「高エネルギー天文学」講義ノート

京都大学理学部物理第二教室宇宙線研究室
鶴 剛
tsuru@cr.scphys.kyoto-u.ac.jp
Voice: 075-753-3868, FAX: 075-753-3799

Ver 2003_9

講義録に御意見、御感想、
たくさんあるはずの間違いを発見された場合は、
是非御連絡ください。

目 次

第 1 章 単位、宇宙の構成要素 9
1.1 単位 9
1.2 宇宙の構成要素 13
1.2.1 恒星 13
1.2.2 白色矮星と中性子星の質量と半径の関係 21
1.2.3 星団と銀河 21

第 2 章 宇宙の観測: 電波からガンマ線 27
2.1 電波観測 27
2.2 光赤外と紫外線観測 28
2.3 X 線とガンマ線 28
2.4 光子以外の観測手段 28

第 3 章 輻射の物理の基礎とブラックボディ 31
3.1 Radiative Transfer の基礎 31
3.1.1 The Specific Intensity and Its Moments 31
3.1.2 Radiative Transfer 34
3.2 光子の熱力学と黒体放射 39
3.2.1 Planck Spectrum 39
3.2.2 Kirchhoff's Law for Thermal Emission 41
3.2.3 Stefan-Boltzmann Law 41
3.3 光子ガス 42
3.3.1 状態方程式と断熱指数 42
3.3.2 輻射/物質のエネルギー密度 44
3.4 光学的に厚い大気からの輝線と吸収線 47
3.4.1 温度構造が無い場合 47
3.4.2 温度構造がある場合: 太陽の例 47
3.4.3 温度構造がある場合: 2 層モデル 48
3.5 アインシュタインの A 係数と B 係数 49
3.5.1 アインシュタイン係数の導入 49
3.5.2 第 2 量子化 50
3.6 放射による伝熱 50
3.6.1 伝熱工学の基礎 50
3.6.2 2 つの黒体平板間の熱流 51
3.6.3 温度変化: 電気との等価回路 52
3.6.4 2 枚の黒体並行平板の間に並行平板を 1 枚挿入する 52
3.6.5 灰色物体間の熱輸送 53
3.6.6 熱制御の原則 54
3.6.7 地球における太陽輻射による熱流入と黒体輻射の平衡 54
3.6.8 ビニールハウスと地球温暖化 56

3.6.9 人工衛星の熱制御 56
3.7 輻射輸送への散乱の効果 56
3.7.1 ランダムウォーク 56
3.7.2 散乱のみの場合の輻射輸送方程式 58
3.7.3 吸収放射に散乱が加わる場合の輻射輸送方程式 58
3.8 輻射の拡散 58
3.8.1 Rosseland 近似 58
3.8.2 Eddington 近似 58

第 4 章 ビルアル定理と降着円盤 59
4.1 ビルアル定理 59
4.1.1 一般の場合 59
4.1.2 中心星による重力場がドミナントの場合 60
4.1.3 自己重力系の場合 60
4.1.4 一様な密度分布を持つ粒子系 61
4.1.5 流体的な取り扱い 61
4.1.6 負の比熱 62
4.2 光学的に厚い降着円盤 63
4.2.1 ブラックホールによって得られるエネルギーと角運動量の役割 63
4.2.2 光学的に厚く幾何学的に薄い標準ディスクモデル 63
4.2.3 Low Mass X-ray Binaries 65
4.2.4 中性子星の場合 66
4.3 ブラックホールの場合 67
4.3.1 有効ポテンシャル・エネルギー 67
4.3.2 Schwarzschild 解の場合 69
4.3.3 ブラックホール標準円盤の内縁温度と光度 70
4.3.4 恒星質量ブラックホール (Stellar Mass Black Hole) のスペクトル 72
4.3.5 AGN の場合 74
4.4 角運動量の輸送 75
4.5 ADAF 75
4.6 自己重力系と負の比熱 76

第 5 章 トムソン散乱とエディントン光度 77
5.1 動く粒子による放射 77
5.1.1 直観的理解 77
5.1.2 Larmor's Formula 77
5.1.3 Dipole 輻射 78
5.2 トムソン散乱 79
5.2.1 トムソン散乱の考え方 79
5.2.2 入射フォトンが偏光している場合のトムソン散乱 80
5.2.3 入射フォトンが無偏光の場合のトムソン散乱 82
5.2.4 コンプトン散乱との関係 82
5.3 エディントン限界 83
5.4 恒星が取り得る最大質量 (多分トムソン散乱ではなく UV なので、調べること) 84
5.5 X 線バーストと吸収線 84
5.5.1 X 線バースト源の銀河系での分布 84
5.5.2 黒体輻射による半径の導出 84

- 5.5.3 エディントン光度による質量の導出 . . . 85
- 5.5.4 鉄の吸収線による重力赤方偏移の検出 . . . 85
- 5.5.5 光電吸収ではなく共鳴吸収である理由 . . . 87
- 5.5.6 X 線バーストのエネルギー源 . . . 88
- 5.5.7 II 型 X 線バーストの性質 . . . 90
- 5.6 コンパクトネスパラメータと Pair Plasma . . . 92
- 5.7 エディントン質量降着率とブラックホールの成長 . . . 92
- 5.8 X 線発生装置の偏光とトムソン散乱を用いた X 線偏光測定 . . . 93
- 5.9 2 型セイファート銀河と光学偏光観測 . . . 94
- 5.10 磁気双極子と電波パルサー . . . 98
  - 5.10.1 ブレーキングインデックス . . . 98
  - 5.10.2 磁場の強さ . . . 99
  - 5.10.3 年齢 . . . 99
  - 5.10.4 パルサーの放射メカニズム . . . 99
  - 5.10.5 パルサー風 . . . 99
  - 5.10.6 スピンダウン光度と電磁波による光度 (高原「宇宙物理学」の丸写し) . . . 100
  - 5.10.7 電波パルサー、ミリ秒パルサー、X 線パルサー、低質量 X 線連星 (LMXB) . . . 100
  - 5.10.8 AXP/マグネター . . . 100

第 6 章 熱制動輻射と銀河、銀河団の高温プラズマ **103**
- 6.1 制動輻射 . . . 103
- 6.2 熱制動輻射 . . . 106
  - 6.2.1 熱制動輻射 . . . 106
  - 6.2.2 熱制動吸収 . . . 107
  - 6.2.3 冷却時間 . . . 108
- 6.3 銀河団と β モデル . . . 108
  - 6.3.1 銀河団の光学観測 . . . 109
  - 6.3.2 銀河団の X 線観測 . . . 110

第 7 章 原子による輻射と吸収 **119**
- 7.1 光学的に薄いプラズマでの電離平衡と放射冷却 . . . 119
  - 7.1.1 Ionization Equilibrium . . . 119
  - 7.1.2 Radiative Cooling Rate . . . 122
  - 7.1.3 まとめと結果 . . . 124
  - 7.1.4 Thermal Instability . . . 126
  - 7.1.5 メタルアバンダンスの求め方 . . . 126
  - 7.1.6 等価幅 . . . 126
- 7.2 電子-陽子間が熱平衡に達する時間と電離平衡に達する時間 . . . 126
  - 7.2.1 電子-陽子間が熱平衡に達する時間 . . . 126
  - 7.2.2 イオン化に要する時間 . . . 129
  - 7.2.3 超新星残骸におけるイオン化非平衡 . . . 131
- 7.3 禁制線を用いてプラズマ密度を求める方法 . . . 132
- 7.4 光電吸収 . . . 134

第 8 章 衝撃波と超新星残骸 **135**
- 8.1 一次元衝撃波 . . . 135
- 8.2 球対称衝撃波 . . . 138

8.2.1 一次元衝撃波と爆発によって生ずる球対称衝撃波の違い . . . 138
8.2.2 厳密解 (Sedov 解、Sedov-Taylor 解) . . . 138
8.2.3 簡単なモデル . . . 142
8.2.4 Reverse Shock . . . 144
8.3 超新星残骸の進化 . . . 144
8.3.1 セドフフェーズ超新星残骸のパラメータを観測で決める . . . 144
8.3.2 現実に観測される超新星残骸 . . . 145

第 9 章 非熱的宇宙 – The Extreme Universe – の発見 147

第 10 章 ビーミング 151
10.1 特殊相対論の復習 . . . 151
10.2 ビーミング . . . 152
10.3 Superluminal Motion . . . 154
10.4 加速している相対論的荷電粒子からの電磁波放出 . . . 157
10.4.1 全放射エネルギー (いい加減なので見直すこと) . . . 157
10.5 時間変動とビーミングの必要性 –柴崎-井上理論 – . . . 157

第 11 章 サイクロトロンとシンクロトロン輻射 161
11.0.1 Gyrofrequency . . . 161
11.0.2 全輻射パワー . . . 161
11.1 サイクロトロン輻射 . . . 162
11.1.1 電場とそのパワースペクトル . . . 162
11.2 シンクロトロン輻射 . . . 163
11.2.1 電場とそのパワースペクトル . . . 163
11.2.2 単一エネルギーの電子の場合 . . . 163
11.2.3 ベキ関数型の電子エネルギースペクトルの場合 . . . 164
11.2.4 カットオフを持つベキ関数型の電子エネルギースペクトルの場合 . . . 165
11.3 ランダウ準位とサイクロトロン吸収線 . . . 165
11.3.1 ランダウ準位 . . . 165
11.3.2 サイクロトロン吸収線 . . . 166

第 12 章 コンプトン散乱 169
12.1 コンプトン散乱と逆コンプトン散乱の素過程 . . . 169
12.1.1 コンプトン散乱 . . . 169
12.1.2 逆コンプトン散乱 (電子が大きなエネルギーを持つ) . . . 171
12.1.3 逆コンプトン散乱とシンクロトロン輻射の類似性 . . . 173
12.2 一回の逆コンプトン散乱により放射される光子のスペクトル . . . 173
12.2.1 等方的な単一エネルギー同士の電子と光子の場合 . . . 173
12.2.2 電子が巾関数的なスペクトルを持つ場合 . . . 175
12.3 多重逆コンプトン散乱により放射される光子のスペクトル . . . 175
12.3.1 電子が熱的な分布を持つ場合の多重逆コンプトン散乱 . . . 175
12.4 光学的に厚い物質での、コンプトン散乱、逆コンプトン散乱の実例 . . . 176
12.5 半導体検出器で得るガンマ線スペクトル . . . 176
12.6 スニャエフ・ゼルドビッチ効果 . . . 177
12.6.1 原理とスペクトルシフト . . . 177
12.6.2 銀河団までの距離を測定する . . . 177

第 13 章 シンクロトロン・(セルフ) コンプトン放射 179
13.1 電波ローブからの X 線放射 179
13.2 超新星残骸からの非熱的輻射と宇宙線加速 180
13.2.1 SN1006 180
13.2.2 RX J1713.7-3946 183
13.3 Blazar と Synchrotron Self-Compton モデル 183
13.3.1 コンプトンカタストロフィとビーミング 185
13.3.2 SSC モデル 185

第 14 章 宇宙線とフェルミ加速 187
14.1 輻射などによる相対論的電子のエネルギーロスのまとめ 187
14.2 Dffusion-Loss 方程式とフェルミ機構 188
14.2.1 Dffusion-Loss 方程式 188
14.2.2 フェルミ機構 189
14.3 フェルミ加速 191
14.3.1 分子雲との衝突による 2 次のフェルミ加速 191
14.3.2 衝撃波による 1 次のフェルミ加速 193

第 15 章 ブラックホール 201
15.1 恒星ブラックホールの発見 201
15.1.1 コンパクト星の質量決定方法 201
15.2 銀河中心の巨大ブラックホール 201
15.2.1 星やガスの運動学 – その 1 BLR を用いた AGN の場合 201
15.2.2 星やガスの運動学 – その 2 近傍の通常銀河 201
15.2.3 X 線時間変動を用いた質量決定 – その 1: Wandel and Mushotzky (1986) 202
15.2.4 X 線時間変動を用いた質量決定 –その 2: Hayashida etal. (1998) 202
15.2.5 三好さんの話 202
15.3 ガンマ線バースト 202
15.4 コンプトン thick ディスク 202

第 16 章 Cosmic X-ray Background 205

第1章　単位、宇宙の構成要素

1.1　単位

長さ

太陽半径:

$$1R_\odot = 6.96 \times 10^{10}(\mathrm{cm}) \tag{1.1}$$

天文単位:

地球と太陽の距離を単位としたもの。

$$1(\mathrm{AU}) = 1.50 \times 10^{13}(\mathrm{cm}) \tag{1.2}$$

光年:

光が 1 年間で進む距離。

$$1(\mathrm{ly}) = 9.46 \times 10^{17}(\mathrm{cm}) \tag{1.3}$$

パーセク:

年周視差が $1''$ になる距離。

$$\begin{aligned} 1(\mathrm{pc}) \times \tan(1'') &= 1(\mathrm{AU}) && (1.4)\\ 1\mathrm{pc} &= 1\mathrm{AU}/\tan(1'') = 1.50 \times 10^{13}\mathrm{cm}/4.848 \times 10^{-6} && (1.5)\\ &= 3.09 \times 10^{18}(\mathrm{cm}) && (1.6)\\ &= 3.26(\mathrm{ly}) && (1.7)\end{aligned}$$

銀河系中心と太陽の距離:

$$8.5 \sim 10(\mathrm{kpc}) \tan(1'') \tag{1.8}$$

光行差:

地球が太陽のまわりを回転する速度が半年で反対になるため、恒星から降ってくる光の方向が見かけ上ずれて見える。

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{v}{c} && (1.9)\\ \theta &= \frac{41''}{2} = 20.5'' && (1.10)\end{aligned}$$

質量

太陽質量:

$$1M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33}(\mathrm{g}) \tag{1.11}$$

銀河系の質量:

$$\sim 2 \times 10^{11}(\mathrm{M}_{\odot}) \tag{1.12}$$

エネルギー

電子ボルト:

$$1(\mathrm{eV}) = 1.602 \times 10^{-12}(\mathrm{ergs}) \tag{1.13}$$

温度と波長:

ある温度を規定した場合、どの波長で最も明るく光るかをざっと見積もる。

$$h\nu = k_{\mathrm{B}}T \tag{1.14}$$

$$h\nu = 1(\mathrm{keV}) = k_{\mathrm{B}}T \rightarrow T = 1.16 \times 10^{7}(\mathrm{K}) \tag{1.15}$$

波長と周波数:

$$h\nu = 1(\mathrm{keV}) \quad \rightarrow \quad \lambda = 12.4(\mathrm{A}) \tag{1.16}$$

$$\rightarrow \quad \nu = 2.42 \times 10^{17}(\mathrm{Hz}) \tag{1.17}$$

輻射のエネルギー密度と圧力

フラックス:

ある面を単位時間あたりに単位時間に通り過ぎるエネルギー。例えば、地球から太陽を見た時に、地球表面の単位面積あたりに単位時間当たりに太陽から降り注ぐエネルギーのこと。

$$F(\mathrm{ergs\ sec^{-1}\ cm^{-2}}) \tag{1.18}$$

光度、Luminosity:

ある物体が単位時間あたりに放射するトータルエネルギー。太陽が 4π 方向に放射するエネルギーのこと。

$$L(\mathrm{ergs\ sec^{-1}}) \tag{1.19}$$

$$L = F \times 4\pi D^2 \tag{1.20}$$

太陽光度:

$$L_\odot = 3.8 \times 10^{33}(\mathrm{ergs\ sec^{-1}}) \tag{1.21}$$

絶対等級と見かけの等級:

ある星を 10pc の距離においた時の等級を絶対等級と呼ぶ。

$$M_{\mathrm{bol}} = 4.75 - 2.5\log(L/L_\odot) \tag{1.22}$$

$$m = M + 5\log(D/(10\mathrm{pc})) + A \tag{1.23}$$

$$= M + 5\log(D(\mathrm{pc})) - 5 + A \tag{1.24}$$

A 減光等級:

星間ガスの散乱、吸収により暗くなる等級を意味する。減光 A と冷たい星間ガスの柱密度 N_{H} は以下の通り。

$$A \sim N_{\mathrm{H}}/2 \times 10^{21} \tag{1.25}$$

黒体輻射の輻射密度定数:

黒体輻射の中に観測者が居る場合、単位体積あたりの輻射が占めるエネルギー。

$$u = aT^4(\mathrm{ergs\ cm^{-3}}) \tag{1.26}$$

$$a = \frac{\pi^2 k_{\mathrm{B}}^4}{15c^3\hbar^3} = 7.57 \times 10^{-15}(\mathrm{ergs\ cm^{-3}\ K^{-4}}) \tag{1.27}$$

宇宙背景放射 (Cosmic Microwave Background) の輻射エネルギー密度は、

$$\rho_{r0} = aT_{r0}^4 \tag{1.28}$$

$$= 7.57 \times 10^{-15} \times 2.7^4 \tag{1.29}$$

$$= 4.0 \times 10^{-13}(\mathrm{ergs\ cm^{-3}}) = 0.25(\mathrm{eV\ cm^{-3}}) \tag{1.30}$$

シュテファン-ボルツマン定数:

黒体輻射の場合に、単位面積を単位時間当たりに通り過ぎる輻射のエネルギー。

$$\sigma = ac/4 = 5.67 \times 10^{-5}(\mathrm{ergs\ cm^{-2}\ K^{-4}\ sec^{-1}}) \tag{1.31}$$

太陽の表面温度を 5800(K) とすると、太陽は黒体輻射なのでその光度は、

$$L_\odot = \sigma T^4 4\pi R_\odot^2 \tag{1.32}$$

$$= 5.67 \times 10^{-5} \times 5800^4 \times 4\pi(6.96 \times 10^{10})^2 \tag{1.33}$$

$$= 3.8 \times 10^{33}(\mathrm{ergs\ sec^{-1}}) \tag{1.34}$$

となる。

輻射による圧力:

$$P_{\mathrm{ph}} = \frac{1}{3}u_{\mathrm{ph}} \tag{1.35}$$

磁場のエネルギー密度と圧力

磁場によるエネルギー密度 $u_{\rm B}$ と、圧力 $P_{\rm B}$ は以下の通りである。

$$P_{\rm B}({\rm dyn}) = (B({\rm G}))^2/8\pi \tag{1.36}$$

$$u_{\rm B}({\rm ergs\ cm^{-3}}) = (B({\rm G}))^2/8\pi \tag{1.37}$$

エネルギー発生効率

単位質量あたりに単位時間当たりに生産しているエネルギー。

太陽:

$$\frac{L_\odot}{M_\odot} = 1.9{\rm ergs/sec/g} \tag{1.38}$$

$$\frac{L_\odot}{M_\odot} \times 47 \times 10^8{\rm yr} = 3 \times 10^{17}{\rm ergs/g} \tag{1.39}$$

人間:

$$\frac{2000{\rm kcal}}{50{\rm kg} \times 1{\rm day}} = 2 \times 10^4{\rm ergs/sec/g} \tag{1.40}$$

静止質量:

$$E = mc^2 \tag{1.41}$$

$$\frac{E}{mc^2} = 1 \tag{1.42}$$

$$\frac{E}{m} = c^2 = 9 \times 10^{20}{\rm ergs/g} \tag{1.43}$$

化学反応:

$$\frac{E}{mc^2} = \frac{10{\rm eV}}{mc^2} = 10^{-8} \tag{1.44}$$

核反応:

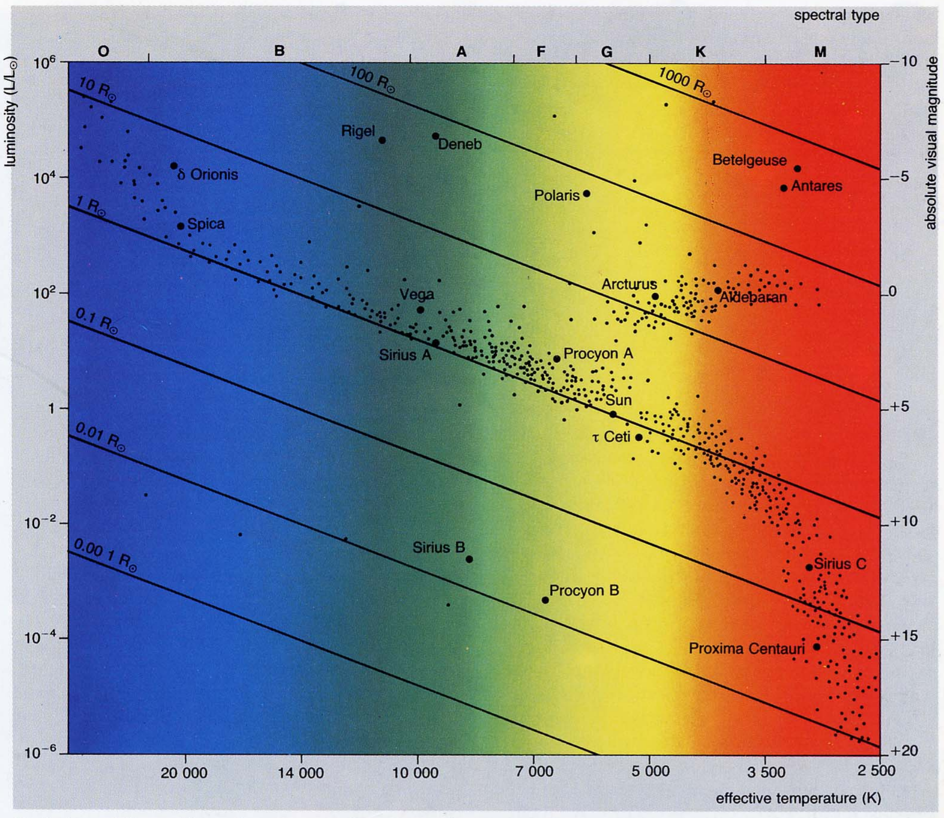
$$\frac{E}{mc^2} = \frac{8{\rm MeV}}{m_{\rm p}c^2} = 10^{-2} \tag{1.45}$$

$$\frac{E}{m_{\rm p}} = 9 \times 10^{18}{\rm ergs/g} \tag{1.46}$$

1.2　宇宙の構成要素

1.2.1　恒星

HR 図:

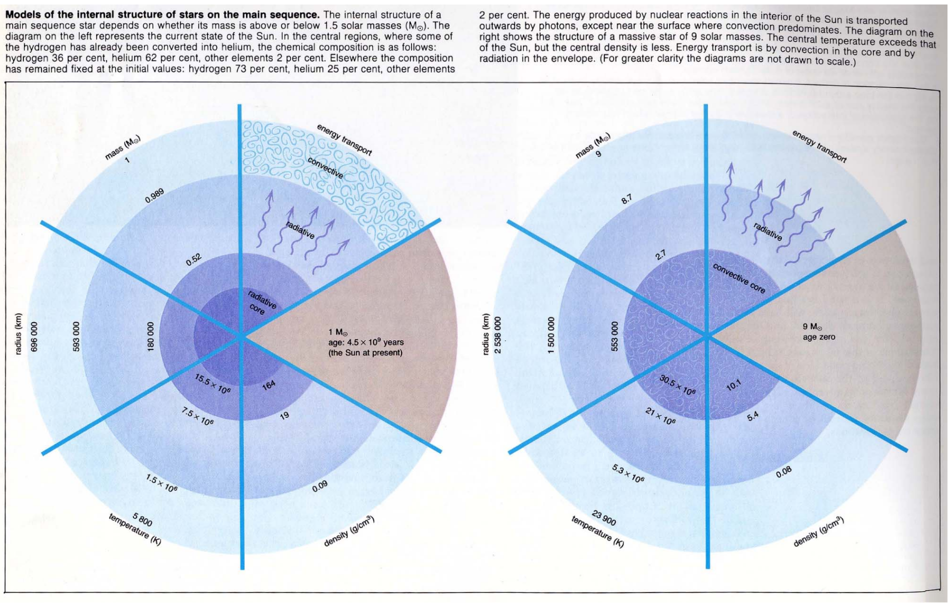


Variation of the radius of a star as a function of its spectral type and its luminosity. In the HR diagram, the straight lines each correspond to stars of the same radius (expressed in solar radii $R_\odot$). The positions of some well-known stars are indicated.

We note that a star whose radius is $10\ R_\odot$ is a dwarf star on the main sequence if its spectral type is O, but is a giant star if its spectral type is G.

図 1.1: HR 図

恒星の内部構造:

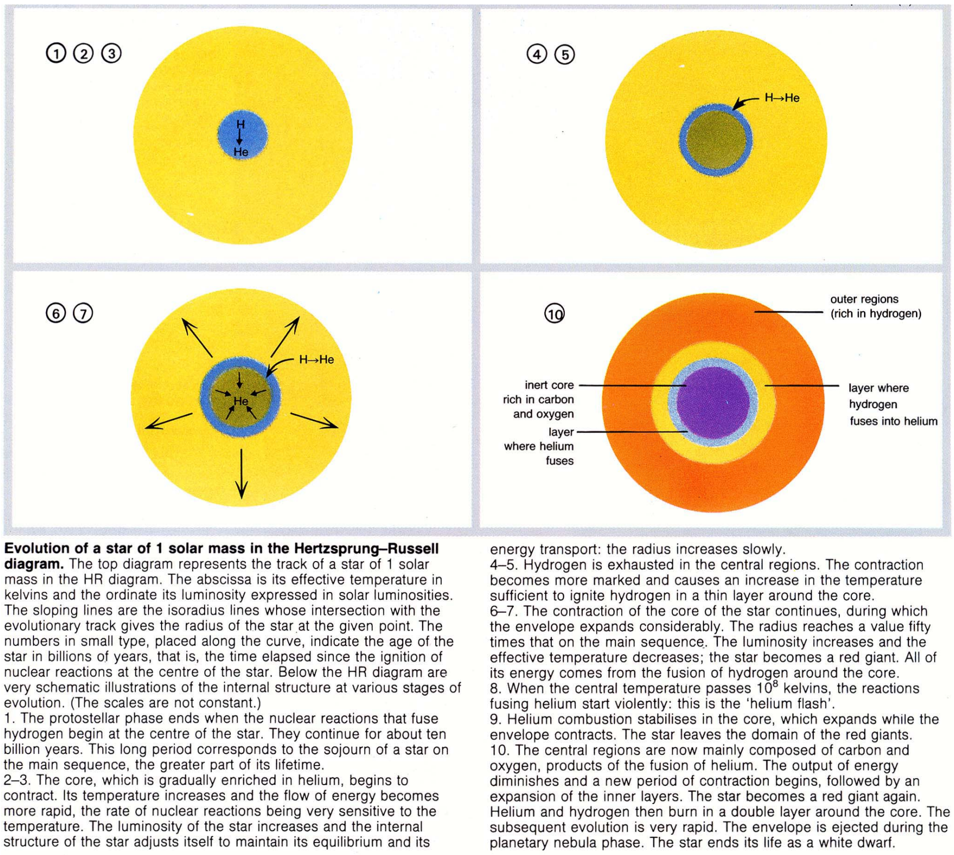


Models of the internal structure of stars on the main sequence. The internal structure of a main sequence star depends on whether its mass is above or below 1.5 solar masses ($M_\odot$). The diagram on the left represents the current state of the Sun. In the central regions, where some of the hydrogen has already been converted into helium, the chemical composition is as follows: hydrogen 36 per cent, helium 62 per cent, other elements 2 per cent. Elsewhere the composition has remained fixed at the initial values: hydrogen 73 per cent, helium 25 per cent, other elements 2 per cent. The energy produced by nuclear reactions in the interior of the Sun is transported outwards by photons, except near the surface where convection predominates. The diagram on the right shows the structure of a massive star of 9 solar masses. The central temperature exceeds that of the Sun, but the central density is less. Energy transport is by convection in the core and by radiation in the envelope. (For greater clarity the diagrams are not drawn to scale.)

mass ($M_\odot$)
1
0.989
0.52
energy transport
convective
radiative
radiative core
radius (km)
696 000
593 000
180 000
1 $M_\odot$
age: 4.5×10^9 years
(the Sun at present)
15.5×10^6
7.5×10^6
1.5×10^6
5 800
temperature (K)
164
19
0.09
density (g/cm^3)
mass ($M_\odot$)
9
8.7
2.7
energy transport
radiative
convective core
radius (km)
2 538 000
1 500 000
553 000
9 $M_\odot$
age zero
30.5×10^6
21×10^6
5.3×10^6
23 900
temperature (K)
10.1
5.4
0.08
density (g/cm^3)

図 1.2: 恒星の内部構造

太陽の進化:



① ② ③
H
He
④ ⑤
H→He
⑥ ⑦
H→He
He
⑩
outer regions
(rich in hydrogen)
inert core
rich in carbon
and oxygen
layer
where helium
fuses
layer where
hydrogen
fuses into helium

Evolution of a star of 1 solar mass in the Hertzsprung–Russell diagram. The top diagram represents the track of a star of 1 solar mass in the HR diagram. The abscissa is its effective temperature in kelvins and the ordinate its luminosity expressed in solar luminosities. The sloping lines are the isoradius lines whose intersection with the evolutionary track gives the radius of the star at the given point. The numbers in small type, placed along the curve, indicate the age of the star in billions of years, that is, the time elapsed since the ignition of nuclear reactions at the centre of the star. Below the HR diagram are very schematic illustrations of the internal structure at various stages of evolution. (The scales are not constant.)

