の場合も力 $\vec{F} = 0$ となり同じように見えるかも知れない。しかし、実際には前者は $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ であり、後者は $\vec{E}(\vec{r}) \neq 0$ である。よって、後者の場合たまたま $\vec{r}$ の粒子の電荷量が 0 であったため、力を受けはしなかったが、「電場」を空間が

持つ性質だと思つと、それは必ずしも0ではない。すなわち、「電場」というものを実在の物理量として考えるのか、そうではなく数学上の便宜的な値であり物理量としては実在しないと考える立場もあるだろう。この2つの立場を別の言い方をすると以下の通りになる。

電荷同士に働く力は電荷同士が直接作用し合うことが本質であり、電場は単位電荷に対する作用の大きさを示す便宜的な量と考える(遠隔作用)。この考え方は可能。

一方の電荷が周りの空間の性質を変えてしまい、その変わってしまった空間的性質によって、もう一方の電荷が作用したと考えても良い。変わってしまった空間的性質がまさに電場というわけである、すなわち電場は実在すると考える(近接作用)。この考え方も可能。

時間的に変化しない電場は必ず電荷によって作られるので、2つの立場は結局静電場の範囲では区別はつかない。しかし、後に示す通り変動する磁界は電場を作ることが可能となる。すなわち、電荷が無くとも電場はできるということは、電場は電荷が無くとも存在し得る実在の物理量だと考える方が合理的だろう。

電場を直接目で見ることはできない。電荷など物質を置いてはじめて認識可能である。電荷が無い状態を「真空」と呼ぶわけだが、この真空は、何も存在しないように見えてもそれは人間の目に直接見えないだけかも知れない。「真空」が何もない空虚ではなく「電場」のような何かの性質を持っていたとしても全く不思議ではない。

今の物理学は近接作用を考えるのが主流である。すなわち「電場」というものを実在の物理量としてとらえる考え方である。電荷1と電荷2は直接お互いに作用するのではない。電荷1は存在することでその周りの空間の性質を変えてしまう。これは電荷2があろうが無かろうが関係ない。たまたま存在する電荷2は、電荷1が作った空間的な性質のために力を受けてしまった。

この電場同様の空間の性質を一般に「場」と呼ぶ。

第3章 静電場の微分法則

3.1 ガウスの法則の微分形

3.1.1 導出

ガウスの法則は

$$\int_V \rho(\vec{r}) dV = \int_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS, \text{ or } \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} dV = \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \quad (3.1)$$

であった。この式を図 3.1 に示す、微小な直方体に適用してみよう。辺の長さは x, y, z 軸方向にそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ である。よって左辺は非常に簡単で、

$$\int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} dV = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \Delta V \quad (3.2)$$

となる。ここで、

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3.3)$$

は微小直方体の体積である。

右辺は直方体の 6 つの面でそれぞれ $\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})$ を計算し、それを合計をすることになる。まずは x 軸に垂直な A 面と A' 面について求める。 A 面について

$$\vec{n}(x, y, z) = (-1, 0, 0) \quad (3.4)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z = -E_x(x, y, z) \quad (3.5)$$

となる。よって、 A 面の面積を掛けると

$$\int_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = -E_x(x, y, z) \Delta y \Delta z \quad (3.6)$$

となる。 A' 面に関しては、

$$\vec{n}(x + \Delta x, y, z) = (1, 0, 0) \quad (3.7)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z = E_x(x + \Delta x, y, z) \quad (3.8)$$

$$\int_{A'} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = E_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z \quad (3.9)$$

となる。 A 面と A' 面を合計すると、

$$\int_{A+A'} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \{E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)\} \Delta y \Delta z \quad (3.10)$$

$$= \frac{E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)}{\Delta x} \Delta V \quad (3.11)$$

となる。 y 軸方向に垂直な B 面、 B' 面、および z 軸方向に垂直な C 面、 C' 面も同様に計算できる。

$$\int_{B+B'} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \frac{E_y(x, y + \Delta y, z) - E_y(x, y, z)}{\Delta y} \Delta V \quad (3.12)$$

$$\int_{C+C'} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \frac{E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z)}{\Delta z} \Delta V \quad (3.13)$$

結局、右辺は

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \int_{A+A'} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \int_{B+B'} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \int_{C+C'} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \quad (3.14)$$

$$= \frac{E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)}{\Delta x} \Delta V \quad (3.15)$$

$$+ \frac{E_y(x, y + \Delta y, z) - E_y(x, y, z)}{\Delta y} \Delta V \quad (3.16)$$

$$+ \frac{E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z)}{\Delta z} \Delta V \quad (3.17)$$

となる。右辺と左辺は等しく、また ΔV は共通なのでこれを落すと

$$\int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} dV = \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \quad (3.18)$$

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \frac{E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)}{\Delta x} \quad (3.19)$$

$$+ \frac{E_y(x, y + \Delta y, z) - E_y(x, y, z)}{\Delta y} \quad (3.20)$$

$$+ \frac{E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z)}{\Delta z} \quad (3.21)$$

となる。ここで $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$ の極限を取ると、

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (3.22)$$

が得られる。 ∇ を使ってこれを書くと

$$\rho(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) \quad , \text{ or } \quad \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (3.23)$$

となる。これが微分形のガウスの法則である。 $\nabla \cdot$ のことを div (Diversence 発散) を使って

$$\rho(\vec{r}) = \text{div} \vec{D}(\vec{r}) \quad , \text{ or } \quad \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \text{div} \vec{E}(\vec{r}) \quad (3.24)$$

と書くこともある。ここでは x, y, z 軸方向に辺を持つ直方体を考えたが、任意の形の領域は、小さな直方体を組み合わせることによって再現が可能である。

微小直方体内部に電荷が無い場合でも、 x, y, z 軸方向それぞれの電気力線の数に変化しても良い。電気力線は曲がって、 x 軸に進んでいた電気力線が y 軸方向へ向きを変えても良い。しかし、その変化の合計は常に 0 であることを意味する。すなわち、新たに電気力線がわきだしたり、吸い込まれたりはない、ということであり、これは電荷が 0 であることとコンシステント。

一方、この式は電気力線の数の変化を数えることで、「その場所に」存在する電荷量を知ることができることを意味している。積分形のガウスの法則は、積分する領域のどこにあるかまでは特定はできない。

3.1.2 微分形のガウスの法則の意味 (div の意味)

微分形のガウスの法則を 2 次元で考える。

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \quad (3.25)$$

図 3.2 の左は y 軸方向に揃った一様な電場が存在している。この場合、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (3.26)$$

である。よって、

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (3.27)$$

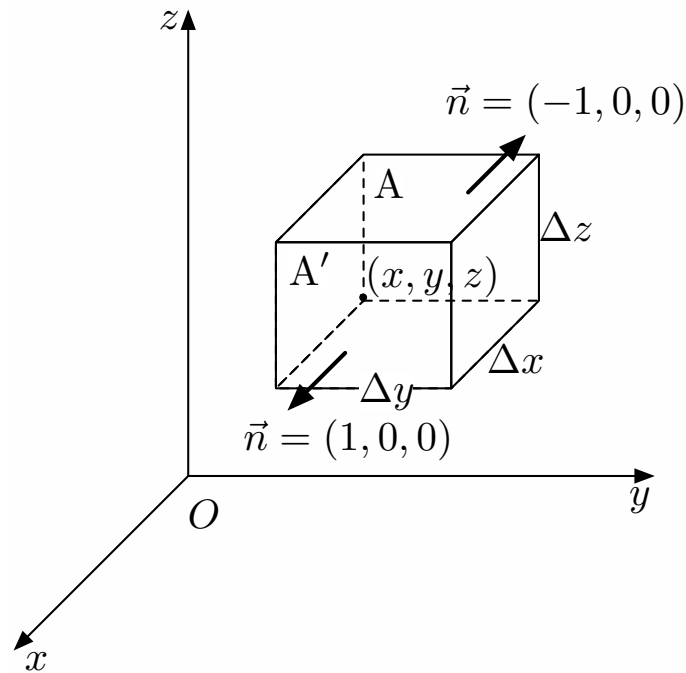


図 3.1: 微小な直方体とガウスの法則

となる。

一様ではなく徐々に発散して行く電場の場合は、図 3.2 の中となる。この場合は、

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} < 0 \quad (3.28)$$

であるのに対し、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} > 0 \quad (3.29)$$

となる。しかし、 E_y が減った分が E_x が増えているため、両者を合計するとキャンセルされる。すなわち

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} \quad (3.30)$$

$$\nabla \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (3.31)$$

となる。

図 3.2 は、電荷があるために

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} > 0 \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} > 0 \quad (3.32)$$

$$\nabla \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} > 0 \quad (3.33)$$

となる。

(FY2009/6 回目: 2009/11/19 はここまで)

3.2 2 番目の基本法則 (渦無しの法則) の微分形

渦無しの法則 (2 番目の基本法則) は以下の通りである。

$$\oint_C (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = 0 \quad (3.34)$$

これを微分形にする。

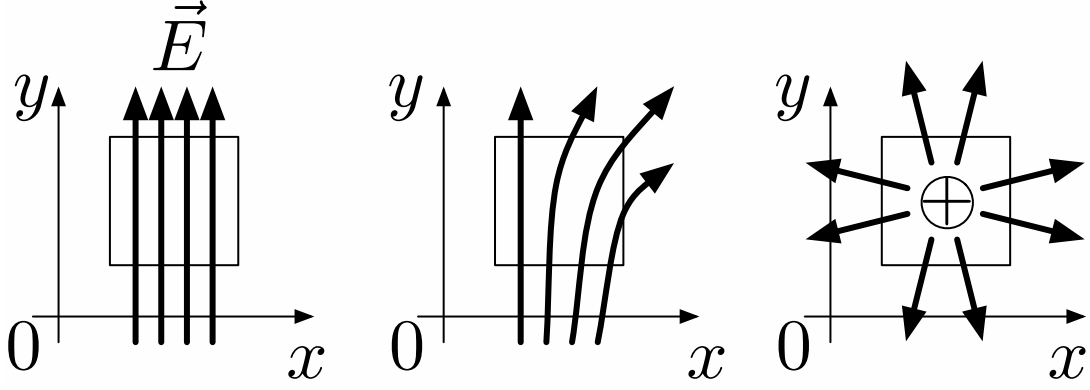


図 3.2: 左: 一様な電場。中: 湧き出しは無いが広がって行く電場。右: 湧き出しのある電場

x 軸に垂直な微小長方形 図 3.3 に示す、 x 軸に垂直な長方形 PQRS について、渦無しの法則を適用する。

$P \rightarrow Q$ の区間では、 s として $\vec{t}$ に沿って P を起点として Q 方向へ座標を取ると

$$\vec{t} = (0, 1, 0) \quad (3.35)$$

$$\int_0^{\Delta y} \vec{E}(x, y+s, z) \cdot \vec{t} ds = \int_0^{\Delta y} E_y(x, y+s, z) ds \quad (3.36)$$

となる。

一方、 $R \rightarrow S$ の区間では、 s として $\vec{t}$ に沿って R を起点として S 方向へ座標を取ると

$$\vec{t} = (0, -1, 0) \quad (3.37)$$

$$\int_0^{\Delta y} \vec{E}(x, y+\Delta y-s, z+\Delta z) \cdot \vec{t} ds = - \int_0^{\Delta y} E_y(x, y+\Delta y-s, z+\Delta z) ds \quad (3.38)$$

となる。 $y+\Delta y-s = y+s'$ として変数変換をすると、 $\Delta y-s = s'$ 、 $ds = -ds'$ 、 $s: 0 \rightarrow \Delta y$ 、 $s': \Delta y \rightarrow 0$ なので

$$- \int_0^{\Delta y} E_y(x, y+s', z+\Delta z) ds' \quad (3.39)$$

となる。 s' を改めて s と書いた上で、 $P \rightarrow Q$ と $R \rightarrow S$ の足し算を行うと、

$$\int_{PQ+RS} \vec{E} \cdot \vec{t} ds = \int_0^{\Delta y} E_y(x, y+s, z) - E_y(x, y+s, z+\Delta z) ds \quad (3.40)$$

となる。 s および Δz は小さい値なので、積分の中身を偏微分を用いて展開すると、

$$= \int_0^{\Delta y} \left[E_y(x, y, z) + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} s \right] - \left[E_y(x, y, z) + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} s + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial z} \Delta z \right] ds \quad (3.41)$$

$$= \int_0^{\Delta y} - \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial z} \Delta z ds \quad (3.42)$$

となる。(FY2013/6 回目: 2013/11/28 はここまで) もはや、積分の中身には変数 s がなくなったので、積分は単純に Δy をかけ算するだけとなる。最終的に $P \rightarrow Q$ と $R \rightarrow S$ の区間では、

$$\int_{PQ+RS} \vec{E} \cdot \vec{t} ds = - \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial z} \Delta z \Delta y \quad (3.43)$$

となる。

同様に、 $Q \rightarrow R$ の区間と $S \rightarrow P$ は

$$\int_{QR+SP} \vec{E} \cdot \vec{t} ds = \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial y} \Delta z \Delta y \quad (3.44)$$

となる。

(FY2010/5 回目: 2010/11/11 はここまで)

両者を足し合わせ、 $\Delta y \Delta z = \Delta S_x$ がこの微小長方形の面積であることに注意すると

$$\oint_{\Delta S_x} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = \left(\frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial z} \right) \Delta S_x \quad (3.45)$$

となる。

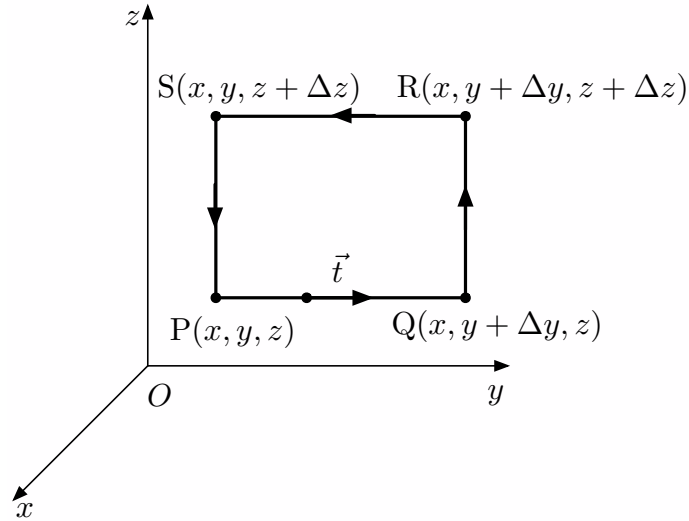


図 3.3: 微小な長方形と渦無しの法則

x, y, z 軸をまとめる x 軸に垂直な微小長方形と同様に、 y 軸、 z 軸に垂直な微小長方形についても全く同じ議論を行うことが可能である。その結果、

$$\oint_{\Delta S_y} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = \left(\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial x} \right) \Delta S_y \quad (3.46)$$

$$\oint_{\Delta S_z} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = \left(\frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial y} \right) \Delta S_z \quad (3.47)$$