1. The protostellar phase ends when the nuclear reactions that fuse hydrogen begin at the centre of the star. They continue for about ten billion years. This long period corresponds to the sojourn of a star on the main sequence, the greater part of its lifetime.

2–3. The core, which is gradually enriched in helium, begins to contract. Its temperature increases and the flow of energy becomes more rapid, the rate of nuclear reactions being very sensitive to the temperature. The luminosity of the star increases and the internal structure of the star adjusts itself to maintain its equilibrium and its energy transport: the radius increases slowly.

4–5. Hydrogen is exhausted in the central regions. The contraction becomes more marked and causes an increase in the temperature sufficient to ignite hydrogen in a thin layer around the core.

6–7. The contraction of the core of the star continues, during which the envelope expands considerably. The radius reaches a value fifty times that on the main sequence. The luminosity increases and the effective temperature decreases; the star becomes a red giant. All of its energy comes from the fusion of hydrogen around the core.

8. When the central temperature passes 10^8 kelvins, the reactions fusing helium start violently: this is the 'helium flash'.

9. Helium combustion stabilises in the core, which expands while the envelope contracts. The star leaves the domain of the red giants.

10. The central regions are now mainly composed of carbon and oxygen, products of the fusion of helium. The output of energy diminishes and a new period of contraction begins, followed by an expansion of the inner layers. The star becomes a red giant again. Helium and hydrogen then burn in a double layer around the core. The subsequent evolution is very rapid. The envelope is ejected during the planetary nebula phase. The star ends its life as a white dwarf.

図 1.3: 太陽の進化

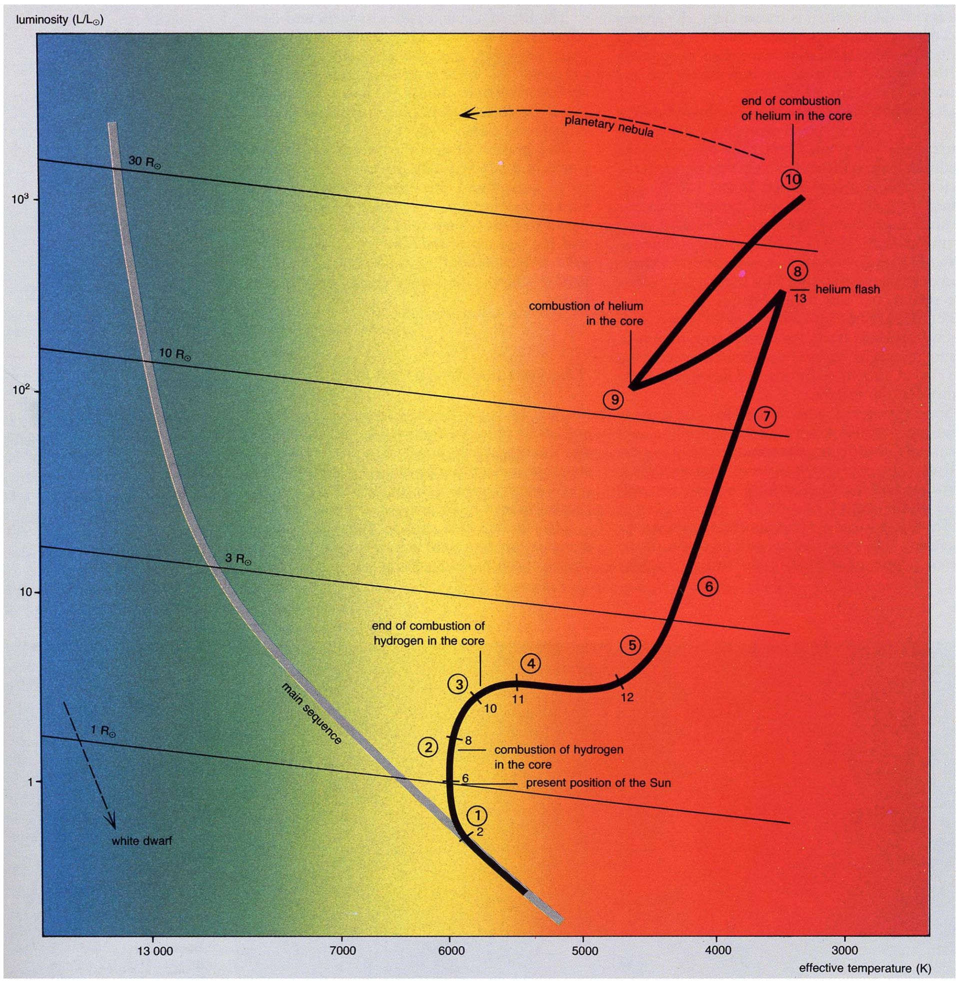
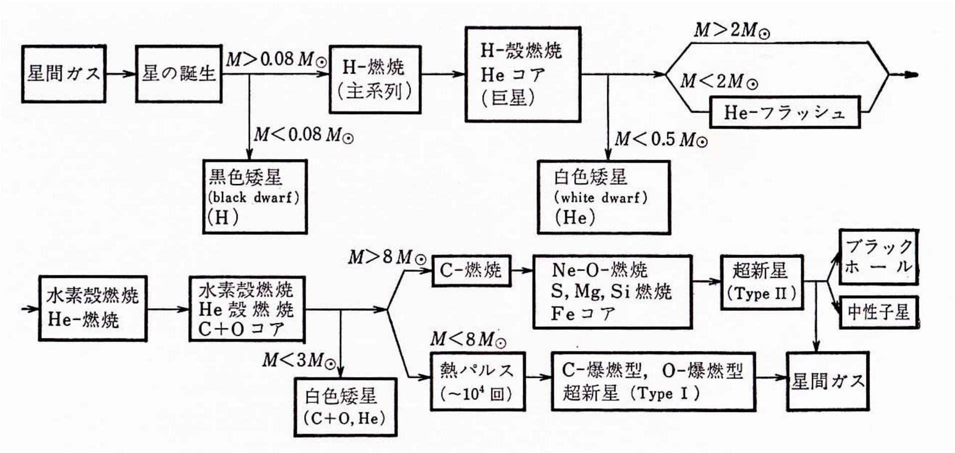


図 1.4: HR 図上での太陽の進化

恒星の一生:

高原先生の教科書による
$M < 0.08M_\odot$ 水素燃焼しない、ヘリウム燃焼をしない、炭素燃焼をしない。最終的に褐色矮星になる。
$0.08M_\odot < M < 0.5M_\odot$ 水素燃焼をする、ヘリウム燃焼をしない、炭素燃焼をしない。最終的に He 白色矮星。
$0.5M_\odot < M < 8M_\odot$ 水素燃焼をする、ヘリウム燃焼をする、炭素燃焼をしない。赤色巨星と漸近分岐の段階でほとんどの質量を放出し、最終的に $1.4M_\odot$ 又はその半分以下の質量のみを残し、C+O 白色矮星となる。
$3 \sim 8M_\odot$ の星は、超新星爆発をすると言われてきたが、質量放出とニュートリノ損失により、現在はそう思われていない。
$8M_\odot < M < 30M_\odot$ 水素燃焼をする、ヘリウム燃焼をする、炭素燃焼をする。最終的に中性子星になる。
$30M_\odot < M$ 水素燃焼をする、ヘリウム燃焼をする、炭素燃焼をする。最終的にブラックホールになる。
柴崎先生の謝金講師による
$0.8M_\odot < M < 7M_\odot$ 白色矮星となる ($0.8M_\odot$ は 0.08 の間違い?)。
$7M_\odot < M < 8M_\odot$ 炭素フラッシュにより超新星爆発を起こし、粉々になる。しかし、これは Ia 型超新星爆発ではない。縮退しているので、圧縮されず、温度が上がり、最終的に炭素が燃える。
$8M_\odot < M < 10M_\odot$ 酸素、ネオン、マグネシウムのコアが出来て安定に燃え、電子捕獲を起こし、超新星爆発する。
$10M_\odot < M < 30M_\odot$ 重力崩壊型超新星爆発を起こす。


星間ガス
星の誕生
$M > 0.08\,M_\odot$
H-燃焼（主系列）
H-殻燃焼 He コア（巨星）
$M > 2M_\odot$
$M < 2M_\odot$
He-フラッシュ
$M < 0.08\,M_\odot$
黒色矮星 (black dwarf) (H)
$M < 0.5\,M_\odot$
白色矮星 (white dwarf) (He)
水素殻燃焼 He-燃焼
水素殻燃焼 He 殻燃焼 C+O コア
$M > 8\,M_\odot$
C-燃焼
Ne-O-燃焼 S, Mg, Si 燃焼 Fe コア
超新星 (Type II)
ブラック ホール
中性子星
$M < 3M_\odot$
白色矮星 (C+O, He)
$M < 8\,M_\odot$
熱パルス（~10^4 回）
C-爆燃型，O-爆燃型 超新星（Type I）
星間ガス

星の進化のフローチャート

図 1.5: 恒星の進化のフローチャート

超新星爆発:

I 型) 水素の輝線を出さない。スペクトルや光度曲線の振舞いで Ia、Ib などに分かれる。
II 型) 水素の輝線を示す。さらに、IIP、IIL などに分かれる。

Ia 型超新星爆発:

光度曲線が数十日で、指数関数的に減衰する。連星中の C+O 白色矮星に物質が降りつもり、中心温度が高くなり、炭素の暴走的核融合反応によって起こる。物質が降り積もると中心温度は高くなるが、しばらくは縮退は解けない。縮退が解けるまで温度が上昇すると、一気に膨張が始まる。膨張がおとなしければ、そのまま温度が下がるが、膨張が激しいために衝撃波が始まり、その結果衝撃波通過後では核反応が起こるまで温度が上昇する。その結果核融合反応が爆発的に進む。超新星爆発後、$0.6M_{\odot}$ 程度の ^{56}Ni が作られ、その結果、次の反応が起こる。

$$^{56}\mathrm{Ni}-(5.6\mathrm{days})\to^{56}\mathrm{Co}-(72\mathrm{days})\to^{56}\mathrm{Fe} \tag{1.47}$$

よって、これにより光度曲線がよく説明できる。

II 型超新星爆発:

核融合反応が進み最終的に鉄からなるコアが形成される。鉄が最もエネルギー的に安定なので、核エネルギーは取り出せず、その結果重力崩壊を起こす。その時の強い核力により止められ、外側に衝撃波が発生する。その時、生ずる熱的なニュートリノが生成される。中性子星の束縛エネルギーは $\sim 10^{53}\mathrm{ergs}$ であり、そのほとんどはニュートリノにより外へ運ばれる。一方、$\sim 10^{51}\mathrm{ergs}$ 程度が物質に運動エネルギーとして与えられる。その機構は、主には核子ハードコアでのバウンドによるが、それでは不十分で、さらに電子ニュートリノが後押しをによるものと考えられている。詳細は未だ議論がある。

Ib 型は観測的には I 型だが、実際には WR 星のように外層の水素が吹き飛ばされた後に起こるコア崩壊型と考えられている。

重力崩壊型超新星爆発のシナリオ:

鉄のコア: 質量 $1.2\sim 1.6M_{\odot}$ の鉄のコアができ、重力収縮を起こす。

鉄の光分解: 温度が $10^{10}\mathrm{K}$ まで上昇した時に、鉄の光分解が起こる。これは、

$$^{56}\mathrm{Fe}\to 13\,^{4}\mathrm{He}+4\mathrm{n}-124\mathrm{MeV} \tag{1.48}$$

という吸熱反応。よって、温度が下がることになる。

重力崩壊: 温度が下がった結果、更に重力収縮が進みもう一度温度が上昇、再び光分解を行なう。その過程を繰り返すことで、重力崩壊が起こる。

電子捕獲: 電子のフェルミエネルギーが上昇する。電子エネルギーが 3.7MeV を越えた所で、以下の電子捕獲が起こる。

$$^{56}\mathrm{Fe}+\mathrm{e}^{-}\to^{56}\mathrm{Mn}+\nu_{\mathrm{e}}-3.7\mathrm{MeV} \tag{1.49}$$

中性子過剰核: 電子捕獲により、陽子が中性子に変わっていき、中性子過剰核が形成される。

原子核の溶解と自由中性子の出現: 原子核の溶解により自由中性子が出現。さらに、収縮を続けていく。

バウンドと衝撃波の形成: 核子と核子がぶつかる位に接近すると、核子のハードコアよりは縮めないので、バウンドする。その結果、衝撃波が形成され、超新星爆発が起こる。後には原子中性子星が残される。

電子ニュートリノによる後押し: バウンドだけでは爆発するのには不十分なので、大量に出来る電子ニュートリノにより、後押しが行なわれると言われている。

原子中性子星の形成: 全エネルギーはマイナスなので、全てが爆発して行くことはなく、その後には原子中性子星が残される。

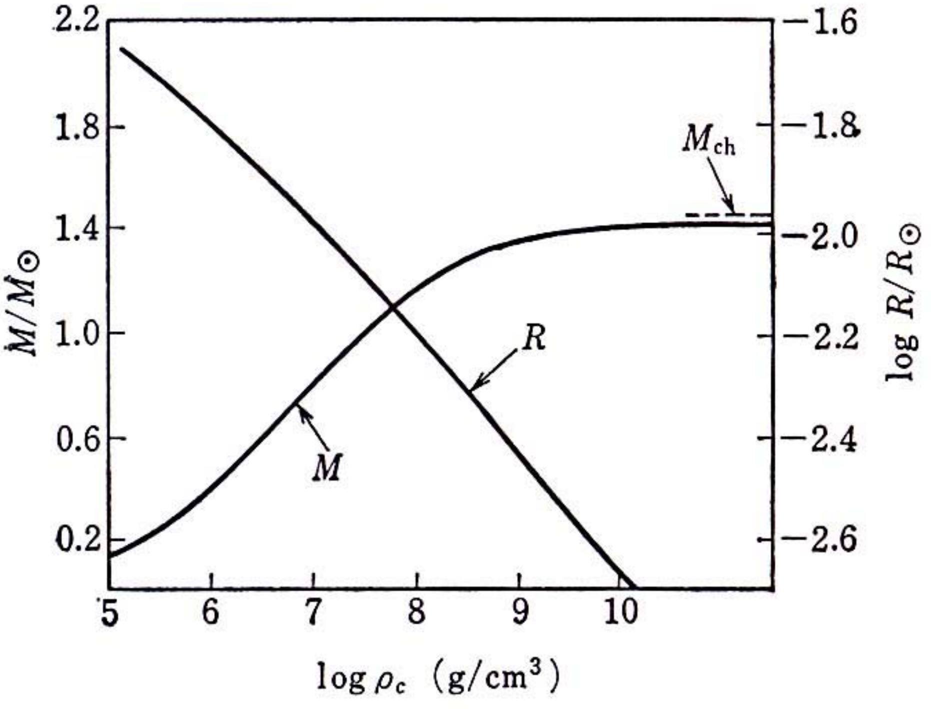
原始星:

星間雲の中の密度の濃い領域が重力崩壊することにより生まれる。星間雲は、重力的に束縛されている訳ではなく、熱的な圧力、磁気圧、角運動量などによる膨張を、外圧により閉じ込めている状態にある。その状態で何らかの原因で、膨張する圧力が小さくなると収縮を開始し、重力収縮を開始する。内部の圧力が高くなると、収縮が止まり中心から衝撃波が発生する。その結果温度が高くなり、力学的平衡状態に達する。これが原始星である。原始星は重力エネルギーを解放しながら赤外線などで輝き、さらにゆっくりと重力的に収縮を行なっていく。中心部の温度が十分高くなると核融合反応を起こし、主系列星となる。

白色矮星:

電子の縮退圧によって支えられた星であり、温度がゼロでも安定に存在できる。初期には $T \sim 10^5\mathrm{K}$ の温度を持ち、実際の冷却には非常に長い時間がかかる。

温度ゼロの白色矮星の構造を解くと図 1.6 になる。縮退しているので、温度に関係なく密度はフェルミ面の運動量の 3 乗に比例する。この領域では、質量が大きくなると中心密度は大きくなるが、逆に半径は小さくなる。さらに、密度が高くなると運動量は大きくなり、やがて相対論的になり、今度は中心密度に関わらず質量は $1.4M_\odot$ で一定になる。これがチャンドラセカールリミットと呼ぶ。これを越えると、電子の縮退圧では支えられなくなり、中性子星になる。



白色矮星の質量と半径の関係
ρ_c は白色矮星の中心密度を表わす.

図 1.6: 白色矮星の質量、半径、中心密度の関係

中性子星:

中性子の縮退圧により支えられている星。白色矮星は、電子の縮退圧によって支えられているが、さらに密度が上昇すると、電子のフェルミエネルギーが上昇するので、電子と陽子が合体し、中性子になる方が安定となる。その結果、中性子の縮退圧で支えられる星が誕生する。これを中性子星と呼ぶ。別の言い方をすると中性子星は巨大な原子核と思うことも可能である。

言うまでもなく、自由中性子は β 崩壊を起こし、陽子、電子、電子ニュートリノに崩壊する。一方、中性子星中の中性子は安定に存在している。中性子星とは言え実は、中性子に対して数%程度の個数密度を持つ陽子と電子が存在している。よって、中性子が崩壊して電子を放出したくても、そこには既に縮退した電子が存在するために、パウリの排他律により崩壊できないのである。

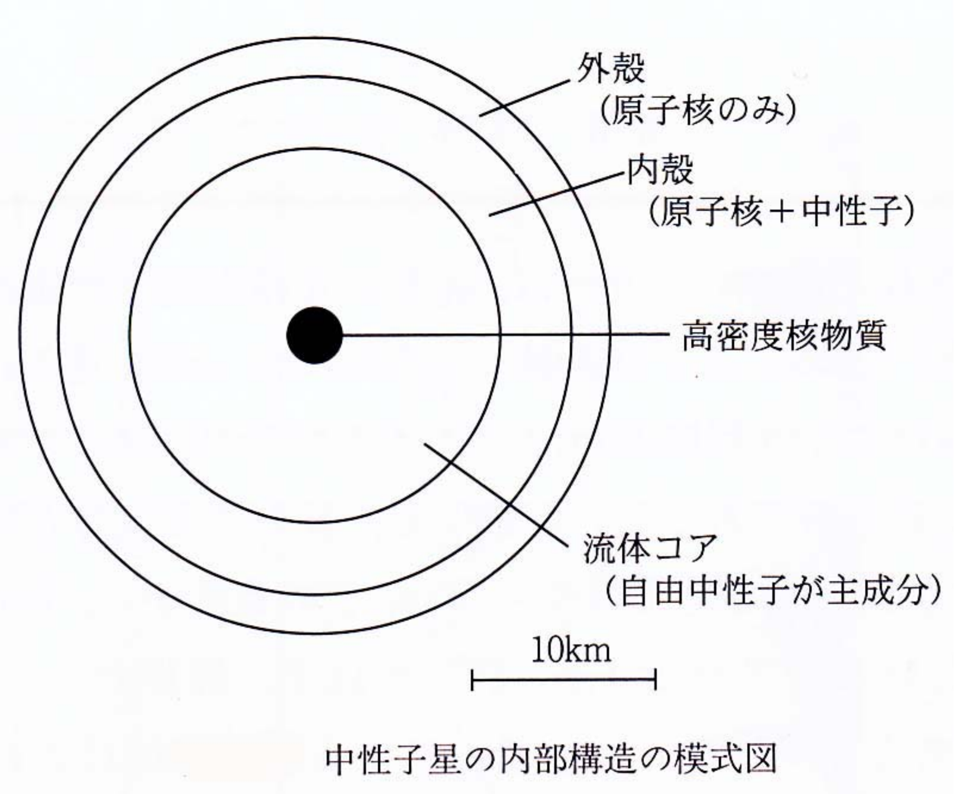


図 1.7: 中性子星の内部構造

中性子星の内部構造は図 1.7 の様になっている。外殻は、格子を組んだ固体の原子核で、中性子過剰となっている。内殻は、原子核と中性子の共存状態。自由中性子の部分は、超流動状態であると考えられている。さらに、内側はクォーク物質でできている。おおよそ半径 10km、質量が $1.4M_\odot$ である。$\sim 10^{12}$G の磁場を持つものがあり、電波パルサー、X 線パルサーとして観測される。

中性子星は主には、II 型超新星から誕生すると考えられている。強い磁場は、星表面の磁場がプラズマに凍結されてそのまま爆縮することで作られると考えられている。太陽表面は黒点では $2000 \sim 3000$G だが、平均的には 20G 程度である。太陽半径は 6.96×10^{10}cm であり、磁束の数を保存して中性子星の半径 10km まで圧縮すると、0.1×10^{12}G 程度となる。磁極の大きさは中性子星の一部なので、$\sim 10^{12}$G 程度は説明できる。

一方、白色矮星に質量が降りつもり核融合反応で起こる Ia 型超新星爆発でも、燃焼よりも速く陽子の電子捕獲が進むと中性子星を作る可能性がある。

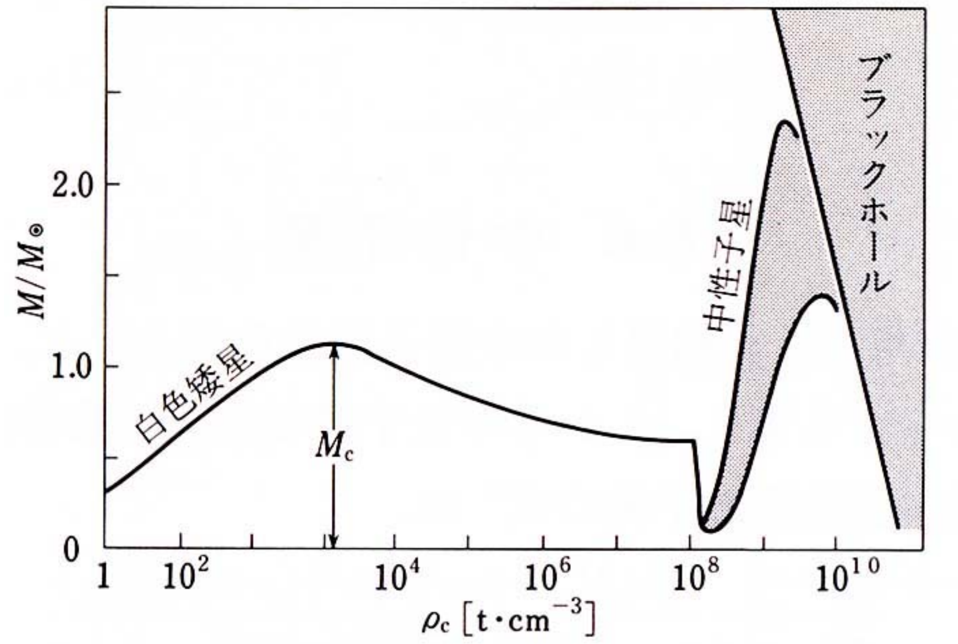
(恒星質量) ブラックホール:

さらに重い星が重力崩壊するとブラックホールになる。ブラックホールには、上限も下限もないが、宇宙物理学的に作る道筋があり、実際に存在しているかどうかは別の話しである。太陽組成の恒星では、$100M_\odot$ を越える恒星は存在できないし、$30M_\odot$ 以下の恒星はブラックホールになれない。よって、上限と下限があり、実際観測されているブラックホール候補天体の質量は $3 \sim 15M_\odot$ である。

図 1.8 は、色々なコンパクト星の中心密度と質量の関係を書いたものである。このうち、白色矮星のうちで

$$\frac{dM}{d\rho_c} < 0 \tag{1.50}$$

の領域は存在できない。



白色矮星および中性子星の質量と中心密度の関係。M_c は電子捕獲を考慮した場合の白色矮星の限界質量。

図 1.8: コンパクト星の中心密度と半径の関係

これは以下のように示すことができる。簡単のために、白色矮星の密度はどこも同じとすると、星のエネルギーは内部エネルギーと重力エネルギーなので

$$M_r \equiv M(<r) = \int \rho(r)dV = \int \rho(r)4\pi r^2 dr \tag{1.51}$$

と書くと、

$$E = \int \varepsilon dV - \int \frac{GM_r}{r}\rho dV \tag{1.52}$$

$$= M\frac{\varepsilon_c}{\rho_c} - GM^{5/3}\rho_c^{1/3} \tag{1.53}$$

である。ここで、ρ_c に対する安定性を調べるので、ρ_c に対する変分を 2 次まで取り、1 次が 0 の点での 2 次の値の符合を調べると、

$$\frac{dM}{d\rho_c} < 0 \tag{1.54}$$

の時に 2 次微分は負になる。すなわちエネルギー的に極大になっている。ということは、不安定である、ということである。詳しい計算は朝倉現代物理学講座 13 「宇宙物理学」, 佐藤文隆, 原哲也, の p115 あたりにある。

1.2.2 白色矮星と中性子星の質量と半径の関係

(柴崎先生の講義に従い、いずれ書く)

1.2.3 星団と銀河

散開星団と球状星団:

恒星はしばしば集団をなして分布している。その形状や年齢で、2 種類の星団が存在している。

散開星団 星の個数: $10^2 \sim 10^4$。半径: ~ 5pc。形: ゆるく結合し、不定形。明るい星: OB 型星。重元素量: 多い。分布: 銀河面。

球状星団 星の個数: $10^4 \sim 10^6$。半径: ~ 50pc。形: 密に結合しほぼ球状。明るい星: 赤色巨星。重元素量: 少ない。分布: 銀河ハロー。

我々の銀河系の構造:

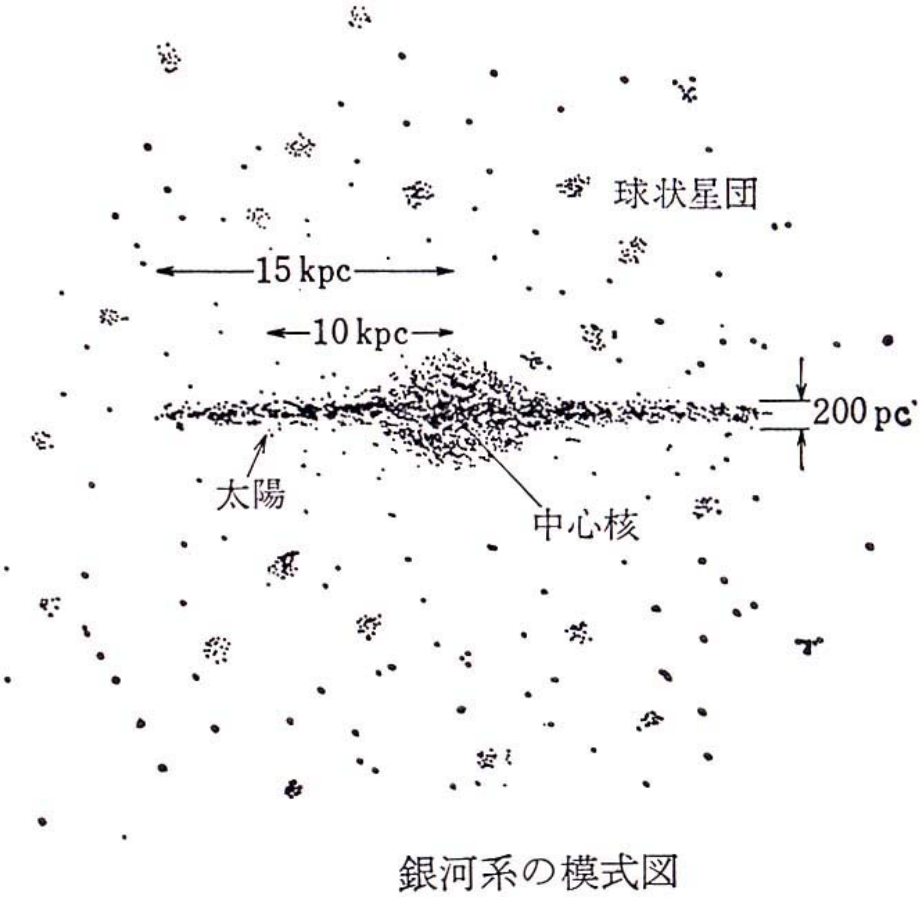


図 1.9: 我々の銀河系の模式図

質量は $\sim 2 \times 10^{11} M_{\odot}$ である。

種族 I と種族 II の星:

種族 I は銀河面に属しており、重元素量が多く若い星も存在する。種族 II は、球状星団と共にハローに属する星で、重元素量が少なく古い。銀河に対する回転速度とランダム速度を比較すると、種族 I では回転速度成分が大きいのに対し、種族 II では、ランダム運動が大きい。

銀河形成のシナリオ:

まず球状のハローとバルジが形成され、その後角運動量の大きいガスが円盤を作ったと考えられている。

星間ガス:

幾つかのフェーズの星間ガスが観測されている。

分子雲: 分子状態 $T = 10 \sim 30\mathrm{K}$、$n = 10^3 \sim 10^6\mathrm{cm}^{-3}$、$\mathrm{size} = 1 \sim 10\mathrm{pc}$。電波の分子線で観測される。

HI ガス雲: 原子状態 $T \sim 80\mathrm{K}$、$n \sim 20\mathrm{cm}^{-3}$、$\mathrm{size} \sim 10\mathrm{pc}$。電波の 21cm 波で観測される。

雲間物質、希薄ガス: 原子状態 $T \sim 6000\mathrm{K}$、$n \sim 0.1\mathrm{cm}^{-3}$、HI ガス雲と HI ガス雲の間の領域。HI ガスと雲間物質をならした HI 領域の平均密度は $n \sim 1\mathrm{cm}^{-3}$。電波の 21cm 波で観測される。

HII 領域: 水素の電離状態 $T \sim 8000\mathrm{K}$、$n = 0.1 \sim 10^4\mathrm{cm}^{-3}$、$\mathrm{size} = 1 \sim 10\mathrm{pc}$。OB 型星や白色矮星による光電離。H$\alpha$ や熱的電波により観測される。

熱いプラズマ成分: 重元素の電離状態 $T = 2 \times 10^5 \sim 10^8\mathrm{K}$、$n = 10^{-4} \sim 10^{-1}\mathrm{cm}^{-3}$、$\mathrm{size} = 10 \sim 100\mathrm{pc}$。超新星爆発や WR 星、OB 型星の星風による衝撃波加熱。OB 型星を観測した場合の 5 回電離酸素の吸収線、X 線で観測される。

ダスト $\sim 1\mu\mathrm{m}$。分子雲や HI ガス雲と共存する。

宇宙線 陽子。$10^8 \sim 10^{20}\mathrm{eV}$。$U_{\mathrm{CR}} \sim 1\mathrm{eV/cm}^{-3}$。地球周辺では電子は陽子に比べて 1/100 程度に過ぎない。

磁場 $B = 3 \sim 5\mu\mathrm{G}$、$U_{\mathrm{B}} = 0.2 \sim 0.5\mathrm{eV/cm}^{-3}$。

CMB $U_{\mathrm{CMB}} = 0.262\mathrm{eV/cm}^{-3}$, ($T = 2.728\mathrm{K}$)。

Optical Photon: Star Light 我々の銀河系内の平均値、$U_{\mathrm{opt}} \sim 0.6\mathrm{eV/cm}^{-3}$ (Longair “High Energy Astrophysic” Vol2, p.277)。

我々の銀河系の場合、中性水素が星間ガスの質量のほとんどを占めており、銀河系全体をならすと、密度は $n \sim 1\mathrm{cm}^{-3}$ である。星間ガスの質量が、銀河系全体の質量の $\sim 5\%$程度である。

宇宙組成:

楕円銀河と渦状銀河:

質量は $10^6 \sim 10^{12}M_{\odot}$。渦状銀河は一般的に $1 \sim 10\%$程度の冷たいガスを持ち、星生成も行なっている。一方、楕円銀河は、冷たいガスが非常に少なく、星生成も行なっていない古い銀河である。一部は X 線プラズマの状態の高温星間ガスを持ち、その量は $1 \sim 10\%$程度である。

活動銀河核と巨大ブラックホール:

ほとんどの銀河の中心には、$10^6 \sim 10^9M_{\odot}$ の質量の巨大ブラックホールが存在している。その多くは、活動的であり、電波から X 線まで $10^{42} \sim 10^{47}\mathrm{ergs\ sec}^{-1}$ の光度で輻射を行なっている。ビッグバン後に一度中性になった宇宙を再加熱し、電離させたと考えられたなど、宇宙の進化に大きな影響を与えた。また、この巨大ブラックホールは銀河形成と深い繋がりがあると考えられている (図 1.13)。

ここで余談。Schwarzschild のブラックホールを考える場合、Schwarzschild 半径は

$$r_g = 2\frac{GM}{c^2} \tag{1.55}$$

$$= 3 \times 10^5\mathrm{cm}\left(\frac{B_{\mathrm{BH}}}{B_{\odot}}\right) \tag{1.56}$$

で与えられる。これをブラックホールの「半径」とみなす。質量 $M_{\mathrm{BH}} = 1M_{\odot}$ のブラックホールでは、半径と密度は

$$M_{\mathrm{BH}} = 1M_{\odot} \tag{1.57}$$

$$r_g = 3 \times 10^5\mathrm{cm} = 3\mathrm{km} \tag{1.58}$$

$$\rho = 1.8 \times 10^{16}\mathrm{g/cm}^3 \tag{1.59}$$

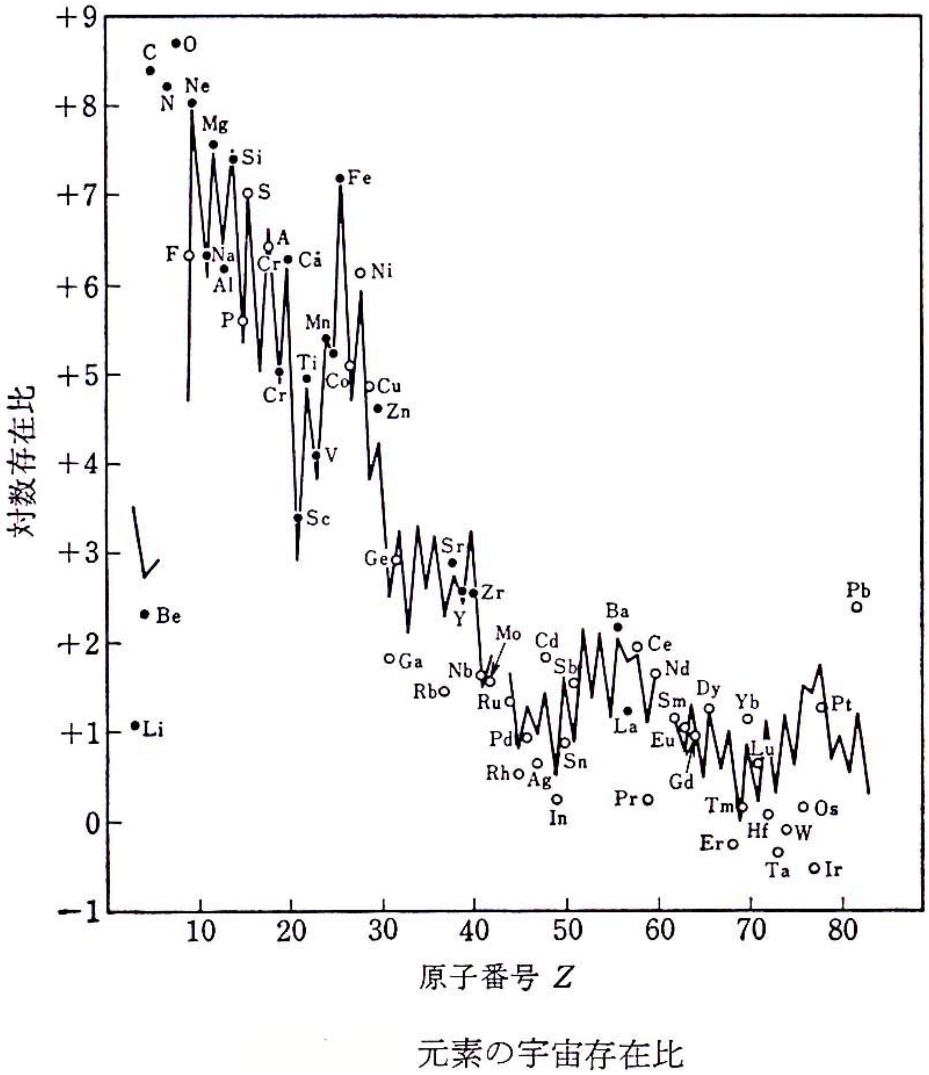


図 1.10: 宇宙組成

となる。一方、SMBH として我々の銀河系の SMBH を考えると

$$M_{\rm BH} = 2.6 \times 10^6 M_\odot \tag{1.60}$$

$$r_g = 7.7 \times 10^{11}{\rm cm} = 11 R_\odot \tag{1.61}$$

$$\rho = 2.7 \times 10^3 {\rm g/cm}^3 \tag{1.62}$$

となり、さらに大きな SMBH として、

$$M_{\rm BH} = 1 \times 10^9 M_\odot \tag{1.63}$$

$$r_g = 3 \times 10^{14}{\rm cm} = 20{\rm AU} \tag{1.64}$$

$$\rho = 0.02{\rm g/cm}^3 \tag{1.65}$$

となり、水よりもはるかに軽くなってしまう。

ブラックホールとしては、$4 \sim 16 M_\odot$ の「恒星質量ブラックホール」と $10^6 \sim 10^9 M_\odot$ の「銀河中心核の巨大ブラックホール」の存在は確立している。それ以外ブラックホールは見つかっていないか、まだ疑問の余地が残る。ブラックホールとしては、どの様な質量でも取り得るので、作る道筋がないのだと考えられる。

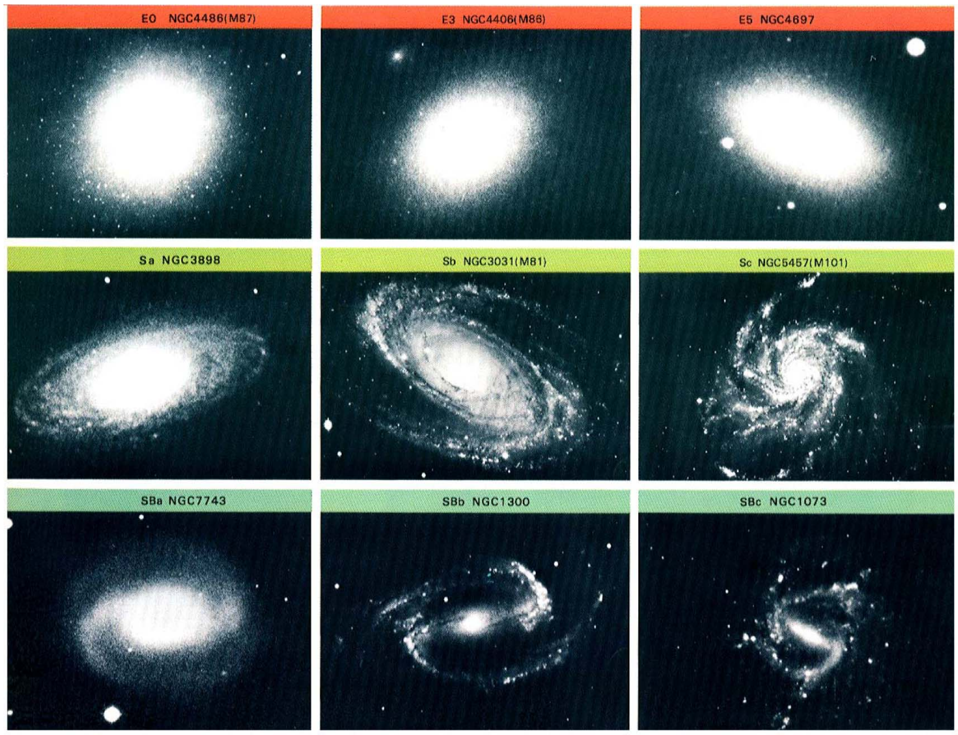

E0 NGC4486(M87)
E3 NGC4406(M86)
E5 NGC4697
Sa NGC3898
Sb NGC3031(M81)
Sc NGC5457(M101)
SBa NGC7743
SBb NGC1300
SBc NGC1073