渦無しの法則は一般に

$$\oint_C (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = 0 \quad (3.48)$$

なので、これを満たすには $\Delta S_{x,y,z}$ の値にかかわらずそれぞれの積分の値が 0 である必要がある。よって、

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.49)$$

が成立する。この 3 つの式をまとめて、以下のように書く。これが微分形の渦無しの法則である。

$$\nabla \otimes \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \otimes (E_x, E_y, E_z) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.50)$$

$$\text{rot} \vec{E} = \text{curl} \vec{E} = 0 \quad (3.51)$$

3.2.1 渦無しの法則の意味 (rot の意味)

rot は流れの中に置いた水車の回転を考えれば理解できる。

図 3.4 の左図は、 y 軸に沿った方向に流れ $\vec{E}$ があり、その速度は x 座標が大きい程速くなる場合を示している。

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} > 0 \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (3.53)$$

となる。この中に水車を置くと、水車は右回りにトルクを受け、その大きさは

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} > 0 \quad (3.54)$$

となる。

一方、図 3.4 の右は y 軸方向にも流れの成分を持つ場合を考えている。この場合、 x 軸方向への流れから受けるトルクと y 軸方向への流れから受けるトルクの大きさは等しい。すなわち、

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} > 0 \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} > 0 \quad (3.56)$$

となる。水車へのトルクはこの 2 つの合計なので

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (3.57)$$

となる。すなわちこの場合はトルクが 0 であり水車は回転しない。

つまり、

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (3.58)$$

の値は、流れの中に z 軸方向に軸を持つ水車がトルクを受けて回転するかどうか、その大きさを意味していることになる。ということは、一般に

$$\text{rot} \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (3.59)$$

は、それぞれの軸方向での水車のトルクの大きさを意味する。すなわち、流れの中に渦があれば、その軸方向とその大きさを示していることになる。

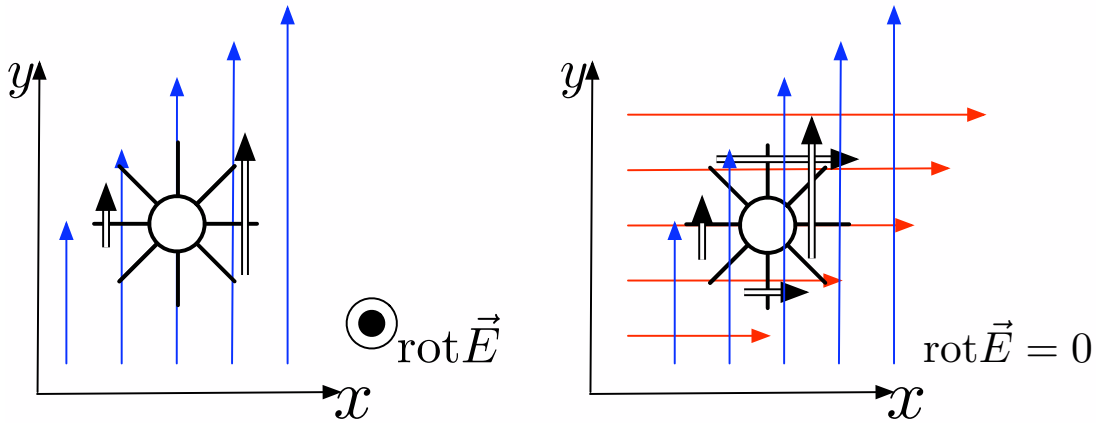


図 3.4: 左: y 軸方向へのみの流れ。右: x 軸方向および y 軸方向の両方の成分を持つ。

3.3 ガウスの定理とストークスの定理 (数学)

3.3.1 積分の公式

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a) \quad (3.60)$$

ある関数 $f(x)$ の微分の積分は、積分範囲の両端での $f(x)$ の値で表される。

3.3.2 線積分

$$\int_{OP} \vec{F} \cdot \vec{tds} \quad (3.61)$$

のことを線積分と呼ぶ。

3.3.3 ガウスの定理 (数学)

ガウスの法則 (積分形) は

$$\int_S (\vec{D} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \rho dV \quad (3.62)$$

であった。一方、ガウスの法則 (微分形) は

$$\rho = \nabla \cdot \vec{D} \quad (3.63)$$

である。微分形を積分形に代入し、 ρ を消すと

$$\int_S (\vec{D} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \nabla \cdot \vec{D} dV \quad (3.64)$$

が得られる。実はこれはベクトル場に対して数学的に一般的に成立する式であり、「ガウスの定理」と呼ばれる。すなわち、一般のベクトル場 $\vec{F}$ に対して、閉曲面 S に囲まれた領域 V について以下の式が成立する。

$$\int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV \quad (3.65)$$

ちなみに「ガウスの法則」は物理学の法則。「ガウスの定理」は数学上の定理。別物なので、混同しないように。

3.3.4 ストークスの定理 (数学)

渦無しの法則の微分形を導く途中で

$$\oint_{\Delta S_x} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = \left(\frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial z} \right) \Delta S_x \quad (3.66)$$

$$\oint_{\Delta S_y} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = \left(\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial x} \right) \Delta S_y \quad (3.67)$$

$$\oint_{\Delta S_z} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = \left(\frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial y} \right) \Delta S_z \quad (3.68)$$

なる式が導かれた。 x, y, z 軸のいずれについても成立している。よって、座標のとりかたによらずに一般に

$$\oint_{\Delta S} (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = \left\{ (\nabla \otimes \vec{E}) \cdot \vec{n} \right\} \Delta S \quad (3.69)$$

と言える。 $\vec{n}$ は面 dS に垂直な単位ベクトルである。

ΔS に隣接する $\Delta S'$ を足すことを考える。左辺の線積分のうち経路が接する部分に関してはプラスマイナスで消えてしまう。よって、左辺は ΔS と $\Delta S'$ を合体した経路で線積分を行えば良いことになる。同様に幾つ合体させても、この結論は変わらない。その結論は微小な面積 ΔS を積分したものとして扱うことができる。また、合体させる微小面積も元の面と必ずしも同じ平面上にある必要は無い。よって、閉曲線 C に囲まれた曲面 S に関して以下の式が成立する。

$$\oint_C (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r})) ds = \int_S \left\{ (\nabla \otimes \vec{E}) \cdot \vec{n} \right\} dS \quad (3.70)$$

物理学の渦無しの法則では、このうち左辺が 0 になるので右辺も 0 になってしまうのだが、数学的にはこの式自体が一般的に成立し、「ストークスの定理」と呼ばれる。すなわち、一般のベクトル場 $\vec{F}$ に対して、閉曲線 C に囲まれた曲面 S について以下の式が成立する。

$$\oint_C \left\{ \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) \right\} ds = \int_S \left\{ (\nabla \otimes \vec{F}(\vec{r})) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \right\} dS \quad (3.71)$$

(FY2011/5 回目: 2011/12/1 はここまで)

3.4 ポアソンの方程式

3.4.1 渦無しの法則と静電ポテンシャルの関係

電場を静電ポテンシャルで書き表すことができる。そこで、渦無しの法則の電場の部分を静電ポテンシャルを代入し、静電ポテンシャルを使って渦無しの法則を書いてみる。すなわち、電場から静電ポテンシャルを求める式 (3.109) を渦無しの法則の式 (3.108) に代入する。

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (3.72)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times (\nabla\phi) \quad (3.73)$$

この x 成分は以下のように書ける。

$$\left\{ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \right\}_x = \frac{\partial E_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial E_y(\vec{r})}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z} \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y} \right\} = -\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z\partial y} \quad (3.74)$$

偏微分は、微分する順番を入れ換えても結果は変わらないので、

$$\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z\partial y} \quad (3.75)$$

である。よって、恒等的に

$$\left\{ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \right\}_x = 0 \quad (3.76)$$

となる。 y および z 成分も同様であり 0 となる。

ここで分かったことは、静電ポテンシャルは $\vec{E} = -\nabla\phi$ の形を持つので、渦無しの法則 $\nabla \times \vec{E} = 0$ を自動的に満たすということである。これはある意味当たり前で、渦無しの法則と静電ポテンシャルから電場を求める式はいずれも、クーロン力は「保存力」であるという事実から出発しているからである。

また、数学的には

$$\nabla \times \nabla\phi = 0 \quad (3.77)$$

が成り立つので、数学としては当たり前と言えは当たり前である。しかし、その当たり前が物理の静電ポテンシャル ϕ について成立するということは物理として ϕ はそういう性質を持つ、という意味である。

3.4.2 ポアソンの方程式: ガウスの法則と静電ポテンシャル

ガウスの法則は、電場から電荷分布を求める式である。電場は静電ポテンシャルで表すことができるから、ガウスの法則の電荷分布を静電ポテンシャルを使って書いてみよう。すなわち、電場 $\vec{E}$ から電荷分布 ρ を求める式であるガウスの法則の式 (3.104) に、静電ポテンシャル ϕ から電場 $\vec{E}$ を求める式 (3.109) を代入する。

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon} = \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \cdot (\nabla\phi(\vec{r})) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}, \frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z} \right) \quad (3.78)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z} \right\} \quad (3.79)$$

$$= -\left\{ \frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2} \right\} \quad (3.80)$$

となる。ラプラシアン (Laplacian) という微分演算子 ∇^2 を

$$\nabla^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \nabla \cdot \nabla = \Delta \quad (3.81)$$

を使うと、

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = -\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\Delta\phi(\vec{r}) \quad (3.82)$$

が得られる。この式をポアソンの方程式 (Poisson's equation) と呼ぶ。電荷が存在しない真空中ではポアソンの方程式は

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0 \quad (3.83)$$

となる。これを特にラプラスの方程式 (Laplace's equation) と呼ぶ。

3.4.3 (例題) ポアソン方程式の解の例その 1

半径 R の球内に密度 ρ で一様に分布した電荷による静電ポテンシャルをポアソン方程式を用いて求める。電荷の分布は

$$\rho(\vec{r}) = \rho \quad (|\vec{r}| < R), \quad (3.84)$$

$$= 0 \quad (|\vec{r}| > R) \quad (3.85)$$

である。電荷の分布が球対称なのでポアソン方程式を解いて得られる静電ポテンシャルも球対称になることは自明である。よって、

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.86)$$

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (3.88)$$

であることに注意すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{x}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} \quad (3.90)$$

となる。他の座標 y, z に関しても同様に計算できるので、

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (3.91)$$

$$= \frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} = \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] \quad (3.92)$$

となる。よって、ポアソン方程式は

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (r < R) \quad (3.93)$$

$$= 0 \quad (r > R) \quad (3.94)$$

となる。電荷分布が無限大になる場所以外では、静電ポテンシャルと電場は連続的に変化する。境界条件として以下の 4 つを与える。

$$r \rightarrow \infty \text{ の時に } \phi(r) \rightarrow 0 \quad (3.95)$$

$$r = 0 \text{ で } \phi(r) \text{ が連続} \quad (3.96)$$

$$r = R \text{ で } \phi(r) \text{ が連続} \quad (3.97)$$

$$r = R \text{ で } \frac{d\phi(r)}{dr} \text{ が連続} \quad (3.98)$$

この条件の元に上記の微分方程式を解くと

$$\phi(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 \quad (r < R) \quad (3.99)$$

$$= \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \quad (r > R) \quad (3.100)$$

が得られる。

3.4.4 ポアソン方程式の解の例その 2

(pn 接合 TBW)

3.5 電荷、電場、静電ポテンシャルの関係と基礎方程式のまとめ

これまで得られた基礎方程式をまとめておく。ここまですべて重要な3つの量、すなわち電荷分布、電場ベクトル、静電ポテンシャルが登場し、お互いの関係と計算の仕方について議論して来た。3つの関係を図3.5にまとめる。

電場と静電気力の関係

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV' \quad (3.101)$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (3.102)$$

電荷と電場の関係: ガウスの法則

$$\int_V \rho dV = \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS \quad (3.103)$$

$$\rho = \nabla \cdot \vec{D} \quad (3.104)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (3.105)$$

ガウス法則は実は、電場や電荷分布が時間変化する場合も成立する。すなわち、

$$\rho(\vec{r}, t) = \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) \quad (3.106)$$

である。

渦無しの法則

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{t} ds = 0 \quad (3.107)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (3.108)$$

渦無しの法則は、電場や電荷分布が時間変化しない場合には成立しない。

電場と静電ポテンシャルの関係

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (3.109)$$

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{OP} \left(\vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{t}(\vec{r}') \right) ds' \quad (3.110)$$

ただし、式3.110では点Oが静電ポテンシャルの原点である。すなわち $\phi_O = 0$

静電ポテンシャルと電荷の関係

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.111)$$

$$\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = -\nabla^2 \phi(\vec{r}) \quad (\text{ポアソンの方程式}) \quad (3.112)$$

位置エネルギーと静電ポテンシャル

$$U(\vec{r}) = q\phi(\vec{r}) \quad (3.113)$$

(FY2009/7回目: 2009/11/26 はここまで)

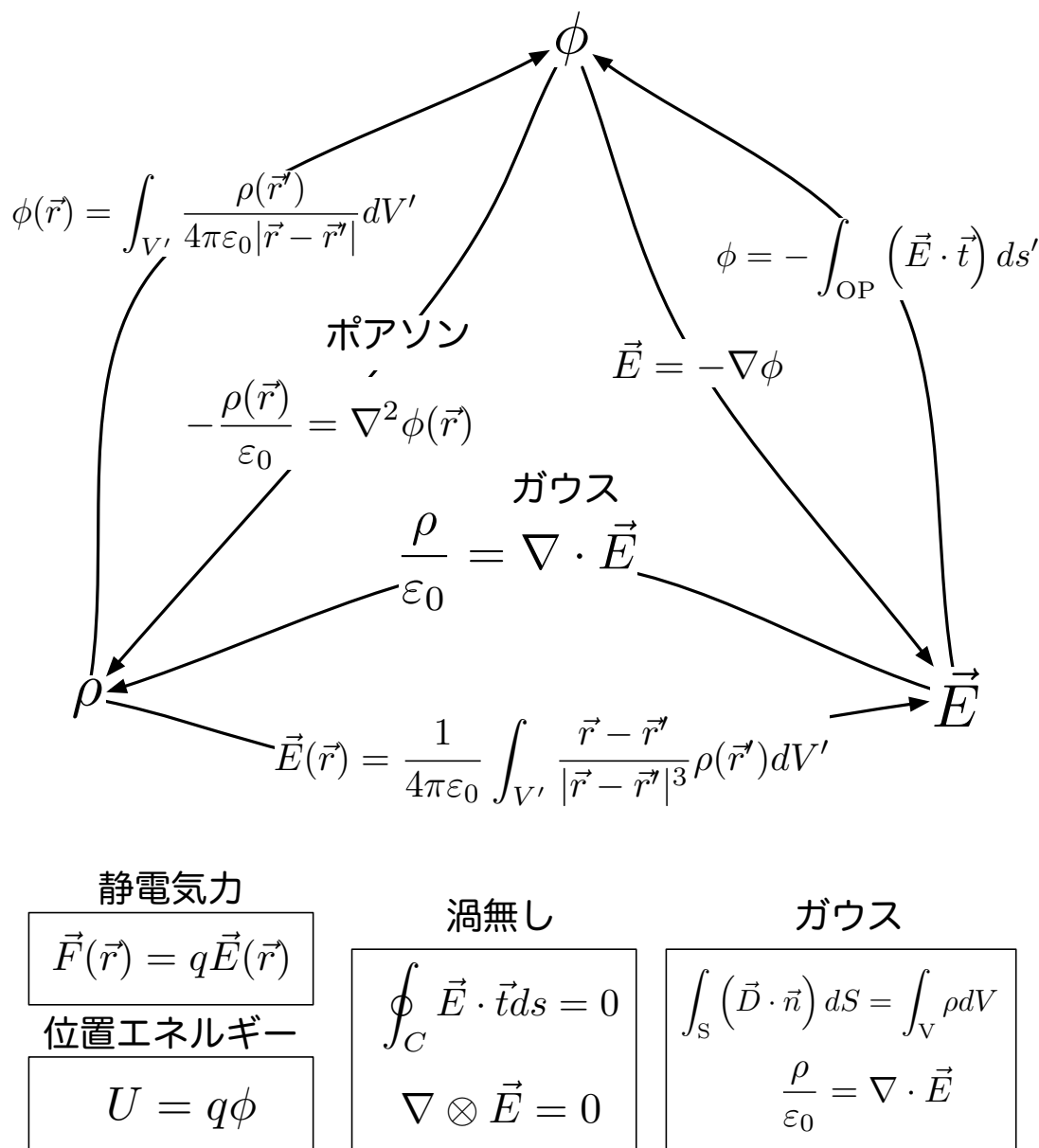


図 3.5: ρ 、 $\vec{E}$ 、 ϕ の 3 つの関係。ガウス法則は、電場や電荷分布が時間変化する場合も成立する。渦無しの法則は、電場や電荷分布が時間変化しない場合には成立しない。

第4章 導体と静電場

4.1 導体

4.1.1 導体と絶縁体

物質には電気を伝える導体と、伝えない絶縁体がある(また両者の中間の性質で半導体と呼ばれる物質もある)。導体にはその中に自由に動くことのできる電荷である自由電荷が存在する。導体に外から電荷を加えたり、静電場中に置くことで、自由電荷のために導体の電荷分布や導体の周囲の電場は特徴的な性質を示す。

導体の代表が金属である。導体＝いわゆる固体金属、という訳ではない。例えば電離した気体(プラズマ)や、電解液も導体である。電気の伝え方はほとんどの場合、マイナスの電荷である電子が担う。一方、マイナスの電子に対してプラスの電荷を持つイオンは固定されている。気体や液体の場合のイオンや陽子は移動は可能だが質量が大きいののでゆっくりとしか移動しない。

金属の場合は、そもそも何も無ければ電氣的には中性である。しかし、何かの理由でマイナスの電荷を持つ電子が移動した場合、移動先でマイナスの電荷が生じるように見えると共に、その移動した後に残される原子はイオンとなりプラスの電気が新たに生じるように見える。これにより巨視的には、マイナスの電荷とプラスの電荷が自由に移動しているように見えるのである。

(FY2010/6 回目: 2010/11/18 はここまで)

(FY2013/7 回目: 2013/12/05 はここまで)

4.1.2 誘導電荷と電場

導体球を静電場中に置くことを考える。導体内の自由電荷は外から与えられた電場から力を受けて移動するが、やがて図 4.1 のような電荷分布と電場の状態になったところで落ち着く。この状態に誘導されることを静電誘導、誘導されて生ずる電荷を誘導電荷と呼ぶ。図 4.1 の電場は図 4.2 で示されるように、外部から加えられる一様な電場と、誘導電荷が作る電場の合計である。一般に導体は以下の性質を持つことになる。

- (1) 外部から電場が与えられると、導体内では誘導電荷が生ずる。電荷は以下の条件を満たすように配置される。
- (2) 導体内の電場は 0 となる(もしも電場が存在すると新たに電荷が移動してしまう)。従って、導体内の電位は同じである(電位差はない)。
- (3) 誘導電荷は全て導体表面に分布し、導体表面より内側は電氣的に中性である。これは導体内部の電場が 0 であることから自明。
- (4) 導体表面では導体の面に平行な電場の成分は 0 である。すなわち、電場の方向は導体表面に垂直方向である(もしも導体面に平行な電場の成分が存在すると、導体表面の電荷が移動してしまう)。
- (5) 導体球の外の電場は、元々外部から与えられた電場に、導体球中に誘導された電荷が作る電場が足された形となる。

4.1.3 表面電荷と電場の関係

図 4.3 に示す通り、導体表面を含む小さな体積でガウスの法則を適用すると、その小さな体積から生ずる電気力線は全てその導体面上に(のみ)存在する電荷に由来し、その方向は導体面に垂直にそろっている。よって、導体表面におけ

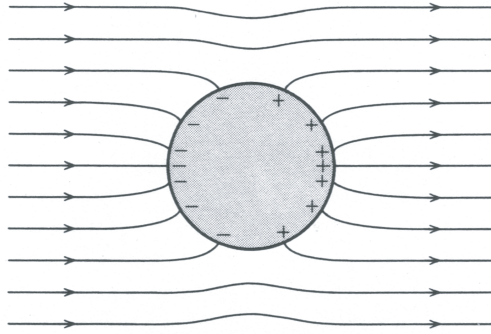


図 4.1: 一様静電場中に導体球を置いた場合の電気力線。

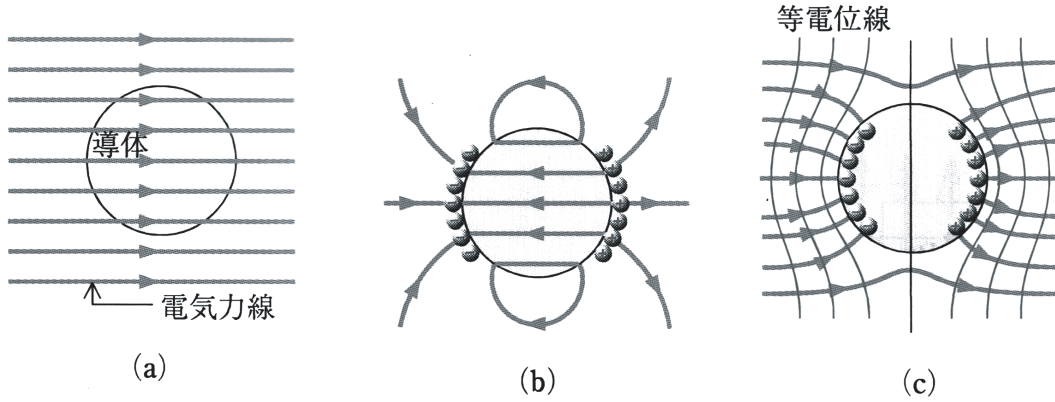


図 4.2: 一様電場中に導体球を置いた場合の静電誘導。(a) 外部から加わる電場、(b) 導体表面に誘起される電荷が作る電場、(c) 両者の合計の電場とそれが作る等電位面。

るガウスの法則は以下のように書くことができる。

$$\int_S \{ \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (4.1)$$

$$E \Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \Delta S \quad (4.2)$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (4.3)$$

ここで $\sigma(\vec{r})$ は電荷の面密度であり単位は $[\text{C}/\text{m}^2]$ となる。より一般には、導体表面の位置 $\vec{r}$ に対して、面の垂直な向きの単位ベクトルを $\vec{n}(\vec{r})$ とすると、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma(\vec{r}) \vec{n}(\vec{r}) \quad (4.4)$$

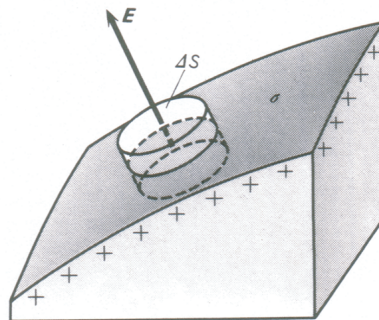


図 4.3: 導体表面にガウスの法則を適用する場合に得られる電場と表面電荷の関係。

4.1.4 静電遮蔽

これまでは導体の塊とその内部を考えた。導体が殻状であった場合、外部から電場を加えても、殻の部分で生ずる誘導電荷により殻内部ではやはり電場はキャンセルされる。よって、殻の内部の電場は 0 であり、電位も同じである。これを静電遮蔽、静電シールドと呼ばれる。静電シールドの原理は電気機器のシャーシで良く見られる。

(FY2011/6 回目: 2011/12/8 はここまで)

4.2 コンデンサー

4.2.1 電気容量の定義と一般型のコンデンサー

導体を帯電させると、電荷がお互いに反発し合うので、1 個の導体に大きな電荷量を蓄えるのは難しい。しかし、2 つの導体を近付けておき、それらに正負の等量の電荷を与えると、お互いの電荷が引き合うので、大きな電荷を蓄積することが可能となる。これをコンデンサーまたはキャパシターと呼ぶ。一般の形は図 4.4 である。導体間の電位差を 1V 上昇させるのに必要な電荷量をもって、コンデンサーの電気容量と呼ぶ。

$$C = \frac{Q}{V} \quad (4.5)$$

電気容量の単位は F(ファラッド) である。電気容量は実は電気回路で最も良く使われる単位の 1 つであるが、一般には 1[F] 程度の容量は極めて大きな値であり、そのようなコンデンサーというのはまれである。一般的には [pF]、[nF]、[μF] という単位がよく使われる。

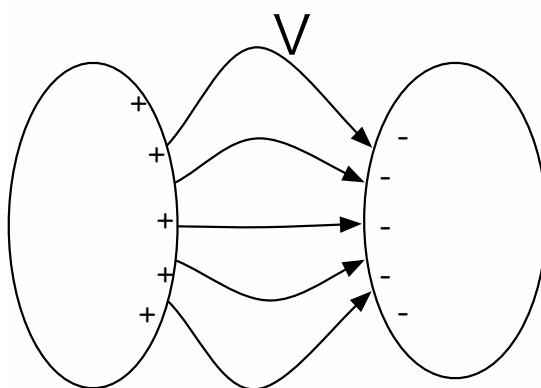


図 4.4: 一般の形のコンデンサー

4.2.2 並行平板コンデンサー

平行平板コンデンサーに対して、表面電荷と電場の関係式

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{r}) \vec{n}(\vec{r}) \quad (4.6)$$

を適用すると、コンデンサーの至るところで、

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.7)$$

が得られる。電場と静電ポテンシャルとの一般的な関係は

$$\phi = \int (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds \quad (4.8)$$

なので、厚み d の平行平板コンデンサーでは

$$\phi = \int_0^d E ds = Ed \quad (4.9)$$

となる。電気的には ϕ は電位差 V と書き、 $Q = S\sigma$ であること使うと、

$$V = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Qd}{S} \quad (4.10)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (4.11)$$

となる。

4.2.3 (例題) 並行平板コンデンサーの例

$d = 0.1\text{mm}$ (髪の毛の太さ) のすき間で $C = 1\text{F}$ のコンデンサーを作るためには、

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (4.12)$$

$$S = \frac{Cd}{\varepsilon} = \frac{1 \times 0.1 \times 10^{-3}}{8.84 \times 10^{-12}} = (3\text{km})^2 \quad (4.13)$$

が必要である。すなわち、1F という単位は使いにくいので、実用上

$$1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F} \quad (4.14)$$

$$1\text{pF} = 10^{-12}\text{F} \quad (4.15)$$

$$(4.16)$$

などの単位を使用する。

コンデンサーの一つの性能は、どれだけ大きな電荷量を蓄えられるか、である。そのために様々な工夫がされている。「電解コンデンサー」や「電気二重層コンデンサー」を google して、その構造を調べてみて欲しい。

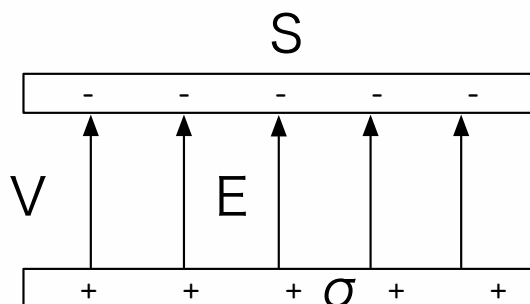


図 4.5: 平行平板コンデンサー

(FY2009/8 回目: 2009/12/3 はここまで)

4.2.4 コンデンサーに蓄えられるエネルギー

現在電荷量 q を蓄えたコンデンサー (容量 C) について、微小な電荷量 dq をマイナス側からプラス側の電極へ運ぶ場合に必要な仕事 dW は、

$$dW = Vdq = \frac{q}{C} dq \quad (4.17)$$

となる。よって、電荷量を $0 \rightarrow Q$ まで増やした場合に必要な仕事量は

$$W = \int dW = \int_0^Q Vdq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.18)$$

となる。この仕事は全てコンデンサーに電氣的に蓄えられ、静電エネルギーと呼ぶ。これを U_e と書くと

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.19)$$

となる。

4.2.5 静電場のエネルギー

ところで、このエネルギーは平行平板上にあるようにも見えるが、実際には平行平板間に、電場の形で蓄えられている。電極を外界と切り離して電荷を蓄えた平板コンデンサーの2つの電極を引き離すことを考える。両者には静電気力が働くので引き離すには仕事が必要である。行われた仕事はエネルギーとして蓄えられることになる(2つのコンデンサーに蓄えられたエネルギーを計算すると、その差に一致する)。一方で、電極だけ見た場合は電荷量にも力にも静電場にも変化はない。よって、どこにエネルギーが蓄えられたか、というと、近接力の立場からは2つのコンデンサーで唯一違う静電場の占める体積に蓄えられたと考えるのが自然であろう。静電場自身がエネルギーを持つという結論は、いずれ電磁波がエネルギーを持つことでも確認できる。