図 1.11: 様々な銀河

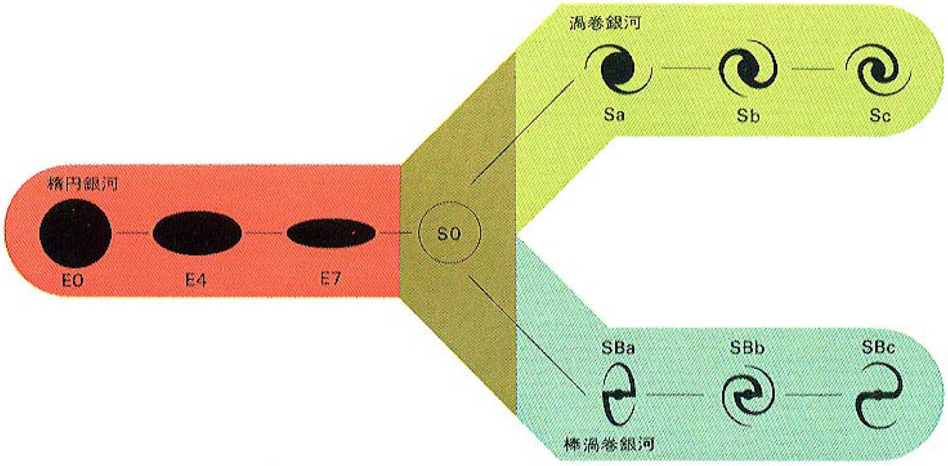

渦巻銀河
Sa
Sb
Sc
楕円銀河
E0
E4
E7
S0
SBa
SBb
SBc
棒渦巻銀河

図 1.12: ハッブルの分類

銀河集団:

数十から数千の銀河が、重力的に束縛され集団で存在することが知られている。これを銀河群、銀河団と呼ぶ。これらの銀河集団には、ほとんどの場合 X 線プラズマが付随し、その質量は銀河を合わせた質量と同じかそれよりも大きい。

銀河間物質:

銀河団に属しない領域でも、$L\alpha$ 雲や熱い銀河間物質などと呼ばれる物質が存在している。

暗黒物質:

21cm 波を用いて銀河の回転速度を調べると、$R = 2 \sim 50$kpc の所まで一定速度で回転している (図 1.14)。光っている質量は $R_{\rm HO} = 10 \sim 20$kpc 内に入るため、この回転曲線は光で見えている星の質量だけでは説明できない。約数倍の暗黒物質が必要と考えられている。銀河団の X 線プラズマの観測からも、X 線プラズマや銀河の質量だけでは、質量を

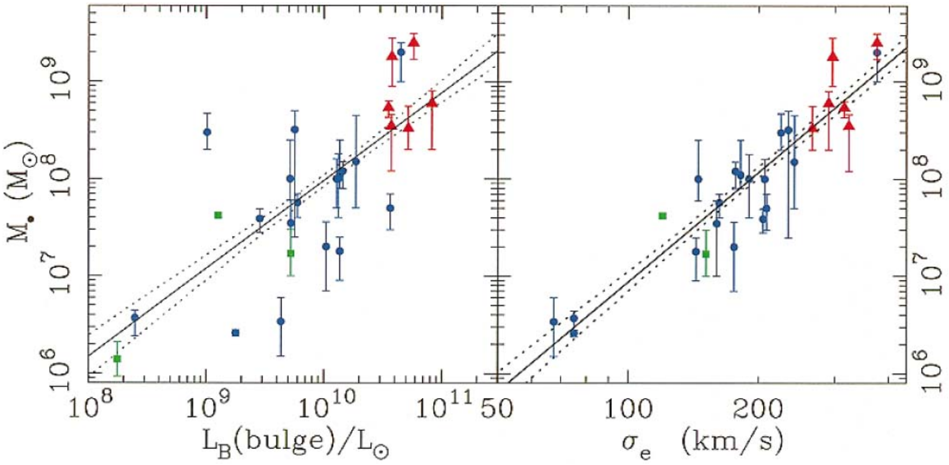


図 1.13: 色々な銀河でのバルジと中心核ブラックホール質量の関係 (Gebhardt *et al.*2000)

説明できないため、暗黒物質の存在すると考えられている。

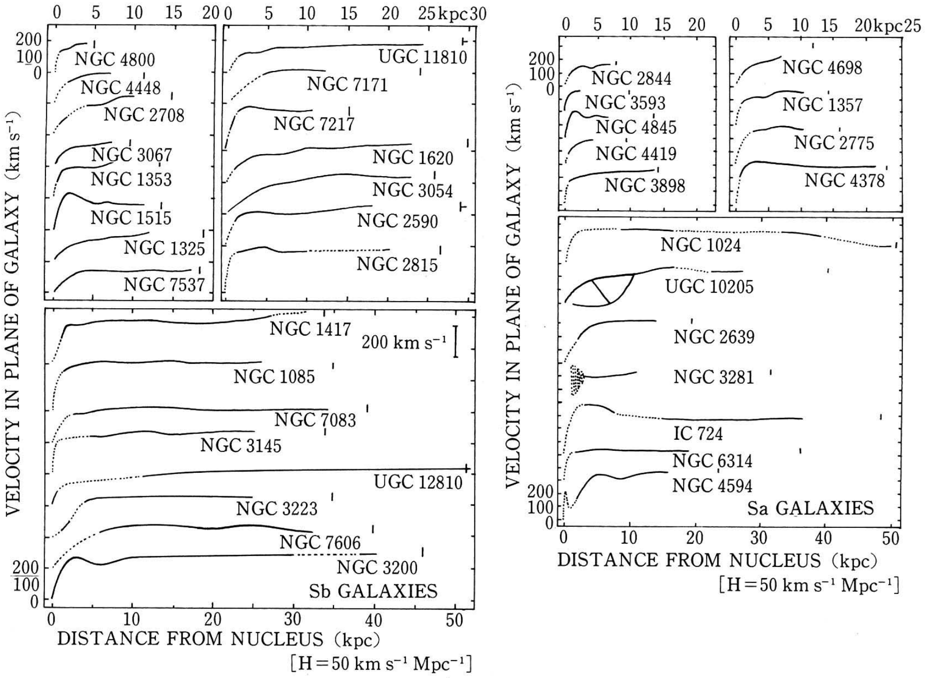


図 2.5　S型銀河の中性水素21cm 電波輝線によって測られた回転曲線.〔文献 8）及び Rubin, V., et al. 1985, *Ap. J.*, **289**, 86 より転載〕

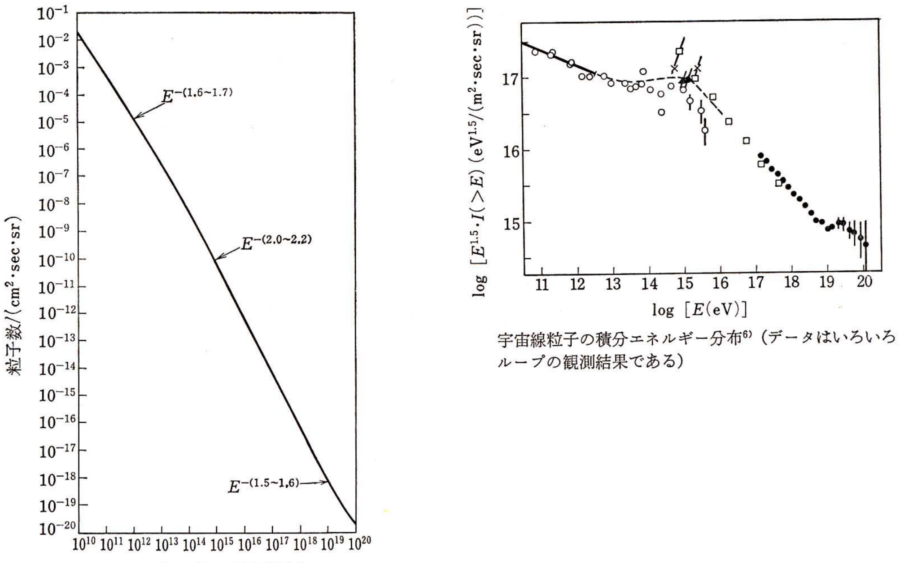
図 1.14: 渦状銀河銀河の中性水素 21cm 電波輝線によって得られた回転曲線

宇宙線:

宇宙線の主成分は陽子である。地球周辺では電子は陽子の 1/100 程度に過ぎないことが分かっている。これは、陽子は磁場による冷却がほとんど効かないのに対し、電子は銀河磁場によるシンクロトロン放射により冷却が効くためだと考えられている。

$10^{15} \sim 10^{16} eV/\mathrm{n}$ の折れ曲がりを"knee"、$\sim 10^{19} eV/\mathrm{n}$ の構造を"ankle" と呼ぶ。knee は、銀河磁場に閉じ込められるリミットと考えられており、それゆえこれ以下のエネルギーの宇宙線は銀河系内起源、それ以上は銀河系外起源と考えられている。宇宙線は、地球に降り注ぐ荷電粒子による空気シャワーと共に、分子雲との衝突によるガンマ線や、シンクロトロン電波としても観測されている。

宇宙線の強度は太陽の活動と反相関がある。これは、太陽活動が活発になると、太陽は磁場を含む太陽風を放出し、それにより太陽系外からの宇宙線が太陽系に侵入しにくくなるためだと考えられている。



宇宙線粒子全成分の積分エネルギー分布

宇宙線粒子の積分エネルギー分布[6] (データはいろいろなグループの観測結果である)

図 1.15: 宇宙線 (主に陽子) の積分スペクトル。スペクトルは I($> E$) の形で書いてある。

第2章　宇宙の観測: 電波からガンマ線

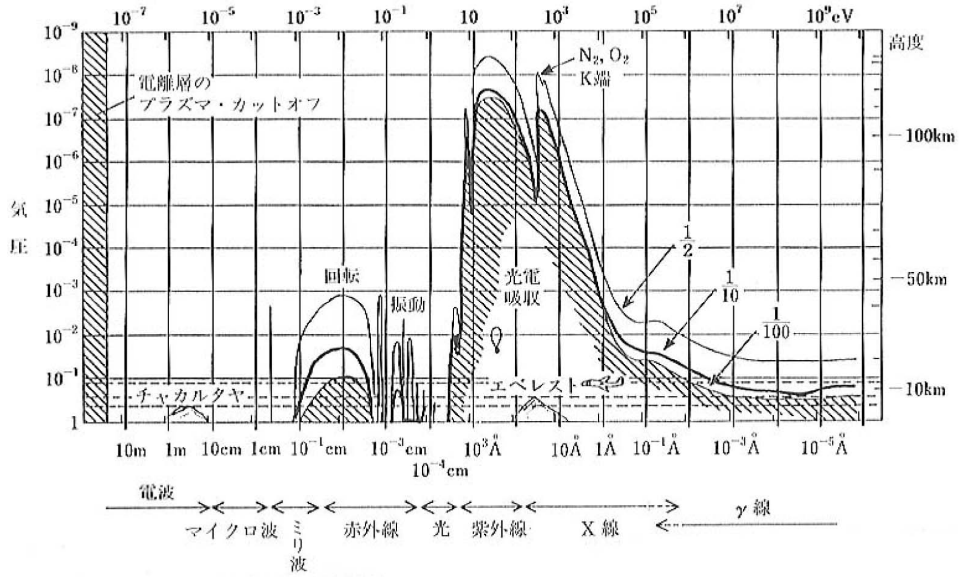


図 2.1: 大気での電磁波の透過

2.1　電波観測

回折限界:

天文学は、やはりイメージングである。その原理的限界は、回折限界によって決まる。すなわち、観測波長を λ、アンテナや鏡の大きさを L とすると、回折限界は、

$$\frac{\lambda}{L}\mathrm{rad} = 2.06\times10^{5\prime\prime}\frac{\lambda}{L} = 20.6''\left(\frac{\lambda}{1\mathrm{cm}}\right)\left(\frac{L}{100\mathrm{m}}\right)^{-1} \tag{2.1}$$

$$= 0.043''\left(\frac{\lambda}{5000\mathrm{A}}\right)\left(\frac{L}{2.4\mathrm{m}}\right)^{-1} \tag{2.2}$$

$$= 0.3\mathrm{mas}\left(\frac{\lambda}{1\mathrm{cm}}\right)\left(\frac{L}{R_\oplus = 6.37\times10^8\mathrm{cm}}\right)^{-1} \tag{2.3}$$

である。地球の半径 $R_\oplus = 6.37\times10^8$cm の大きさで、波長 $\lambda = 1$cm (周波数 $f = 30$GHz) で観測した場合、空間分解能は 0.3 ミリ秒角となる。

センチメートル電波:

シングルディッシュ、干渉計などがある。干渉計は VLA~VSOP まで様々なスケールがある。大きいと、それだけ解像度が上がるが、その分絵を作るのには時間がかかる。シンクロトロン、熱的、21cm が観測される。空間分解能はシングルディッシュではそれほど高くないが、VLBI では 1mas 程度が、VSOP に至っては 0.1mas が実現されている ($R_\oplus = 6.37\times10^8$cm、$\lambda = 1$cm から求まる空間分解能は 0.3mas)。しかし、実際の天体を観測する時にプラズマによる

シンチレーションの問題で、限界よりも解像度は上がらない。

ミリ波、サブミリ波:

地上の電波望遠鏡。シングルディッシュ、干渉計がある。干渉計は VLBI 方式は使われていない。主に分子線や低温のダストからの熱放射が観測対象。

遠赤外線:

バルーン及び、衛星を用いた観測が主体。CMB やダストによる熱輻射が観測される。

2.2　光赤外と紫外線観測

近赤外、光:

観測技術が似ているので、合わせて光赤外と呼ぶ。地上の観測が主で、ハッブルなど宇宙からの観測も行なわれる。宇宙は直径 2.4m のハッブル宇宙望遠鏡によってほぼ回折限界で観測されており、5000A では 40mas、2μm の近赤外では $0.1 \sim 0.2$arcsec である。地上では、8m クラスの望遠鏡が現在の最大。地上の 8m 望遠鏡では大気のシーイングで決まり、それは 0.2arcsec 程度。まだ回折限界に到達していないので、空間分解能の面ではハッブルが上。Adaptive Optics が動けば、8m 望遠鏡も追い付ける。KECK 望遠鏡の様に 8m クラスの望遠鏡を用いた光の干渉計も進みつつある。

紫外線:

衛星からの観測が主体。13.6eV=912A よりも波長が短くなると極端に星間吸収により見ることのできる領域が狭くなる。

2.3　X 線とガンマ線

X 線:

衛星及びバルーンからの観測が主体。$E_{\rm X} < 10$keV では、X 線ミラーが使用でき、「すばる」望遠鏡並の $1''$ 以下の解像度が達成されている。

ガンマ線:

MeV から GeV は衛星やバルーンによって観測される。TeV は、空気チェレンコフを用いた観測が行なわれている。

2.4　光子以外の観測手段

宇宙線:

地上の空気シャワーや、シンチレーションによる観測。

ニュートリノ:

水チェレンコフなどによる観測。

重力波:

レーザー干渉計。

第3章　輻射の物理の基礎とブラックボディ

3.1　Radiative Transfer の基礎

3.1.1　The Specific Intensity and Its Moments

Definition of Specific Intensity or Brightness I_ν

小さい面積 dA に対して垂直方向の小さい立体角 $d\Omega$ に対して、単位時間、単位周波数当たりで流れている (その場所で湧き出しがあるという意味ではない) エネルギーを dE とすると、Specific Intensity or Brightness I_ν は以下のように書ける。

$$I_\nu = \frac{dE}{dAdtd\Omega}(\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{ster}^{-1}\text{Hz}^{-1}) \tag{3.1}$$

I_ν の全方向の平均を J_ν と定義すると、

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi}\int I_\nu d\Omega(\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{ster}^{-1}\text{Hz}^{-1}) \tag{3.2}$$

となる。

Flux

輻射が dA から角度 θ 方向へ出ていく場合には、実行的な面積が dA が $\cos\theta dA$ になるので、単位時間あたり、単位周波数あたりに放出されるエネルギーは

$$dF_\nu(\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{ster}^{-1}\text{Hz}^{-1}) = I_\nu\cos\theta d\Omega \tag{3.3}$$

これを立体角で積分する。

$$F_\nu(\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}) = \int I_\nu\cos\theta d\Omega \tag{3.4}$$

その面積 dA に与える圧力は、輻射の通る方向に対してなす角度 θ をかけて、エネルギーと運動量の関係 $E = pc$ から次のように書ける。

$$p_\nu(\text{dynes cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}) = \frac{1}{c}\int I_\nu\cos^2\theta d\Omega \tag{3.5}$$

F_ν, p_ν, I_ν を周波数で積分したトータル Flux、圧力、Intensity。

$$F(\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-2}) = \int F_\nu d\nu \tag{3.6}$$

$$p(\text{dynes cm}^{-2}) = \int p_\nu d\nu \tag{3.7}$$

$$I(\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{ster}^{-1}) = \int I_\nu d\nu \tag{3.8}$$

Luminosity

観測者が観測する Flux F'_ν (上で示した F は輻射を放出しているの方の値であり、F'_ν は観測者側の別物であることに注意) から、距離 D に位置する相手の天体の光度 Luminosity L を計算する際には、相手の星の輻射の等方性に注意する必要がある。

通常の恒星の様に球対称に放出している場合は、

$$F'_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi D^2} \tag{3.9}$$

と書ける。一応簡単に証明する。半径 R の球対称の恒星表面上での単位面積あたりに単位時間に単位周波数あたりに放出されるエネルギーは

$$F_\nu = \int_{\theta<\frac{\pi}{2}} I_\nu \cos\theta d\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} I\nu \cos\theta \cdot 2\pi \sin\theta d\theta = \pi I_\nu \tag{3.10}$$

Luminosity は恒星の表面積をかけて、

$$L_\nu = 4\pi R^2 F_\nu = 4\pi^2 R^2 I_\nu \tag{3.11}$$

を得る。さらに明らかに等方的に放出されているので、観測者側の Flux は

$$F'_\nu = \frac{\pi R^2}{D^2} I_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi D^2} \tag{3.12}$$

一方、降着円盤の様に半径 R の円盤上の場合は、ディスク法線と観測者方向がなす角度を θ とし、観測者側の観測装置の面積を dS、円盤から見てその観測装置の面積を見込む立体角を $d\Omega$ とすると、

$$F'_\nu dS = \pi R^2 \cdot I_\nu \cos\theta d\Omega \tag{3.13}$$

$$d\Omega = \frac{dS}{D^2} \tag{3.14}$$

$$F'_\nu = \frac{\pi R^2 \cos\theta}{D^2} I_\nu \tag{3.15}$$

となる。円盤での Flux と Luminosity は、円盤は上下に輻射していることに注意すると以下のように計算される。

$$F_\nu = \int_{\theta<\frac{\pi}{2}} I_\nu \cos\theta d\Omega = \pi I_\nu \tag{3.16}$$

$$L_\nu = 2\pi \times R^2 F_\nu = 2\pi^2 R^2 I_\nu \tag{3.17}$$

よって、Luminosity と観測者が観測する Flux の関係は

$$F'_\nu = \frac{L_\nu \cdot \cos\theta}{2\pi D^2} \tag{3.18}$$

となる。球対称の星と円盤を比べた場合、Face-on の場合で 2 倍の違いがあることに注意する。

Radiatioin Energy Density u_ν

Specific Intensity or Brightness I_ν は

$$I_\nu = \frac{dE}{dAdtd\Omega} (\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{ster}^{-1}\text{Hz}^{-1})$$

である。これは $dV = dAcdt$ の体積に存在するフォトンが dA を通って出ていったものなので、$d\Omega$ 方向に進んでいる単位周波数あたりの輻射のエネルギー密度 u_ν とすると、

$$u_\nu(\Omega) = \frac{I_\nu}{c} (\text{ergs cm}^{-3}\text{ster}^{-1}\text{Hz}^{-1}) \tag{3.19}$$

となる。Ω を全部積分すると、単位周波数あたりの輻射エネルギー密度は

$$u_\nu = \int u_\nu(\Omega) d\Omega = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega (\mathrm{ergs\ cm^{-3} Hz^{-1}}) \tag{3.20}$$

となる。もうこうなると、I_ν の代わりに J_ν と書いても良く、

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu (\mathrm{ergs\ cm^{-3} Hz^{-1}}) \tag{3.21}$$

周波数で積分すると、全輻射エネルギー密度 u が求められる。

$$u = \int u_\nu d\nu (\mathrm{ergs\ cm^{-3}}) \tag{3.22}$$

Constancy of Specific Intensity Along Rays in Free Space

2 枚の小さい面積 dA_1 と dA_2 が、距離 R 離れてお互いに垂直に向き合っており、dA_1 から dA_2 へ流れている輻射について考える。dA_1 を通過する時点と、dA_2 を通過する時点での Specific Intensity をそれぞれ I_1、I_2 とし、dA_1 から dA_2 を見込む角度 $d\Omega_2$、逆を度 $d\Omega_1$ とする。

1 の立場から考えた場合、dA_1 を通過する時点でのエネルギー dE_1 は、

$$dE_1 = I_1 dA_1 d\Omega_2 dt \tag{3.23}$$

となる。一方、2 の立場で考えた場合、dA_2 を通過するエネルギー dE_2 は、

$$dE_2 = I_2 dA_2 d\Omega_1 dt \tag{3.24}$$

となる。エネルギー保存則から、

$$dE_1 = I_2 dA_2 d\Omega_1 dt = dE_2 = I_2 dA_2 d\Omega_1 dt \tag{3.25}$$

である。

一方、dA_1、dA_2、$d\Omega_1$、$d\Omega_2$、R には次の関係がある。

$$d\Omega_2 = \frac{dA_2}{4\pi R^2} \tag{3.26}$$

$$d\Omega_1 = \frac{dA_1}{4\pi R^2} \tag{3.27}$$

この 2 つから R を消して式変形すると

$$dA_2 d\Omega_1 dA_2 d\Omega_1 \tag{3.28}$$

となる。よって、

$$I_1 = I_2 \tag{3.29}$$

となる。I_2 は直接的な観測量なので、距離に関係なく I_1 を求めることができる。

この結果の言わんとしていることは、観測装置から見て観測する天体が十分に大きい立体角を持ち、それを有効面積 dA、積分立体角 $d\Omega$ を持つ観測装置で観測を行なう場合、天体までの距離によらず観測される表面輝度は一定となる、ということである。天体が θ ほど傾いていたとしても、Specific Intensity に角度依存がなければ、この値はかわらない。この様に拡がった天体の表面輝度のことを Brightness と呼ぶ。

視野よりも大きく拡がった場合には直観的にわかるが、視野よりも小さい場合には離れれば離れるほど暗くなっていく。これは、天体が実は視野よりも小さいためで、$I_2 = I_1$ を測定したことにならない。もしも、空間分解能を上げてその天体を空間的に分解すると、表面輝度はその天体の値となる。

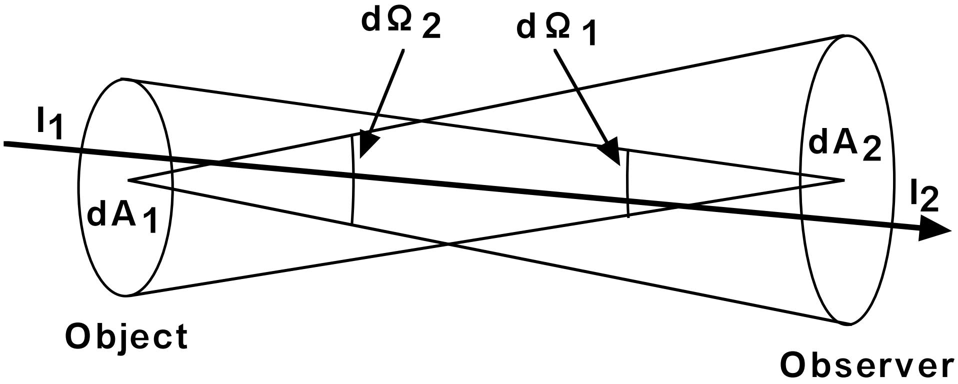


図 3.1: お互いに向き合う面を貫く Speciftc Intensity

平板から放射される Flux

面積 A を持ち、角度依存性の無い Specific Intensity $I = I(\Omega)$ が通過している板から放出される Flux$F$ を計算する。面に対し垂直より測った角度を θ とすると、

$$\begin{aligned} F &= \int AI\cos\theta d\Omega, d\Omega = \sin\theta d\phi d\theta \qquad (3.30) \\ &= IA\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \\ &= \pi IA \qquad (3.31) \end{aligned}$$

となる。単位面積辺りでは πI となる。よって、放射体を半径 R の球とし、そこからの放射を距離 r で受けると、距離 r での Flux は

$$\begin{aligned} F &= \pi I \times 4\pi R^2 \times \frac{1}{4\pi r^2} \\ &= \pi I \left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad (3.32) \end{aligned}$$

となる。

3.1.2 Radiative Transfer

Emission

ミクロな放射素過程を記述する式として、時間 dt、質量 ρdV、周波数幅 $d\nu$ あたりの輻射放射量を *Emissivity* ϵ と定義すると、ある立体角 $d\Omega$ 方向への輻射エネルギーは

$$dE = \epsilon_\nu \rho dV dt d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} \tag{3.33}$$

$$\epsilon_\nu (\text{ergs sec}^{-1}\text{gm}^{-1}\text{Hz}^{-1}\text{str}^{-1}) \tag{3.34}$$

と書ける。ϵ_ν は直接ミクロな素過程と結びつけられる量で、「熱制動輻射の場合の ϵ_ν は何とか」と言ったりする。次に、この湧きだしによる Specific Intensity の変化を求める。

この自発的放射が行なわれている場合、単位体積 dV、単位立体角方向 $d\Omega$、単位時間 dt に流れ出す輻射を記述する係数、*Spontenious Emission Coefficient* j を次のように定義する。

$$j_\nu = \frac{\epsilon_\nu \cdot \rho}{4\pi} = \frac{dE}{dV d\Omega dt d\nu} (\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-3}\text{ster}^{-1}\text{Hz}^{-1}) \tag{3.35}$$

$$j = \int j_\nu d\nu = \frac{dE}{dV d\Omega dt} (\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-3}\text{ster}^{-1}) \tag{3.36}$$

一般的には自発的放射は方向によってその強度が変わっても良い。しかし、以下では簡単のために等方的な放射を考える。単位体積 dV、単位時間 dt に放射しているエネルギーを P とすると、P と j_ν は、

$$P_\nu = \frac{dE}{dV dt d\nu} (\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-3}\text{Hz}^{-1}) \tag{3.37}$$

$$j_\nu = \frac{1}{4\pi} P_\nu (\mathrm{ergs\ sec^{-1}cm^{-3}ster^{-1}Hz^{-1}}) \tag{3.38}$$

と書ける。

ϵ_ν と j_ν の関係は、

$$dE = j_\nu dV d\Omega dt d\nu = \epsilon_\nu \rho dV dt d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} \tag{3.39}$$

$$j_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{4\pi} \rho \tag{3.40}$$

と書ける。

Specific Intensity が短い距離 ds を通過する場合、その場所で湧き出された放射、すなわち Emission が加わると、波長 ν において単位長さ当たりの Specific Intensity の変化量 dI_ν は、

$$dI_\nu = j_\nu ds = \frac{\epsilon_\nu}{4\pi} \rho ds \tag{3.41}$$

となる。

Absorption

今度は Specific Intensity I_ν が ds を通過する際に、吸収されることを考える。吸収される量は、普通そこを通過している輻射の強度に比例するので、波長 ν における単位長さ当たりに吸収される比率、吸収係数 *Absorption Coefficiency* α_ν を次のように定義する。