平行平板の面積を S とすると、電場の強さとコンデンサーの容量は

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad (4.20)$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (4.21)$$

と書ける。(FY2013/8 回目: 2013/12/12 はここまで) これを使って先程の静電エネルギーの式の Q と C を消すと

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} E^2 \varepsilon_0^2 S^2 \frac{d}{\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 S d = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 v, \quad (4.22)$$

$$v \equiv S d \quad \text{コンデンサーの体積} \quad (4.23)$$

と書ける。すなわち、電場 E は単位体積あたり

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2 \varepsilon_0} D^2 = \frac{1}{2} E D \quad (4.24)$$

の静電エネルギーが電場の形で蓄えられていると理解して良い。これを静電場のエネルギーと呼ぶことにする。

任意の体積 V に蓄えられている静電場のエネルギーは

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{E}^2(\vec{r}) dV \quad (4.25)$$

となる。

4.2.6 (例題) 円筒形コンデンサー

内径 a 、外径 b 、長さ l の円筒形コンデンサーの静電容量を求める。単位長さあたり λ の電荷 (内側が $+\lambda$ 、外側が $-\lambda$) があつた場合、半径 r での電場の大きさは

$$E(r) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0 2\pi r l} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \frac{1}{2\pi r} \quad (4.26)$$

となる。方向は内側から外側に向かう。外側部分を 0 とした静電ポテンシャルは

$$\phi(r) = - \int_b^r \vec{E} \cdot \vec{t} ds = \int_r^b E(r) dr = \int_r^b \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \frac{1}{2\pi r} dr = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} [\ln r]_r^b = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \left(\frac{b}{r} \right) \quad (4.27)$$

である。両方の電極の電圧差は静電ポテンシャルの差であるから、もちろん

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (4.28)$$

となる。電極に蓄えられた総電荷量は $Q = \lambda l$ なので、

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln(b/a)} \quad (4.29)$$

となる。

4.3 導体平面と点電荷 (鏡像法)

(FY2010/7 回目: 2010/11/25 はここまで)

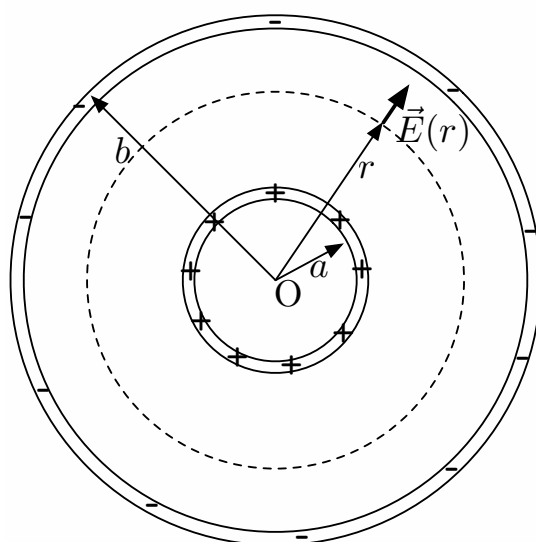


図 4.6: 円筒状のコンデンサー

第5章 定常電流の性質

5.1 定常電流と電荷保存則

5.1.1 電流と電流密度

電流 I は任意面積の断面を垂直に単位時間あたりに通過する電荷量のことを言う。単位は $[A] = [C/sec]$ である。さらに、単位面積の断面を垂直に通過する電流の大きさを、電流密度 i と呼ぶ。ある面 S について、この面に垂直な単位ベクトルを $\vec{n}$ とし、そこを流れる電流密度ベクトルを $\vec{i}$ $[A/m^2]$ とすると、面 S を積分した電流 I は

$$I = \int_S \vec{i}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \quad (5.1)$$

となる。

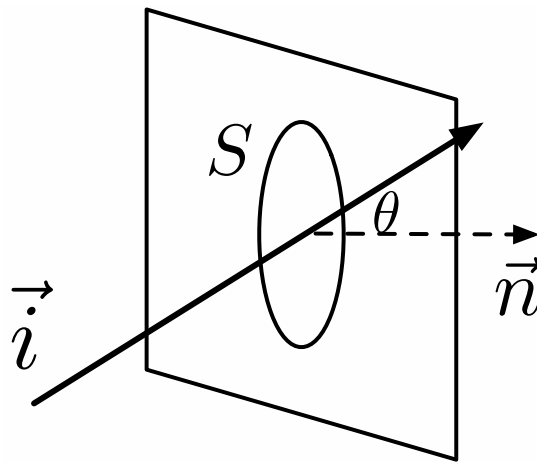


図 5.1: 電流密度 $\vec{i}$ と小さな断面 S を流れる電流 I

5.1.2 定常電流の保存則 (積分形と微分形)

電流の源となる電荷が無から湧き出すということはない。任意の閉じた曲面 S に流れ込む電流の値と流れ出す電流の値は一致する。これは電荷が無い場合の電気力線の保存法則、すなわちガウスの法則と類推でき、

$$\int_S \left\{ \vec{i}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \right\} dS = 0 \quad (5.2)$$

と書ける。電荷に関するガウスの法則同様に、上記の定常電流の保存則を積分形から微分形に書き直すことが可能であり、

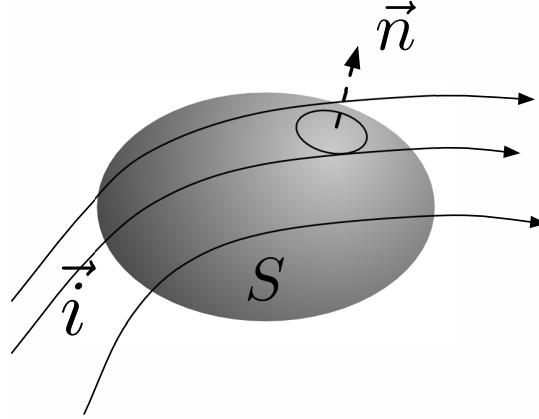
$$\nabla \cdot \vec{i}(\vec{r}) = 0 \quad (5.3)$$

となる。

5.2 オームの法則

ある長さを持った導線を流れる電流を I は、印加する電圧を V に比例する。その比例定数を抵抗値 $R[\Omega]$ と呼ぶ。これをオームの法則と呼ぶ。

$$R \equiv \frac{V}{I} \quad (5.4)$$

図 5.2: 電流密度 $\vec{i}$ と小さな断面 S を流れる電流 I

抵抗値は導線の長さ l に比例し、断面積 S に比例する。

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (5.5)$$

$$\sigma \equiv \frac{1}{\rho} \quad (5.6)$$

$\rho[\Omega \cdot \text{m}]$ を抵抗率または比抵抗、 $\sigma[1/\Omega \cdot \text{m}]$ を電気伝導率と呼ぶ。上記の式を変形すると

$$I = \frac{V}{R} = El \frac{S\sigma}{l} = \sigma SE \quad (5.7)$$

$$i = \frac{I}{S} = \sigma E \quad (5.8)$$

が得られる。一般的にはベクトル形式で

$$\vec{i}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r}) \quad (5.9)$$

と書ける。これが微分形のオームの法則である。この法則は導体の形に関係なく成立する。

しかし、オームの法則が全ての物質の如何なる場合にも成り立つかと言うと、そうではない。例えば、PN 接合によるダイオードは、順方向バイアスでも逆方向バイアスでも、このオームの法則とは一致しない振舞をする。つまり、オームの法則はある条件が揃った場合に成り立つ近似であり、物理の基礎法則という訳ではない。

5.3 オームの法則のミクロな過程

静電場中に置いた金属の中には電場は存在しないと述べた。電流が流れるという現象は、電子の運動があるということを意味する。このことは定常状態であっても電子の分布が外部の電場をキャンセルしている状態ではない、と理解できる。

電流を金属中の電子の運動で説明する。電子の質量を m 、電荷を $-e$ 、導体中の電場 E 、電子の速度を v とすると、次の運動方程式が成立する。

$$m \frac{dv}{dt} = -eE \quad (5.10)$$

もしも、金属中の電子の運動が全く自由であれば、このまま加速が続く。しかし実際にはそうはならず、しばらく走ると原子に衝突し速度 0 になる。平均的に最初の衝突後に時間 τ 後に長さ l を走ったところで次の衝突をすると、

$$l = \frac{1}{2} \frac{-eE}{m} \tau^2 \quad (5.11)$$

が得られる。電子の平均速度を $\bar{v}$ とすると

$$\bar{v} = \frac{l}{\tau} = \frac{-eE}{2m} \tau \quad (5.12)$$

となる。マクロには、電子は速さ $\bar{v}$ で等速運動をしているのと同じように見える。そこで金属中の電子の体積密度を n とすると、電流密度 i は

$$i = -en\bar{v} = \frac{ne^2\tau}{2m}E = \sigma E \quad (5.13)$$

と計算できる。電気伝導度は

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{2m} \quad (5.14)$$

となる。

時間 τ に長さ l を進む間に、電場が 1 つの電子へ行う仕事 W は

$$W = -eEl = \frac{e^2E^2}{2m}\tau^2 \quad (5.15)$$

となるので、金属全体で単位時間あたりに行う単位体積あたりに仕事 P は

$$P = n\frac{W}{\tau} = \frac{ne^2E^2}{2m}\tau = E \cdot i \quad (5.16)$$

$$= \sigma E^2 = \frac{1}{\sigma}i^2 \quad (5.17)$$

となる。この仕事は電子が原子にぶつかって熱的なエネルギーに変換される。ミクロには電子が原子にぶつかり、原子を振動させる原子の熱的なエネルギーを増大させると理解できる。これをジュール熱と呼ぶ。

(FY2009/9 回目: 2009/12/10 はここまで) (FY2011/7 回目: 2011/12/15 はここまで) (FY2013/9 回目: 2013/12/19 はここまで)

第6章 静磁場の基本法則

6.1 磁場の発生: 磁石と電流

6.1.1 磁荷が作る磁場と磁気双極子 (磁石)

磁石同士に力が働く。磁石が磁場を発生し、それに磁石が感じる。磁石同士に働く力はクーロン力との類推で考えることができる。クーロン力は以下の式で与えられた。

$$\vec{F} = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (6.1)$$

この電荷に対応するものとして磁荷を考える。 q_m が q_{m1} から受ける力 F は

$$\vec{F} = \frac{q_m q_{m1}}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (6.2)$$

である。「電場」および「電束密度」と同様な考えに基づいて、磁力でも「磁場」 $\vec{H}$ を以下の通り導入する。

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{q_{m1}}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (6.3)$$

$$\vec{F} = q_m \vec{H}(\vec{r}) \quad (6.4)$$

μ_0 を真空の透磁率と言い、

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{N/A}^2] \quad (6.5)$$

である。磁荷 q_m 、磁場 $\vec{H}$ の単位はそれぞれ

$$q_m [\text{Wb}] \quad (\text{ウェーバー}) \quad (6.6)$$

$$H [\text{A/m}] \quad (6.7)$$

を使う。

電場 $\vec{E}$ に対応する電束密度 $\vec{D}$ と同様に、磁場 $\vec{H}$ に対する磁束密度 $\vec{B}$ を以下のように定義する。

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (6.8)$$

6.1.2 電流による磁場の発生: エルステッドの発見

エルステッドは電流の流れる導線のそばに置いた磁石が動くことに気がつき、電流が磁場を発生することを発見した。

6.1.3 電流間に働く力: アンペールの発見

電流が磁場を発生しているということは、電流同士は磁場を介して力が働く、ということである。アンペールは2本の平行電流間に引力が、反平行電流には斥力が働き、その力の大きさは以下の通りに表せることを発見した (図 6.1)。距離 R 離して2本の導線を置き、それぞれ I と I_1 の電流を流した場合に、長さ l の導線に働く力は

$$\text{長さ } l \text{ に働く力: } F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II_1}{R} l \quad (6.9)$$

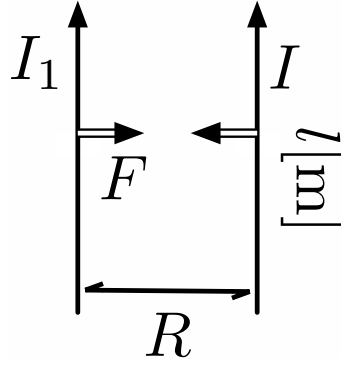


図 6.1: 電流間に働く力

となる。ここで静電場における電束密度 D に対応するものとして磁束密度 B を導入する。

$$\text{長さ } l \text{ に働く力: } F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{R} Il = BIl \quad (6.10)$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{R} \quad (6.11)$$

B 自体は磁束密度 B と呼ばれ、単位は $[\text{T}]$ (テスラ) を用いる。長さ $l = 1[\text{m}]$ の電流 $I = 1[\text{A}]$ を磁束密度 $B = 1[\text{T}]$ 中に置くと、 $F = 1[\text{N}]$ の力がかかる。すなわち、

$$B = 1[\text{T}] = F/Il = 1[\text{N}/\text{A} \cdot \text{m}] \quad (6.12)$$

である。

また、 $I_1 = 1[\text{A}]$ の電流が $1[\text{m}]$ 離れた場所に作る磁束密度 B は、

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{R} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \frac{1}{1} = 2 \times 10^{-7}[\text{T}] \quad (6.13)$$

となる。

テスラは単位としては少々大きすぎるので、ガウスという単位が良く用いられる。

$$1[\text{gau}\beta] = 10^{-4}[\text{T}] \quad (6.14)$$

先程の電流が作る磁束密度 B を磁場 H に書き換えると、

$$H = \frac{I_1}{2\pi R} \quad (6.15)$$

となる。したがって、 1A の直線電流から $1/2\pi[\text{m}]$ 隔てた点に作られる磁場の強さは $1[\text{A}/\text{m}]$ となる。

現実の磁場の強さの例は以下の通り。地球磁場は場所によって異なり $0.24 \sim 0.66[\text{gau}\beta]$ (日本は $0.45[\text{gau}\beta]$ 程度)。ピックアップエレキバン A(フェライト) の表面磁束密度は $800[\text{gau}\beta]$ 。最強の永久磁石のネオジム(住友特殊金属の佐川真人によって 1984 年に発明) の表面磁束密度は $5000[\text{gau}\beta]$ 。太陽黒点は $8000[\text{gau}\beta]$ 。

6.2 磁束線の保存則: 磁場に関するガウスの法則

6.2.1 磁力線

電気力線との類推で磁力線を考えることが可能である。電気力線とは、単電荷は存在するので電気力線の湧き出しは起こるが、単磁荷が存在しないので、磁力線には湧き出しは起こらない。

6.2.2 磁場に関するガウスの法則

電場のガウスの法則と対応する法則として、磁場に関するガウスの法則が成り立つ。しかし先ほど述べた通り磁場では単磁荷が存在しないので、磁場のわき出しは起こらない。よって、任意の閉曲面 S に関する磁束密度の積分は常に 0

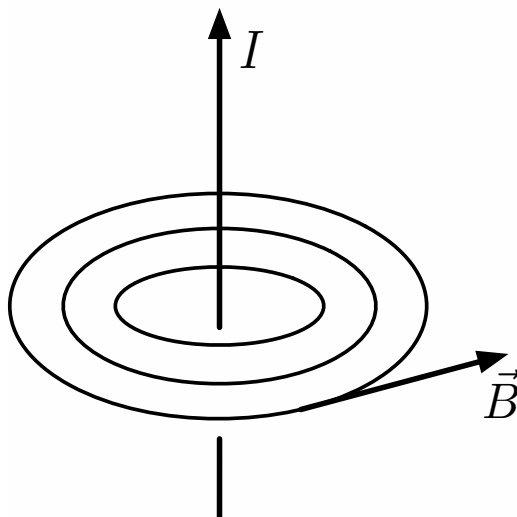


図 6.2: 磁力線

になり、

$$\int_S \{ \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \} dS = 0 \quad (6.16)$$

が成立する。さらに微分形として

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (6.17)$$

が成立する。

6.3 磁場に関する渦の法則: アンペールの法則 (電流が作る磁場)

6.3.1 電流が無い場合のアンペールの法則

仮想的な単磁荷を考えれば、電場の渦無しの法則に対応して、磁場に関しても渦無しの法則が成り立つことは明らかである。すなわち、任意の閉曲線 C に対して、

$$\oint_C \{ \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) \} ds = 0 \quad (6.18)$$

が成立する。さらに微分形として

$$\nabla \otimes \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (6.19)$$

が成立する。

6.3.2 電流がある場合のアンペールの法則: 電流が作る磁場 ($\vec{B} \rightarrow \vec{i}$ の式)

しかし、電流がある場合は話が変わる。エルステッドの発見により電流は磁場を作ることが分かっている。さらに、その磁束密度はアンペールの発見により、

$$B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \quad (6.20)$$

$$2\pi R B(R) = \mu_0 I \quad (6.21)$$

$$2\pi R H(R) = I \quad (6.22)$$

$$(6.23)$$

と書けることも分かっている。よって、直線電流 I を中心とする半径 R の円を閉曲面 C とすると、

$$\oint_C \{ \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) \} ds = B(R) \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \cdot 2\pi R = \mu_0 I \quad (6.24)$$

となる (図 6.2)。

より一般的には、任意の閉曲線 C 上の磁束密度の線積分と、その閉曲線 C によって囲まれる面 S を貫く電流密度の面積分は等しくなり、

$$\oint_C \{ \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) \} ds = \mu_0 \int_S \{ \vec{i}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \} dS \quad (6.25)$$

と書ける (図 6.3)。(FY2010/8 回目: 2010/12/2 はここまで)

これは積分形であるが、ストークスの定理を適用することで、以下のように微分形にすることも可能である。

$$\oint_C \{ \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) \} ds = \int_S \{ (\nabla \otimes \vec{B}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \} dS = \mu_0 \int_S \{ \vec{i}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \} dS \quad (6.26)$$

よって、

$$\nabla \otimes \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{i}(\vec{r}) \quad (6.27)$$

$$\nabla \otimes \vec{H}(\vec{r}) = \vec{i}(\vec{r}) \quad (6.28)$$

である。

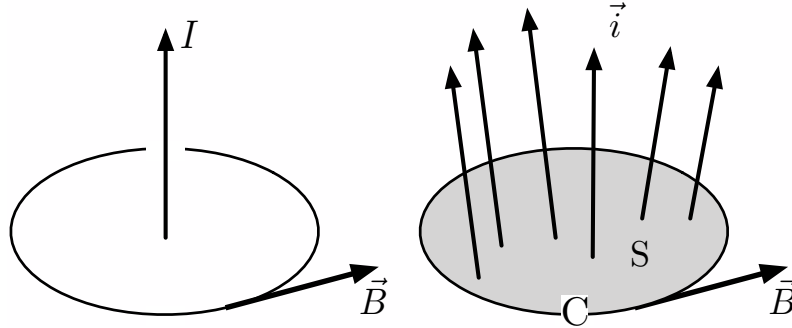


図 6.3: アンペールの法則。電流の周囲には磁場が作られる。

6.3.3 (単) 電荷、単磁荷、電流、磁流 (?)

磁場と電場は非常に良く似ており、お互いコンプリメンタリな関係にある。(単) 電荷の流れが電流であり、電流は磁場を作る (エルステッドの発見&アンペールの法則)。ということは、もしも単磁荷が存在し、その流れである「磁流」というべきものが存在すれば、それは電場を発生するであろう、と予測できる。

6.3.4 ソレノイドコイル

無限に長いソレノイドコイル中に作られる磁場を図 6.4 に従い計算する。コイルの巻き数は単位長さあたり n [本/m] である。対称性から考えて、磁場はコイルの $\vec{H}$ の方向の成分のみである。また、必ずしも自明ではないが、コイルは無限に長いのでコイルの外には磁場は存在しない。コイル中の磁場の大きさを H とする。

アンペールの法則の積分形は

$$\oint_C \{ \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) \} ds = \mu_0 \int_S \{ \vec{i}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \} dS \quad (6.29)$$

$$\oint_C \{ \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) \} ds = \int_S \{ \vec{i}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \} dS \quad (6.30)$$

である。線積分の経路 C として図 6.4 の $ABCD A$ を選ぶと、左辺は

$$(\text{左辺}) = \oint_C \{ \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) \} ds = Hl \quad (6.31)$$

となる。面 $ABCD$ を貫く電線の本数は $n[\text{本}/m] \times l[m] = nl[\text{本}]$ であり、それぞれに電流 I が流れている。よって右辺は

$$(\text{右辺}) = \int_S \left\{ \vec{i}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \right\} dS = nlI \quad (6.32)$$

となる。従って、

$$Hl = nlI \quad (6.33)$$

$$H = nI, B = \mu_0 nI \quad (6.34)$$

となる。積分の経路のことを考えると、コイルの内部では中心であってもなくても、磁場は一樣になることもわかる。

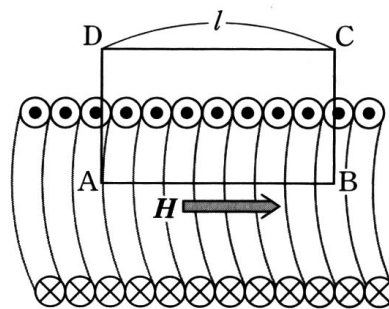


図 6.4: ソレノイドコイル中に作られる磁場

(FY2009/10 回目: 2009/12/17 はここまで)

(FY2011/8 回目: 2011/12/22 はここまで)

6.4 ベクトルポテンシャル

6.4.1 ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ とは ($\vec{A} \rightarrow \vec{B}$ の式)

静電場では

$$\nabla \otimes \vec{E} = 0 \quad (6.35)$$

を積分することで、

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (6.36)$$

と、静電ポテンシャル ϕ を定義した。しかし静磁場では

$$\nabla \otimes \vec{B} = \mu_0 \vec{i} \neq 0 \quad (6.37)$$

であるから、これを使って静磁場ポテンシャルは定義できない。

そこで、

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.38)$$

であるからこれを利用することを考える。任意のベクトル $\vec{X}$ について

$$\nabla \cdot (\nabla \otimes \vec{X}) = 0 \quad (6.39)$$

が成立する (証明は数学に関するメモを参照)。よって、

$$\vec{B} = \nabla \otimes \vec{A} \quad (6.40)$$

となるベクトル $\vec{A}$ を考える。さらに、 $\vec{A}$ に対して

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (6.41)$$

という条件を追加する。この $\vec{A}$ をベクトルポテンシャルと呼ぶ。

2 番目の $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ という条件を追加しても $\vec{A}$ が存在することは以下のように示される。まず $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ という条件だけを元に適当に $\vec{A}$ を選んだとする。このとき $\nabla \cdot \vec{A} (\neq 0) = f$ であったとする。この場合、静電場からの類推で $\nabla \cdot \vec{F} = f$ かつ $\nabla \times \vec{F} = 0$ となるようなベクトル関数 $\vec{F}$ が存在するはずである (実際、 $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ かつ $\nabla \times \vec{E} = 0$ となる $\vec{E}$ は必ず存在する)。そうすると、 $\nabla \cdot (\vec{A} - \vec{F}) = 0$ かつ $\nabla \times (\vec{A} - \vec{F}) = \nabla \times \vec{A}$ であるから、新しく $\vec{A} - \vec{F}$ を $\vec{A}$ として採用することになれば、上記の条件を満たすことになる。

アハラノフ・ボーム効果 $\vec{A}$ はベクトルポテンシャルと呼ぶものの、数学的に便宜的に定義されたもので、物理的には意味がない可能性がある。これに対して、磁場は 0 でベクトルポテンシャルだけが存在する状況を作り、ベクトルポテンシャルの存在を確認できるのがアハラノフ・ボーム効果 (AB 効果) と呼ばれる現象である。AB 効果は日本の外村 (とのむら) らによる精密実験によって確かめられ、その結果ベクトルポテンシャルは実在の物理量としてはっきり認識することができた。

6.4.2 ベクトルポテンシャルから電流密度を求める ($\vec{A} \rightarrow \vec{B} \rightarrow \vec{i}$ の式)

静電ポテンシャルから電荷密度を求める式 (ポアソンの方程式)

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla^2 \phi \quad (6.42)$$

の磁場に対応する式を導く。上記の式は、 ϕ と $\vec{E}$ の関係式と $\vec{E}$ と ρ の関係式を組み合わせることで得られた。したがって、静電ポテンシャルから電荷密度に対応する磁場の式は、ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ から電流密度 $\vec{i}$ を得る式であり、 $\vec{A}$ (ϕ に対応) と $\vec{B}$ ($\vec{E}$ に対応) の関係式と、と $\vec{B}$ と $\vec{i}$ (ρ に対応) の関係式から求められる。元になる 2 つの関係式は

$$\mu_0 \vec{i}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (6.43)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (6.44)$$

であるから、組み合わせると

$$\mu_0 \vec{i}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}(\vec{r})) \quad (6.45)$$

となる。

ここで、任意のベクトル $\vec{X}$ に対して

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{X}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{X}) - \nabla^2 \vec{X} \quad (6.46)$$

なる公式を使う。さらに、 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ を適応すると

$$\mu_0 \vec{i} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} \quad (6.47)$$

となる。(FY2013/10 回目: 2013/12/26 はここまで) 結局、

$$-\mu_0 \vec{i}(\vec{r}) = \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) \quad (6.48)$$

$$-\mu_0 i_x = \frac{\partial^2 A_x(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x(\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x(\vec{r})}{\partial z^2} \quad x \text{ 成分} \quad (6.49)$$

を得ることができる。

6.4.3 電流密度からベクトルポテンシャルを求める ($\vec{i} \rightarrow \vec{A}$ の式)

上記で得た、ベクトルポテンシャルから電流密度を求める式

$$-\mu_0 i_x(\vec{r}) = \frac{\partial^2 A_x(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x(\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x(\vec{r})}{\partial z^2} \quad (6.50)$$

は、類推の元になった静電ポテンシャルから電荷密度を求める式

$$-\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = \nabla^2 \phi(\vec{r}) = \frac{\partial^2 \phi(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(\vec{r})}{\partial z^2} \quad (6.51)$$

と同じ形をしている。よって、電荷密度から静電ポテンシャルを求める

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (6.52)$$

の類推から、

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{i_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (6.53)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (6.54)$$

が得られる。

上記はある領域の至るところに電流が存在する場合にも使える一般的な式である。もう少し現実近く、単純に電線のように曲線状に電流が存在する場合は (図 6.5)、その曲線に沿って積分すれば十分である。曲線 C に沿って電流 $I\vec{t}$ が流れている場合は

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (6.55)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I\vec{t}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\vec{t}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \quad (6.56)$$

と書くことができる。

また積分記号を取り去り、微小部分を流れる微小電流要素が寄与するベクトルポテンシャルの微小量は、

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{i}(\vec{r}') \Delta V'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.57)$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{t}(\vec{r}') \Delta s'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.58)$$

$$(6.59)$$

と書くことができる。ベクトルポテンシャルと微小電流要素の向きは同じであることに注意する。

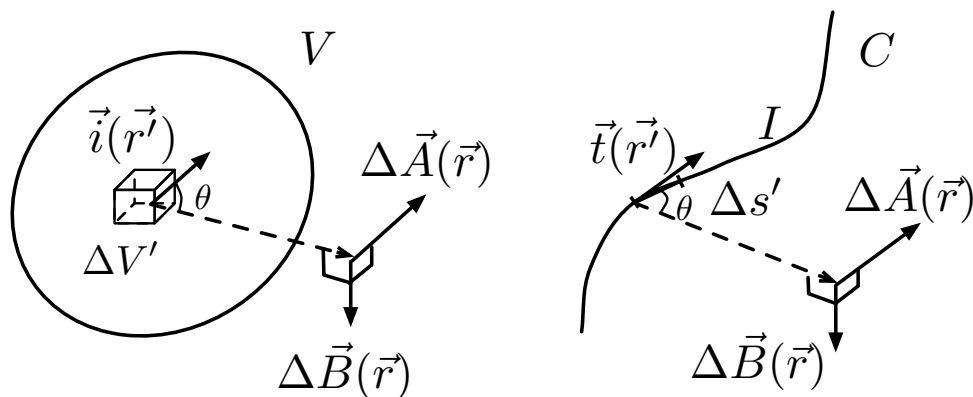


図 6.5: 電線を通る電流が作るベクトルポテンシャルとビオ-サバールの法則

(FY2012/10 回目: 2012/12/20 はここまで)

6.4.4 電流が発生する磁場の法則: ビオ-サバールの法則 ($\vec{i} \rightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ の式)

導出方法 1: 磁束密度 $\vec{B}$ はベクトルポテンシャル $\vec{A}$ の rotation を取れば良い。位置 $\vec{r}$ の短い長さ $\Delta s'$ を持つ電流素片 $I\vec{t}$ が場所 $\vec{r}$ に作る磁束密度の成分 $\Delta \vec{B}$ は、

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta s' \vec{t}(\vec{r}') \otimes (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6.60)$$

と書ける。導出は省略。Appendix の「良く出て来る計算」を利用して計算できる。曲線 C に沿って流れる電流が全体で作る磁束密度は、経路 C に沿って上記の式を積分すれば良いので

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C I \frac{\vec{t}(\vec{r}') \otimes (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds' \quad (6.61)$$

となる。電流密度で与えられている場合は体積で積分すれば良い。すなわち

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \otimes (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (6.62)$$

となる。この電流が作る磁場の式をビオ-サバールの法則と呼ぶ。このビオ-サバールの法則は以下の電荷が作る電場の式に対応する。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (6.63)$$

磁場の大きさは距離の2乗に反比例することがわかる。方向については、電流ベクトルと電流および磁場間の方向ベクトルの外積、つまり両者共に垂直な方向に磁場が作られる。

導出方法2: ビオ-サバールの式(6.60)の導出を説明する。ここでは簡単のために $\vec{r}' = 0$ としておく(図6.6)。直線上に流れる電流 I が半径 R 離れた場所を作る磁場 B は、

$$B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \quad (6.64)$$

である。この式は、直線上に置かれた電荷(電荷密度 λ) が半径 R 離れた場所を作る電場 E の式

$$E(R) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \quad (6.65)$$

とそっくりな形をしている。この電場の式は電荷素片 $\lambda\Delta s$ の作る距離の2乗の反比例する静電場の円筒垂直方向成分 ΔE

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \sin\theta \cdot \Delta s}{r^2} \quad (6.66)$$

を積分して得られたものである。この類推から、電流素片 $I\Delta s$ の作る静磁場の円筒に沿う成分は

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin\theta \cdot \Delta s}{r^2} \quad (6.67)$$

だと分かる。

ここで、電場の場合は円筒垂直方向成分は、 $\lambda\Delta s$ が $\vec{r}$ の場所を作る電場の $\sin\theta$ であるが、磁場の場合は磁場そのものが円筒に沿う成分が全てである。電流素片が作るベクトルポテンシャルの向きは電流素片と同じである。そのベクトルポテンシャルの大きさは円筒の半径にのみに依存し、半径が小さくなるとベクトルポテンシャルの大きさは大きくなる。磁場はベクトルポテンシャルの rotation なので、rotation の意味(水車)を思い出すと、磁場の方向は図6.6となる。この磁場の向きは実は電流 $I\Delta s$ の方向 $\vec{t}$ と $\vec{r}$ の外積方向と一致する。よって電流 $I\Delta s$ の方向 $\vec{t}$ と $\vec{r}$ の外積方向が磁場の方向であり、この外積 $\vec{t} \otimes \vec{r}$ を計算すると $\sin\theta$ が登場する。従って、 $I\Delta s \vec{t}$ が $\vec{r}$ に作る磁場 $\Delta \vec{B}$ は円筒に沿う成分 $\Delta \vec{B}$ そのものに等しいが、式は

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta s \vec{t} \otimes \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (6.68)$$

と書ける。

(FY2010/9 回目: 2010/12/9 はここまで)

6.4.5 (例題) 円電流が作る磁場

図6.7に示す通り、半径 a の円電流の中心軸状の高さ z の位置に作る磁束密度を求める。対称性から明らかに z 方向に作られる。 Δs の電流が作る磁場の大きさは

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\Delta s}{r^2} \quad (6.69)$$

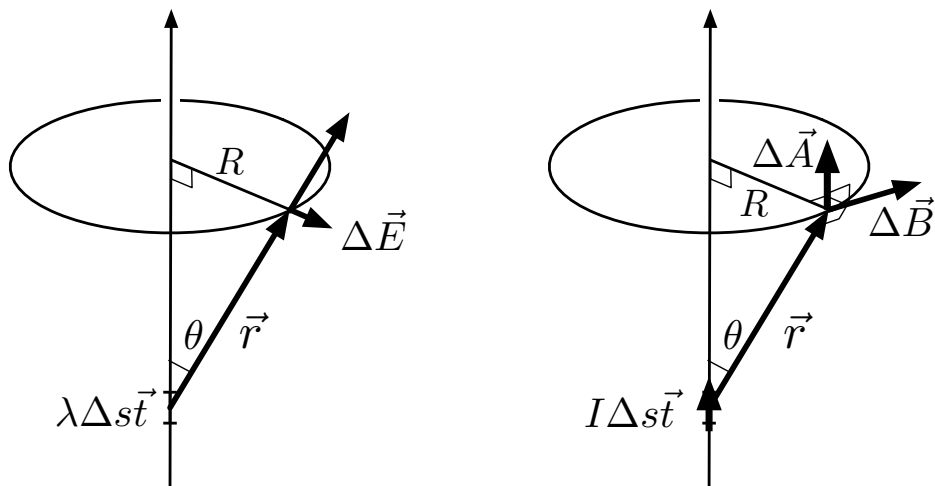


図 6.6: 直線上の電荷が作る電場と、直前上の電流が作る磁場の類推

であり、その方向は図 6.7 に示されている通りである。この z 軸成分は

$$\Delta B \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \alpha}{r^2} \Delta s \quad (6.70)$$

である。後は円 C に沿って積分して行けば良いので、

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \alpha}{r^2} \int_C ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \alpha}{r^2} 2\pi a = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (6.71)$$

となる。円電流の中心では

$$B(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2a}, \quad H(z=0) = \frac{I}{2a} \quad (6.72)$$

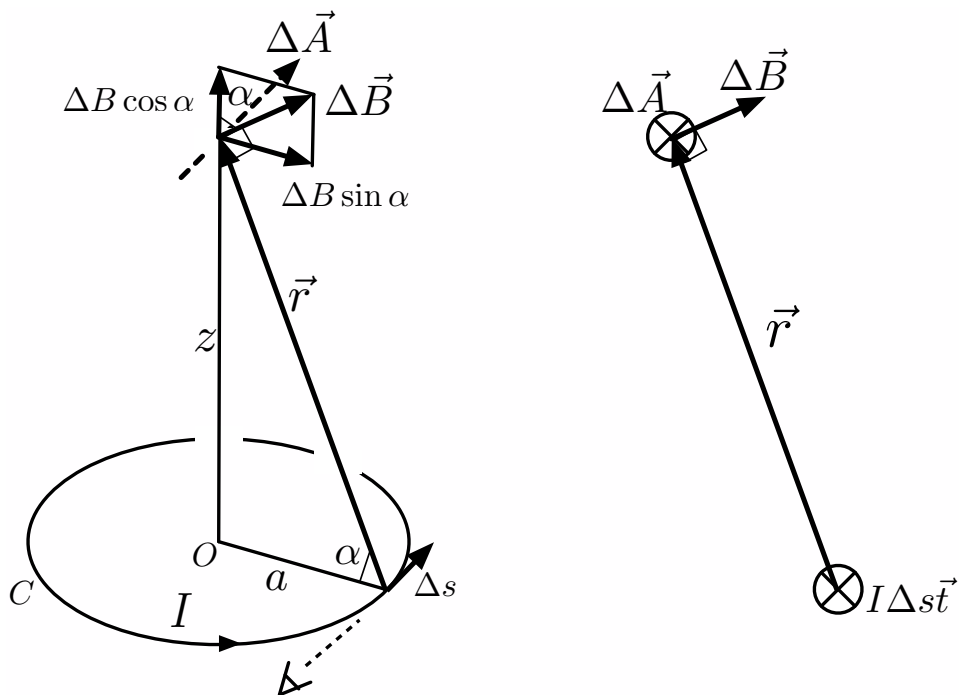


図 6.7: 円電流が作る磁場

6.5 静磁場の持つエネルギー

静電場が持つエネルギーは

$$u_e = \frac{1}{2\varepsilon_0} D^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} DE \quad (6.73)$$

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{E}^2(\vec{r}) dV \quad (6.74)$$

であった。磁場もこれと同じ形をしている。

詳しく説明はしないが、磁場の持つ単位体積あたりのエネルギーは

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} BH \quad (6.75)$$

であり、任意の体積 V に蓄えられている静磁場のエネルギーは

$$U_m = \frac{\mu_0}{2} \int_V \vec{H}^2(\vec{r}) dV \quad (6.76)$$

となる。

上記の式は LC 共振回路を考えると導き出せる。当初コンデンサーに蓄えられたエネルギーはコイルへ渡され、再びコンデンサーに戻って来る。

(FY2009/11 回目: 2010/1/14 はここまで)

6.6 静磁場の基本法則のまとめ

6.6.1 電流、磁場、ベクトルポテンシャルの関係

ここまでで重要な 3 つの量、すなわち電流密度ベクトル、磁場ベクトル、ベクトルポテンシャルが登場し、お互いの関係と計算の仕方について議論して来た。3 つの関係を図 6.8 にまとめる。

(FY2010/11 回目: 2010/1/14 はここまで)

(FY2011/9 回目: 2011/12/27 はここまで)

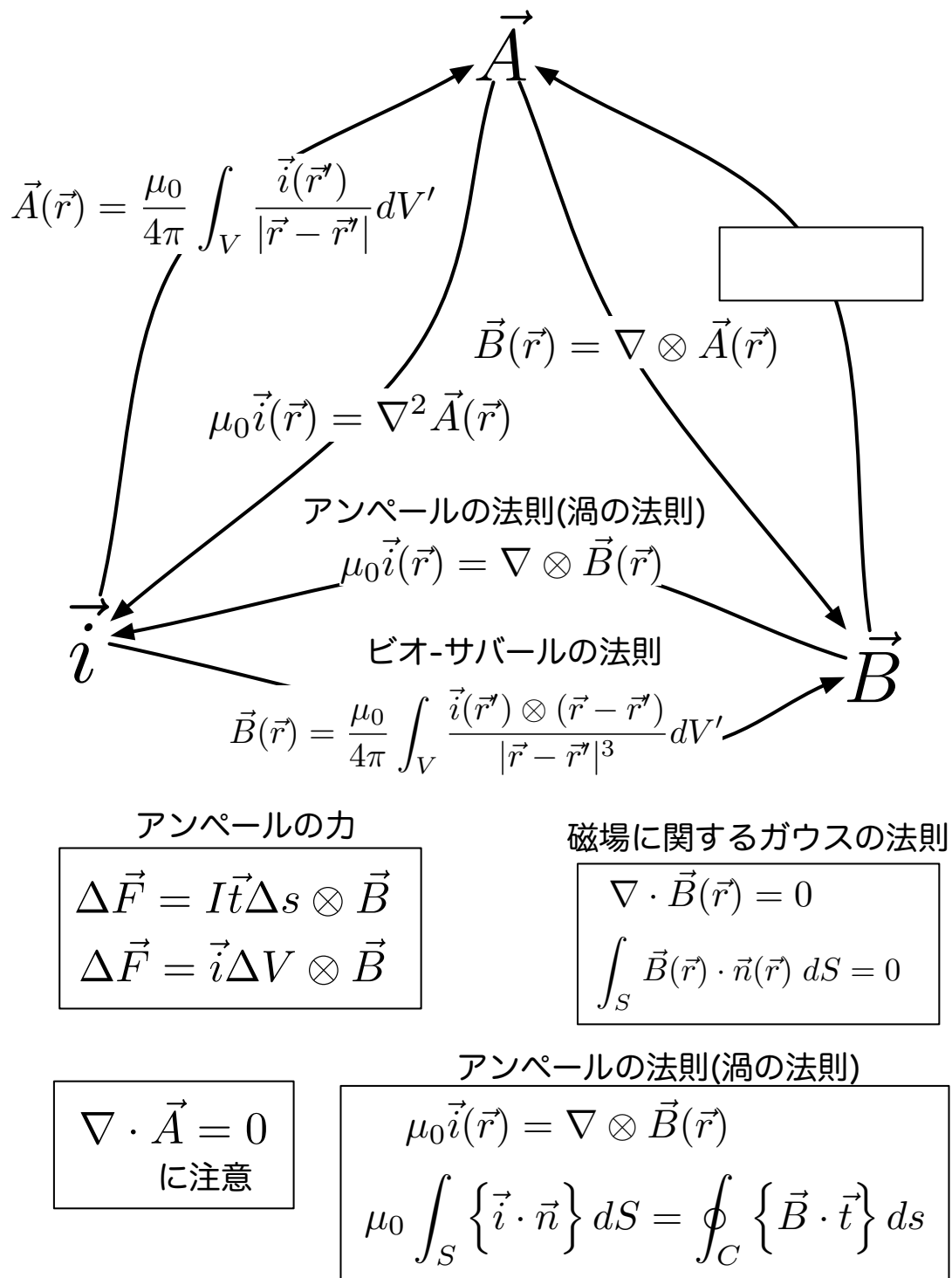


図 6.8: $\vec{i}$ 、 $\vec{B}$ 、 $\vec{A}$ の 3 つの関係

第7章 磁場が電流に及ぼす力

7.1 磁場が電流に与える力: アンペールの力

7.1.1 アンペールの力

既に述べた通り、磁場 B が長さ l を流れる電流 I に及ぼす力は

$$F = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi R} l \quad (7.1)$$

$$F = IBl, \quad B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \quad (7.2)$$

$$(7.3)$$

である。よって、方向も考えて

$$\Delta \vec{F} = I \vec{l} \Delta s \otimes \vec{B} \quad (7.4)$$

が得られる。これをアンペールの力と呼ぶ。より一般的に電流密度が受ける力は

$$\Delta \vec{F} = \vec{j} \Delta V \otimes \vec{B} \quad (7.5)$$

となる。(FY2013/11 回目: 2014/01/09 はここまで)

7.1.2 アンペールの力の例: 磁場がコイルに与える力

図 7.1 のように一様な静磁場中に長方形のコイルを置く。コイルの各辺を a と b として、 a の辺の中心を軸に固定する。これに電流 I を流す。アンペールの力から、辺 b へは

$$F = Ib \cdot B \quad (7.6)$$

の力が働く。トルクは

$$N = F \cdot \frac{a}{2} \sin \theta \cdot 2 = IabB \sin \theta = ISB \sin \theta \quad (7.7)$$

となる。よって、コイルの面積 $S = ab$ に比例することがわかる。ここでは長方形としたが、任意の形のコイルについても成立する。すなわちコイルの面に垂直な単位ベクトルを $\vec{n}$ とすると、トルクは

$$\vec{N} = IS\vec{n} \otimes \vec{B} = \mu_0 IS\vec{n} \otimes \vec{H} = \vec{m} \otimes \vec{H} \quad (7.8)$$

$$\vec{m} \equiv \mu_0 IS\vec{n} \quad (7.9)$$

と書ける。ここで、 $\vec{m}$ を磁気双極子モーメントと呼ぶ。

7.1.3 磁荷に作用する力と磁気双極子

既に述べた通り、磁荷量 q_m の単磁荷 (モノポール) があれば、磁場がそれに作用する力は、

$$\vec{F} = q_m \vec{H} = \frac{q_m}{\mu_0} \vec{B} \quad (7.10)$$

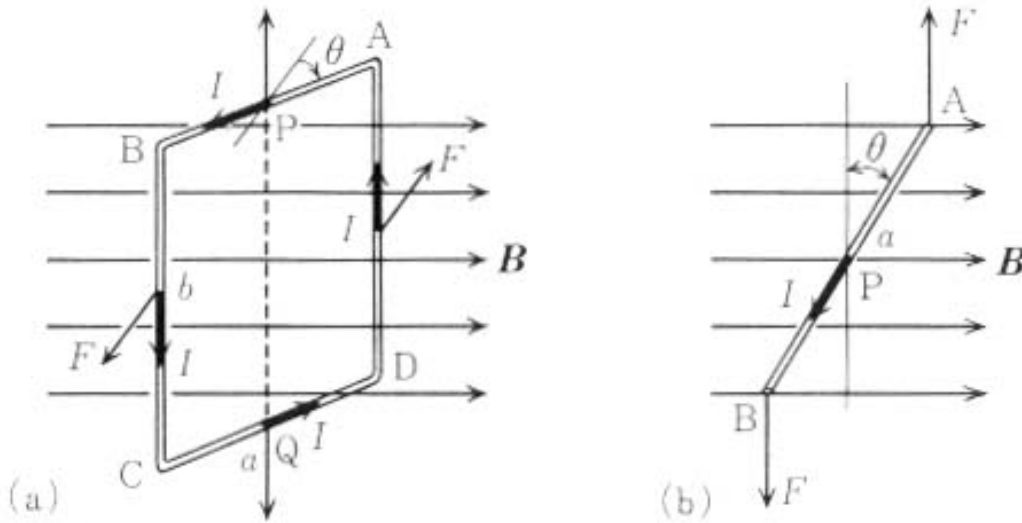


図 7.1: 長方形のコイルに働く力のモーメント。(a) 導線にはたらく力。(b) 上から見た図。

となる。よって電荷の時の類推から $\pm q_m$ の磁荷を距離 s だけ離して置いた場合には磁気双極子モーメント

$$\vec{m} = q_m \vec{s} \quad (7.11)$$

が定義できる。これを磁場中に置くと

$$\vec{N} = \vec{m} \otimes \vec{H} \quad (7.12)$$

というトルクが働く。

磁石はこの磁気双極子と言いたいところだが、磁石を切っても単磁荷は登場しないことから、単磁荷のペアが磁石を作っているわけではない。現在では、分子に微小な円電流が流れていると考えている。先程の円電流に働くトルクの式と合わせると、

$$q_m \vec{s} \longleftrightarrow \mu_0 I S \vec{n} \quad (7.13)$$

となる。つまり、コイルは $\mu_0 I S$ の大きさを持つ磁気双極子と等価であると言える。

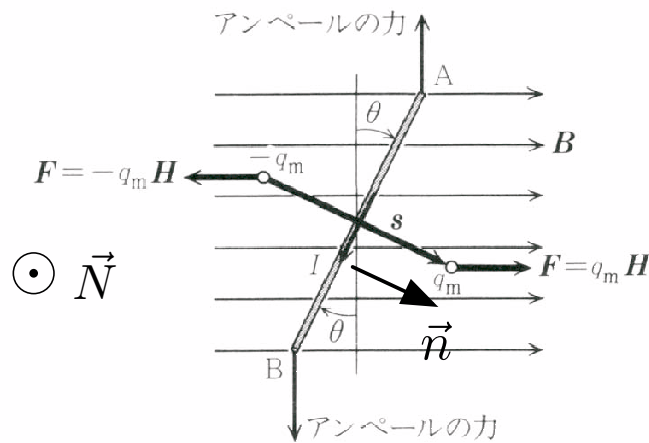


図 7.2: コイルと磁気双極子

7.2 運動する荷電粒子に与える力: ローレンツ力

7.2.1 ローレンツ力

電流の元は電荷の運動である。よって、電流が受ける力は個々の電荷が受ける力の合計と考えることができる。このことから運動する電荷 q が磁場から受ける力は

$$\vec{F} = q\vec{v} \otimes \vec{B} \quad (7.14)$$

と書ける。さらに電場から受ける力も合わせて

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \otimes \vec{B}) \quad (7.15)$$

と書く。これをローレンツ力と呼ぶ。電場は電荷の速さを変えるので、運動エネルギーを変化させる。磁場による力は常に電荷の運動に垂直方向に働くので運動エネルギーは変化させない。

7.2.2 サイクロトロン

一様な静磁場 $\vec{B}$ 中にあり、磁場に垂直な面内を運動する荷電粒子 (質量 m 、電荷 $q > 0$) の運動方程式は以下の通り。

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \otimes \vec{B} \quad (7.16)$$

となる。力 F は $\vec{v}$ と $\vec{B}$ に直交するので、荷電粒子には qvB の求心力が働くことになる。したがって、荷電粒子は等速円運動をする。運動の円の半径を r とおくと

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \quad (7.17)$$

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (7.18)$$

となる。初速を v_0 とすると、それを保つことになる。荷電粒子の円運動の各速度は

$$r = \frac{mv_0}{qB} \quad (7.19)$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r} = \frac{qB}{m} \quad (7.20)$$

となる。これは、円運動の半径にはよらない。この ω_0 をサイクロトロン角振動数と呼ぶ。

7.3 ローレンツ力のパラドックス

観測者 K にとって、電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ 中を運動する電荷 q に働く力は

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \otimes \vec{B}) \quad (7.21)$$

である。ここでは $\vec{v} \otimes \vec{B}$ は磁場から実際に受ける力を示している。

では、これを電荷と同じ速度 $\vec{v}$ で運動しながら観測するとどうなるだろうか? 運動する観測者 K' には粒子は静止して見える。その場合、観測者 K' にとって磁場があっても静止しているので磁場からは力を受けないことになる。

しかし、観測者 K だろうと K' だろうと粒子にはたらく力は同じものが観測されるはずである。そうすると観測者 K' にとっては、粒子には電場しか働くことができないのだから、電場 E とは違う値を持つ電場 E' が存在するように観測されることになる。電場 E' は観測者 K での電場 E に磁場 B の効果を含めた値になる。

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \otimes \vec{B}) = q\vec{E}' \quad (7.22)$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \otimes \vec{B} \quad (7.23)$$

つまり、 K 系から K' 系へ移る際に、磁場が電場に変換されてしまうことを意味する。

どちらの観測者にとっても、電磁気学の法則が正しいと考えると、以下の結論が導かれる。電場や磁場は、どの系で見ても同じ値が観測されるわけでもなく、系によって違う値が観測される。この系と系の変換が特殊相対論の出発点である。

第8章 時間的に変動する電場と磁場：電磁誘導の法則

8.1 時間変化しない場合の復習

ここまでは時間的に変化しない電場と磁場を扱って来た。いよいよ時間的に変化する場合を考えるが、その前にもう一度静電場と静磁場の基本法則を書き下す。

静電場に関するガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \quad (8.1)$$

静磁場に関するガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (8.2)$$

静電場に関する渦無し法則

$$\nabla \otimes \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (8.3)$$

静磁場に関するアンペールの法則

$$\nabla \otimes \vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \quad (8.4)$$

電場と電束密度、磁場と磁束密度の関係

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}), \quad \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}) \quad (8.5)$$

(FY2010/10 回目: 2010/12/16 はここまで)

8.2 ファラデーの電磁誘導の法則：磁場の時間変化は電場を作る

8.2.1 静止している閉回路を貫く磁場の時間変化

静止している閉回路をつらぬく磁束 Φ に時間変化があると、その閉回路にはその磁束の時間変化を妨げる向きに電流を流そうとする誘導起電力 ϕ_{em} が生ずる (図 8.1)¹。すなわち、

$$\phi_{\text{em}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (8.6)$$

である。磁束は閉回路を形成する面 S での磁束 $\vec{B}$ を面積分すれば良いので

$$\Phi = \int_S \{ \vec{B} \cdot \vec{n} \} dS \quad (8.7)$$

となる。一方、起電力 ϕ_{em} は電界の強さを積分したものなので、閉回路上の経路 C (これは先程の面 S を形成する) の上で線積分すれば良い。すなわち、

$$\phi_{\text{em}} = \oint_C \{ \vec{E} \cdot \vec{t} \} ds \quad (8.8)$$

¹ em はおそらく induced electromotive force の em (誘導起電力) と思われる。

となる。よって、

$$\oint_C \{\vec{E} \cdot \vec{t}\} ds = -\frac{d}{dt} \int_S \{\vec{B} \cdot \vec{n}\} dS \quad (8.9)$$

となる。ここで、ストークスの定理を使い微分形にする。

$$\oint_C \{\vec{E} \cdot \vec{t}\} ds = \int_S \{[\nabla \otimes \vec{E}] \cdot \vec{n}\} dS \quad (\text{ストークスの定理を適用}) \quad (8.10)$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_S \{\vec{B} \cdot \vec{n}\} dS \quad (8.11)$$

よって

$$\nabla \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (8.12)$$

が得られる。これをファラデーの電磁誘導の法則と呼ぶ。

静磁場の場合は、式 (8.3) でわかる通り、電場の渦無しの法則が成立していた。実験的に明らかにされたファラデーの電磁誘導の法則は、実は電場の渦無しの法則を時間変化ありに拡張した場合と捉えることができる。もちろん、式 (8.3) が間違っているわけではなく、時間変化しないので $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ となっていたまでのことである。

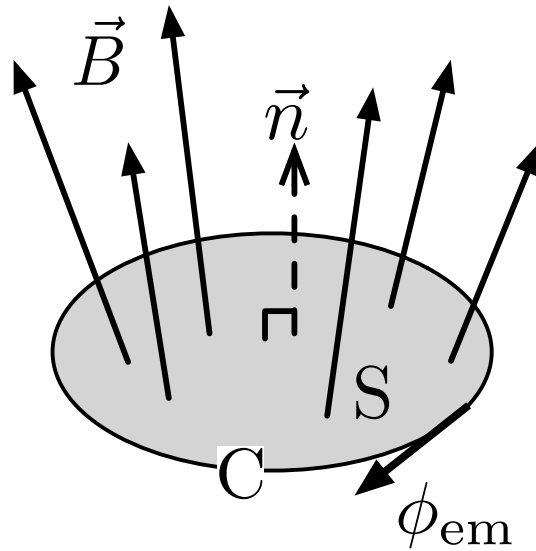


図 8.1: 誘導起電力

8.2.2 運動する導線内に発生する起電力

磁場を運動する導線 前の例では固定した導線に対して磁石を動かすことで磁場を時間変化させると電場が発生することが分かった。運動は相対的であることを考えると磁場は固定しておいて、導線を動かしても良いと考えられる。

図 8.2(左) に示す通り、長さ a の導線を磁場 B に対して垂直に置き、磁場に対して垂直方向へ v の速さで動かしたとする。導線の外の実験室系から見ると導線中の電荷 q はローレンツ力 F を受ける。すなわち

$$\vec{F} = q\vec{v} \otimes \vec{B} \quad (8.13)$$

である。力の大きさは $F = qvB$ であり、向きは導線に沿うことになる。運動前には電荷は一様に分布していたとしても、この力を受け導線の両端にプラス、マイナスそれぞれの電荷が溜ることになる。最終的に、溜った電荷が作る電場とローレンツ力が釣りあった所で平衡状態に達する。 $F = qE = qvB$ なので、電場の大きさは $E = vB$ となる。

一方で、ローレンツのパラドックスを思い出しながら考えると、導線に固定した系では電荷は運動していないから磁場からローレンツ力を受けているようには見えない。その代わりにローレンツ力の働く方向に電場が誘起されたように

観測される。その電場に導線の長さを掛けると導線に起電力が誘起されたように理解される。その大きさは $\phi_{\text{em}} = aE$ となるので、両方の系を考え合わせると

$$\phi_{\text{em}} = aE = avB \quad (8.14)$$

となる。

実験室系では B によるローレンツ力が実体であり実は起電力は見掛けのものである。一方、導線の系ではローレンツ力は存在せず、電場が実体として観測され、電場によってそれにより力を受ける。もちろんこの電場は実験室系から導線の系に移る際に登場したものである。

磁場を運動する導線が形成する閉回路 図 8.2(右) に示す通り導線を追加し閉回路を形成させると、AB と CD で逆の起電力が生ずる。両者での磁場の大きさが同じならば、両者の起電力はつりあう。しかし、磁場の大きさが違うと回路全体で起電力 ϕ_{em} が生ずることになる。 ϕ_{em} を ABCDA の向きに取ると

$$\phi_{\text{em}} = -(B_1 - B_2)av \quad (8.15)$$

となる。右辺は回路を貫く磁束の時間変化で書ける。短い時間 Δt の間に回路の位置は $v\Delta t$ 変化し、磁束が $\Delta\Phi$ ほど変化したとすると

$$\Delta\Phi = B_1av\Delta t - B_2av\Delta t = (B_1 - B_2)av\Delta t \quad (8.16)$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = (B_1 - B_2)av \quad (8.17)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = (B_1 - B_2)av \quad (8.18)$$

$$(8.19)$$

となる。よって、

$$\phi_{\text{em}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (8.20)$$

となる。

再び起電力は電場を経路に沿って積分したものであり、磁束は磁束密度を面積で積分したものであることを思い出し、方向も合わせて一般的に書き直すと

$$\oint_C \{\vec{E} \cdot \vec{t}\} ds = -\frac{d}{dt} \int_S \{\vec{B} \cdot \vec{n}\} dS \quad (8.21)$$

が得られる。結局、ファラデーの電磁誘導の法則と一致することがわかる。

ここで注意しなければならないのは、この電磁誘導を導く元になったのはローレンツ力であり、電荷が磁場から受ける力を電場だと「解釈している」ことを意味する。ローレンツの力のパラドックスを思い出すと、この電場は系を磁場の静止系から導線の静止系に移動したことで見えて来たものだと考えて良いだろう。

8.2.1 の例では実体の電場が生じたが、8.2.2 の例での誘導起電力に伴う電場は、見掛け上のものである。
(FY2011/10 回目: 2012/1/5 はここまで)

8.3 電荷保存則

ある領域から流れ出す電流を電気力線と類推すると、流れ出す電流値 $I(t)$ はその領域内の電荷量 $Q(t)$ の時間的变化に等しい。すなわち

$$(\text{ある領域での電荷量の時間変化}) = (\text{その領域から流れ出す電流}) \quad (8.22)$$

$$-\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) \quad (8.23)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int_S \vec{i}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \quad (8.24)$$

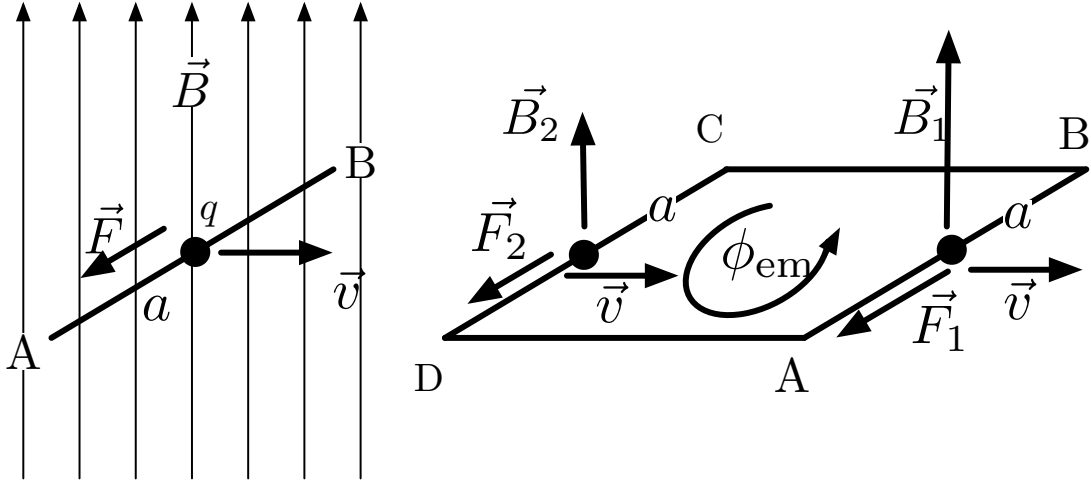


図 8.2: 電磁誘導: 磁場中を運動する導線. 図の矢印はそれぞれのパラメータの符号を示している.

これは、電場のガウスの法則と類推を考えることができる。電場の場合のガウスの法則は、流れ出す電気力線は電荷の値に等しい、上記の電流（流れ出す電荷）と電荷量の時間変化に等しい。そうすると同様に以下のように微分形に書ける。数学的にはガウスの定理を適用する事になる。つまり

$$\int_S (\vec{i} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \nabla \cdot \vec{i} dV \quad (8.25)$$

より

$$-\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{i}(\vec{r}, t) \quad (8.26)$$

となる。

8.4 アンペール-マックスウェルの変位電流: 電場の時間変化は磁場を作る

既に見た通り、電場の渦無しの法則

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (8.27)$$

は、時間変化の場合「ファラデーの電磁誘導の法則」

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (8.28)$$

へ拡張された。

一方、静電場と静磁場の式はお互い非常に対称性がきれいである。そうであるならば、磁場の渦の法則、すなわちアンペールの法則も同様に拡張されるのではないかという類推がなりたつ。もちろん、電流密度の項があるので、全く同じ、というわけには行かない。

式 (8.4) がそのまま時間変化した場合に成り立つと仮定してみよう。

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{i}(\vec{r}, t) \quad (8.29)$$

この式は、電荷保存則の式 (8.26) に向かって変形できそうである。そこで、両辺の div をとって見ることにする。

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t)) = \nabla \cdot \vec{i}(\vec{r}, t) \quad (8.30)$$

左辺の $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H})$ は数学上、恒等的に 0 になる。しかし、右辺は、電荷保存則から $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ に等しくなり、もちろん 0 ではない。これは困った。

そこでマックスウェルは時間変化に持ち込む際に何か追加する必要があるのだろうと考え、電荷保存則の ρ の側に着目した。式 (8.1) を時間変化させた場合に成立するとし、さらに $\frac{\partial}{\partial t}$ を取ってみると次のようになる。

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \quad (8.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t)) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = -\nabla \cdot \vec{i}(\vec{r}, t) \quad (8.32)$$

$$-\nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{i}(\vec{r}, t) \quad (8.33)$$

式 (8.30) で困ったことになったが、その辻褄を合わせるために、マックスウェルは式 (8.30) に式 (8.33) の $-\nabla \left(\partial \vec{D}(\vec{r}, t) / \partial t \right)$ を足したのである。すなわち、

$$\nabla \cdot \left(\nabla \otimes \vec{H}(\vec{r}, t) \right) - \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{i}(\vec{r}, t) \quad (8.34)$$

となる。この式ならば、右辺と左辺は等しくなる。この式が恒等的に成立すると考えると

$$\nabla \otimes \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{i}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (8.35)$$

が得られる。このように、矛盾を解決するために、理論的に手で追加された右辺の第 2 項 $\partial \vec{D}(\vec{r}, t) / \partial t$ を「変位電流密度」と呼び、この様に一般化されたアンペールの法則を「アンペール-マックスウェルの法則」という。式の形はファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (8.36)$$

と驚くべき対称性を持つ。

第9章 マックスウェルの法則と電磁場

9.1 マックスウェルの法則

9.1.1 マックスウェルの法則の一般式

電場に関するガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \quad (9.1)$$

磁場に関するガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.2)$$

ファラデーの電磁誘導の法則: 静電場に関する渦無し法則の拡張

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (9.3)$$

アンペール-マックスウェルの法則: 静磁場に関するアンペールの法則の拡張

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (9.4)$$

電場と電束密度、磁場と磁束密度の関係

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (9.5)$$

ローレンツ力による運動方程式

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (9.6)$$

オームの法則はこの式から導かれるマクロな二義的な法則である。すなわち、ローレンツ力による運動方程式の実用的代用品に過ぎない。

(FY2010/11 回目: 2011/01/13 はここまで)

9.1.2 電荷が無い場合のマックスウェル方程式

静電場と静電場は、結局のところ電荷や電流によって作られたものであった。しかし変位電流が導入されると話が変わる。上記のマックスウェル方程式は $\rho = 0$ 、 $i = 0$ であっても、

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.8)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (9.9)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (9.10)$$

となる。驚くべきは下2つの式である。磁場の時間変化が電場を生み出し、電場の時間変化は磁場を生み出している。つまり、一旦何らかの方法で時間変化する磁場なり電場が作られると、お互いがお互いを作り合うことが可能になるのである。この場合、電場と磁場はお互いが切り離せない存在となり、この2つの場をまとめて「電磁場」と呼び、「電磁波」として観測される。もはやこれは電荷という「物質」から切り離された「場」が実在することを強く認識せざるを得ないことを意味する。

9.2 電磁波

あらためて、 $\vec{E}$ と $\vec{B}$ だけで電荷が存在しない場合のマックスウェル方程式を書く。

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (9.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.12)$$

$$\nabla \otimes \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (9.13)$$

$$\nabla \otimes \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (9.14)$$

式(9.13)の両辺に $\nabla \otimes$ を取ると、

$$\nabla \otimes (\nabla \otimes \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \otimes \vec{B} = 0 \quad (9.15)$$

となる。この式の第1項は式(9.11)に注意する

$$\nabla \otimes (\nabla \otimes \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \quad (9.16)$$

となる。さらに第2項は式(9.14)を使うと

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \otimes \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (9.17)$$

となる。従って、

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0 \quad (9.18)$$

が得られる。同様に

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = 0 \quad (9.19)$$

も得られる。

$\vec{E}$ は z 成分のみを持つとすると式(9.18)は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0 \quad (9.20)$$

この式は波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0 \quad (9.21)$$

と対応できる。この場合、波の伝わる速度 c は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.854 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 3.00 \times 10^8 [\text{m/s}] \quad (9.22)$$

となる。つまり光速と一致する。

(FY2009/12 回目: 2010/1/21 はここまで)

数学に関するメモ

9.3 偏微分

偏微分 (Partial Derivative Differentiation) とは、多変数の関数に対し、ただ一つの変数のみを動かし、その他の変数を一旦固定して定数と見なして微分すること、またはそのようにして得られた微分係数や導関数のことである。言い換えると、多変数関数に対し、任意の座標における各成分方向への瞬間の増分をしめす関数を与える操作のことである。

偏微分と言っても通常の微分と本質的意味において何ら変わるものではない。複数の変数から構成された関数において着目する変数に関して微分するとき、他にも変数があるということを念頭に置く必要性があるときにそれを強調する為に特別な微分記号 (∂) を用いているのである。

全微分 偏微分を用いた関数 $f(\vec{r})$ の展開は一般に以下の様に表せる。

$$f(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \quad (9.23)$$

$$\simeq f(x_0, y_0, z_0) + \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_0} \Delta x + \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_0} \Delta y + \left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_0} \Delta z \quad (9.24)$$

よって、

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (9.25)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (9.26)$$

となる。これを「全微分」と呼ぶ。

連鎖律の公式

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (9.27)$$

なら、

$$f = f(x, y, z) = f(x(t), y(t), z(t)) = f(t) \quad (9.28)$$

であり、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (9.29)$$

である。これを連鎖律の公式と言う。

変数変換 (その 1)

$$f = f(r), \quad r = r(x, y, z) \quad (9.30)$$

とする。すなわち f は r の関数であり、 r は x, y, z の関数である。そこで $\partial f / \partial x$ を知りたい。

$r = r(x, y, z)$ と全微分の公式より、

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz \quad (9.31)$$

$$df = \frac{df(r)}{dr} dr \quad (9.32)$$

である。よって、

$$df = \frac{df(r)}{dr} \left[\frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz \right] \quad (9.33)$$

$$= \left(\frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} \right) dz \quad (9.34)$$

である。一方、全微分の公式より

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (9.35)$$

なので、両方を比較して

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (9.36)$$

となる。

変数変換 (その2)

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (9.37)$$

$$g = g(x, y) = g(x(u, v), y(u, v)) \quad (9.38)$$

とすると、 x と y は u と v の関数なので、 g は u と v の関数である。

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad (9.39)$$

と

$$\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}, \quad (9.40)$$

が分かっているときに

$$\frac{\partial g}{\partial u}, \quad \frac{\partial g}{\partial v}, \quad (9.41)$$

を知りたい。その場合、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (9.42)$$

となる。

仮に $g = g(x)$ なら、 $\partial g / \partial y = 0$ なので

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial y} (= 0) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (9.43)$$

となる。この場合、 g は x だけの関数なので、 x に対しては偏微分ではなく常微分となり、でも u に対しては偏微分になるので、

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{dg}{dx} \quad (9.44)$$

と書くことになる。

9.4 良く出て来る計算

距離の偏微分:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^n} = \frac{\partial}{\partial x} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-n/2} = -n \frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{n+2}} \quad (9.45)$$

9.5 ベクトル解析

9.5.1 grad の意味

2.7.4 章を参照。

9.5.2 div の意味

3.1.2 章を参照。

9.5.3 rot の意味

3.2.1 章を参照。

9.5.4 公式

$$\nabla \cdot (\nabla \otimes \vec{X}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \otimes \vec{X}) = \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \otimes \vec{X})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \otimes \vec{X})_y + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \otimes \vec{X})_z \quad (9.46)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X_z}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y} \right) \quad (9.47)$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \right) X_x + \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) X_y + \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) X_z \quad (9.48)$$

$$= 0 \quad (9.49)$$

$$\nabla \otimes (\nabla \otimes \vec{X}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{X}) - \nabla^2 \vec{X} \text{ (直行座標のみ)}$$

9.5.5 球座標

座標変換: (x, y, z) 座標系と (r, θ, ϕ) 座標系の座標変換は以下の通り。

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (9.50)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (9.51)$$

$$z = r \cos \theta \quad (9.52)$$

grad の計算: スカラー場 $V(r, \theta, \phi)$ に対する grad は以下の通り。

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (9.53)$$

$$\text{grad } V = \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \quad (9.54)$$

div の計算: ベクトル場 $\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$ に対する div は以下の通り。

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi) \quad (9.55)$$

∇^2 の計算: スカラー場 $V(r, \theta, \phi)$ に対する $\nabla^2 = \Delta$ は以下の通り。

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad (9.56)$$

rot の計算: ベクトル場 $\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$ に対する rot は以下の通り。

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \otimes \vec{A} = \left((\text{rot } \vec{A})_r, (\text{rot } \vec{A})_\theta, (\text{rot } \vec{A})_\phi \right) \quad (9.57)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right\} \quad (9.58)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} A_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \quad (9.59)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_\phi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (A_r) \right\} \quad (9.60)$$

9.6 円筒座標

座標変換: (x, y, z) 座標系と (ρ, ϕ, z) 座標系の座標変換は以下の通り。

$$x = \rho \cos \phi \quad (9.61)$$

$$y = \rho \sin \phi \quad (9.62)$$

$$z = z \quad (9.63)$$

grad の計算: スカラー場 $V(r, \theta, \phi)$ に対する grad は以下の通り。

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (9.64)$$

$$\text{grad } V = \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (9.65)$$

div の計算: ベクトル場 $\vec{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z)$ に対する div は以下の通り。

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z) \quad (9.66)$$

∇^2 の計算: スカラー場 $V(r, \phi, z)$ に対する $\nabla^2 = \Delta$ は以下の通り。

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \rho \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} \quad (9.67)$$

rot の計算: ベクトル場 $\vec{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z)$ に対する rot は以下の通り。

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \otimes \vec{A} = \left((\text{rot } \vec{A})_\rho, (\text{rot } \vec{A})_\phi, (\text{rot } \vec{A})_z \right) \quad (9.68)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \quad (9.69)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_\phi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \quad (9.70)$$

$$(\text{rot } \vec{A})_z = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right\} \quad (9.71)$$

参考文献

教科書

(物理入門コース) 電磁気学 I, II, 長岡洋介, 岩波書店, ISBN4-00-007643-3, ISBN4-00-007644-2
(物理の考え方) 電磁気学の考え方, 砂川重信, 岩波書店, ISBN4-00-007892-5
(物理テキストシリーズ) 電磁気学, 砂川重信, 岩波書店, ISBN4-00-007744-9
物理学 B (電磁気学), 小口武彦編, 槇書店, ISBN4-8375-0533-3
電磁気学入門, 岡崎誠, 裳華房, ISBN4-7853-2223-3
物理学基礎, 原康夫, 学術図書出版社, ISBN4-87361-662-X
 E と H , D と B , 広瀬立成, 共立出版, ISBN4-320-03155-5
スカラー場, ベクトル場, 鈴木尚道, 共立出版, ISBN4-320-03308-6

ベクトル解析

div , grad , rot , ..., 大槻義彦, 共立出版, ISBN4-320-03306-X
物理数学の直観的方法, 長沼伸一郎, 通商産業研究社,
スッキリわかる 続 数学ガイドブック, 安藤えい一, くもん出版 ISBN4-87576-566-5
(数学ワンポイント双書) ベクトル解析, 深見哲造, 共立出版 ISBN4-87576-566-5

演習書

演習 電磁気学, 加藤正昭, サイエンス社,
(物理入門コース/演習) 例解 電磁気学演習, 長岡洋介・丹慶勝市, 岩波書店, ISBN4-00-007792-9,