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds \tag{3.42}$$

$$\alpha_\nu (\mathrm{cm^{-1}}) \tag{3.43}$$

「Free-Free 吸収の吸収係数は何とか」という場合の吸収係数は α_ν を使う。とは言うものの α_ν だとミクロな吸収素過程と結びつけにくいので、波長 ν における粒子一つ当たりの吸収断面積を $\sigma_\nu(\mathrm{cm}^2)$ とし、粒子の個数密度を n とすると、Specific Intensity の変化は、

$$dI_\nu = -n\sigma_\nu I_\nu ds \tag{3.44}$$

となる。よって、

$$\alpha_\nu = n\sigma_\nu \tag{3.45}$$

である。粒子の個数密度 n の代わりに、質量密度 $\rho(\mathrm{rm^{-3}})$ を使っても構わない。その場合のミクロな素過程と結びつける係数、質量吸収定数 κ_ν は

$$\alpha_\nu = \rho\kappa_\nu \tag{3.46}$$

$$\kappa_\nu (\mathrm{cm^2 gm^{-1}}) \tag{3.47}$$

と定義できる。gm を使うのは、もちろん人間世界で使いやすいためで、例えば物質が X 線を吸収する場合の吸収係数は、普通この κ で与えられる。

ところで、*Emission* と言っているが、ここでは *Spontenious Emission* のみのことであり、*Stimulated Emission* は含んでいない。*Spontenious Emission* は、放射の追加分 dI_ν が、入射してきた I_ν に無関係な放射のこと。

一方、*Stimulated Emission* は、放射の追加分が ds に対して入射してきた I_ν に比例する放射のこと。一方、*absorption coefficient*α_ν は、吸収物質の密度に比例している形で与えられているので、この *Stimulated Emission* は、実は *absorption coefficient* にマイナスの符合を持つ係数として含まれていることになる。

Column Density

体積密度 n を視線方向に距離で積分した面密度 Column Density N は

$$N = \int n(s)ds(\mathrm{cm}^{-2}) \tag{3.48}$$

と定義できる。また、質量面密度

$$\Sigma = \int \rho(s)ds(\mathrm{gm\ cm}^{-2}) \tag{3.49}$$

というのも使う。

The Radiation Transfer Equation

吸収と放出の両方を合わせると、ある距離を通過した時の Specific Intensity の変化率は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \tag{3.50}$$

である。これを *Transfer Equation* と呼ぶ。

The Radiation Transfer Equation: Emission Only

自発放射のみの場合、ある距離を通過した時の Specific Intensity の変化率は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu \tag{3.51}$$

なので、これを積分すると、

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^{s} j_\nu(ds')ds' \tag{3.52}$$

となる。

The Radiation Transfer Equation: Absorption Only

吸収のみの場合は、ある距離を通過した時の Specific Intensity の変化率は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha I_\nu \tag{3.53}$$

なので、これを積分すると、

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0)\exp\left[-\int_{s_0}^{s} \alpha_\nu(s')ds'\right] \tag{3.54}$$

となる。s_0 から s までの吸収物質の吸収係数が場所によって変化しない場合は、

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \sigma_\nu n \\ I_\nu(s) &= I_\nu(s_0)\exp\left[-\sigma_\nu \int_{s_0}^{s} n(s')ds'\right] \\ &= I_\nu(s_0)\exp\left(-\sigma_\nu N\right) \end{aligned} \tag{3.55}$$

と書ける。こういう使い方の Column Density N は良く登場する。また、

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \kappa_\nu \rho \\ I_\nu(s) &= I_\nu(s_0)\exp\left[-\kappa_\nu \int_{s_0}^{s} \rho(s')ds'\right] \\ &= I_\nu(s_0)\exp\left(-\kappa_\nu \Sigma\right) \end{aligned} \tag{3.56}$$

は、実験屋は使うことが多いので、使い方になれておくと良い。

Optical Depth and Absorption

s_0 から s では、$s-s_0$ は、長さと言う意味での厚みだが、それに合わせて光の強度変化として、波長 ν での光学的厚さ *Optical Depth* τ_ν は次のように定義できる。

$$\begin{aligned} d\tau_\nu &= \alpha_\nu ds && (3.57)\\ \tau_\nu(s_0\rightarrow s) &= \int_{s_0}^{s}\alpha_\nu(s')ds' && (3.58)\end{aligned}$$

よって、Optical Depthτ_ν を通過した輻射の強度はと

$$\begin{aligned} I_\nu(s) &= I_\nu(s_0)\exp\left[-\int_{s_0}^{s}\alpha_\nu(ds')ds'\right]\\ &= I_\nu(s_0)\mathrm{e}^{-\tau_\nu(s_0\rightarrow s)} && (3.59)\end{aligned}$$

書ける。よって、$\tau_\nu=1$ 程度の厚みを通り過ぎると Specific Intensity は 1/e に弱くなる。

Optical Depth が短い、長いことを Optically Thin とか Optically Thick という表現をする。光源に対する視線上に吸収体を挿入した場合、Optically Thin だと、吸収体はほとんどすけすけでほぼ透明であることを意味する。一方、Optical Thick の場合は、おおよそ Optical Depth $\tau_\nu\sim 1$ の場所が見えている。

Mean Free Path, Atteniation Length

上の考察から、吸収体に光子を入射させた場合、ある深さまで到達できる確率は、$\mathrm{e}^{-\tau_\nu}$ なので、その光子が平均的に吸収されずに進める光学的深さを、進める光学的深さの期待値が 1 になる場所だと考えて計算すると

$$\langle\tau_\nu\rangle\equiv\int_0^\infty\tau_\nu\exp\left(-\tau_\nu\right)d\tau_\nu=1 \qquad (3.60)$$

となる。吸収物質が一様な物質だと考えると、進める光学的深さの期待値が 1 になる物理的距離 l_ν は、

$$\begin{aligned} \langle\tau_\nu\rangle &= \alpha_\nu l_\nu = n\sigma_\nu = 1\\ l_\nu &= \frac{1}{\alpha_\nu}=\frac{1}{n\sigma_\nu}=\frac{1}{\rho\kappa_\nu} && (3.61)\end{aligned}$$

となる。この l_ν のことを、*Mean Free Path*、平均自由行程と呼ぶ。結局の所、Intensity が 1/e になる場所なので、*Atteniation Length* とも呼ぶ。

Source Function

いよいよ、吸収と放出の両方がある場合について考察する。Transfer Equation を Optical Depth を使って書き換える。

$$\begin{aligned} \frac{dI_\nu}{ds} &= -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu\\ d\tau_\nu &= \alpha_\nu ds\end{aligned}$$

なので、*Source Function* S_ν を

$$S_\nu\equiv\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \qquad (3.62)$$

と定義すると、Transfer Equation は

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}=-I_\nu+S_\nu \qquad (3.63)$$

となる。ここで、$\mathcal{I}=I_\nu\mathrm{e}^{\tau_\nu}$、$\mathcal{S}=S_\nu\mathrm{e}^{\tau_\nu}$ と置くとこの式は

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\tau_\nu}=\mathcal{S} \qquad (3.64)$$

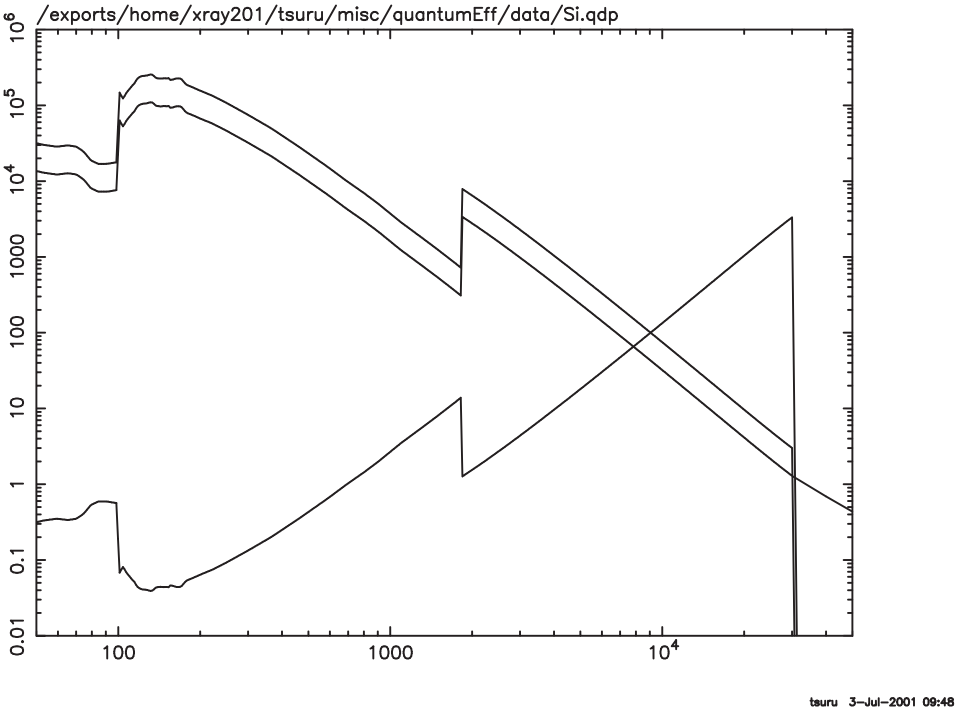


図 3.2: シリコンの (1) 吸収係数 $\alpha_\nu = \rho\kappa_\nu$ (2) 質量吸収係数 κ_ν、(3)Atteniation Lengthl_ν。

と書き換えられる。よって、

$$\mathcal{I}(\tau_\nu) = \mathcal{I}(0) + \int_0^{\tau_\nu} \mathcal{S}(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \tag{3.65}$$

となるので、Transfer Equation は

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu)\mathrm{e}^{\tau}_{\nu} &= I_\nu(0)\mathrm{e}^0 + \int_0^{\tau_\nu} \mathrm{e}^{\tau'_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \\ I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)\mathrm{e}^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} \mathrm{e}^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \end{aligned} \tag{3.66}$$

と解くことができる。

これだと見通しが良くないので、S_ν が一定値だと考えると、

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)\mathrm{e}^{-\tau_\nu} + (1 - \mathrm{e}^{-\tau_\nu}) S_\nu \\ &= S_\nu + \mathrm{e}^{-\tau_\nu}\left(I_\nu(0) - S_\nu\right) \end{aligned} \tag{3.67}$$

と書き換えられる。

Optically Thin: $\tau_\nu \ll 1$ の極限

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) + \tau_\nu S_\nu \tag{3.68}$$

$$= \tau_\nu S_\nu \quad (if I_\nu(0) = 0) \tag{3.69}$$

Intensity は放射物体の光学的厚みに比例する。例えば、これはオーロラを思い浮かべると良い。オーロラはその後方の星が透けて見えている。一方、オーロラの厚みが厚くなると、それに従って明るさも明るくなる。つまり、三次元的に考えると、光度は体積に比例することになる。

Opticall Thick: $\tau_\nu \gg 1$ の極限

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu \tag{3.70}$$

Intensity は放射物体の光学的厚みによらず、一定。これについては、例えば、太陽を思い浮かべると良い。太陽の後方にある星は全く見えない。そればかりか太陽の中心部も見えず、ごく表面のみが見えている。よって、厚さをどんなに厚くしても、もは明るさは変化しない。三次元的に考えると、光度は表面積に比例することとなる。

$S_\nu = 0$ **：Emission** がない場合

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\mathrm{e}^{-\tau_\nu} \tag{3.71}$$

普通の吸収の形。

3.2　光子の熱力学と黒体放射

3.2.1　Planck Spectrum

体積 $L_x \times L_y \times L_z = V$ の中を考えた場合、運動量空間での状態密度 g を求める。x 方向の運動量空間に存在するモードの数は、L_x/h であり、光子のスピン自由度は 2 なので、ある大きさの運動量 $p \sim p + dp$ を持つ光子の状態密度は以下のように書ける。

$$g(\vec{p})d^3\vec{p} = \left(\frac{L_x}{h}\right)\left(\frac{L_y}{h}\right)\left(\frac{L_z}{h}\right) \times 2dp_x dp_y dp_z \tag{3.72}$$

$$= 2\frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp \tag{3.73}$$

一方、$p = h\nu/c$ なので、周波数空間で書き換えると

$$g(\nu)d\nu = 2\frac{4\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu \tag{3.74}$$

となる。$g(\nu)$ は体積 V の中を 4π 方向を飛んでいる光子を合計しているので、単位体積 dV に単位立体角 $d\Omega$ 辺り方向へ飛ぶ光子密度 ρ_s を求めるには $V4\pi$ で割ってやり

$$\rho_s dV d\nu d\Omega = \frac{g(\nu)}{V4\pi}dV d\nu d\Omega \tag{3.75}$$

$$= \frac{2\nu^2}{c^3}dV d\nu d\Omega \tag{3.76}$$

光子は Bose-Einstein 統計なので、分布関数は

$$f_{\mathrm{BE}}(h\nu) = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_{\mathrm{B}}T}\right) - 1} \tag{3.77}$$

なので、エネルギー密度 $u_\nu(T,\Omega)$ は

$$u_\nu(T,\Omega)dV d\nu d\Omega = h\nu \cdot \rho_s \cdot f_{\mathrm{BE}}(h\nu) \cdot dV d\nu d\Omega \tag{3.78}$$

$$= \frac{2h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T) - 1}dV d\nu d\Omega \tag{3.79}$$

よって、熱輻射の場合の Specific IntensityI_ν を $B_\nu(T)$ と書くと、

$$B_\nu(T)d\nu = I_\nu = u_\nu c = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T) - 1}d\nu \tag{3.80}$$

単位周波数ではなく、単位波長で書くと

$$B_\lambda(T)d\lambda \;=\; \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_\mathrm{B}T)-1}d\lambda \tag{3.81}$$

となる。

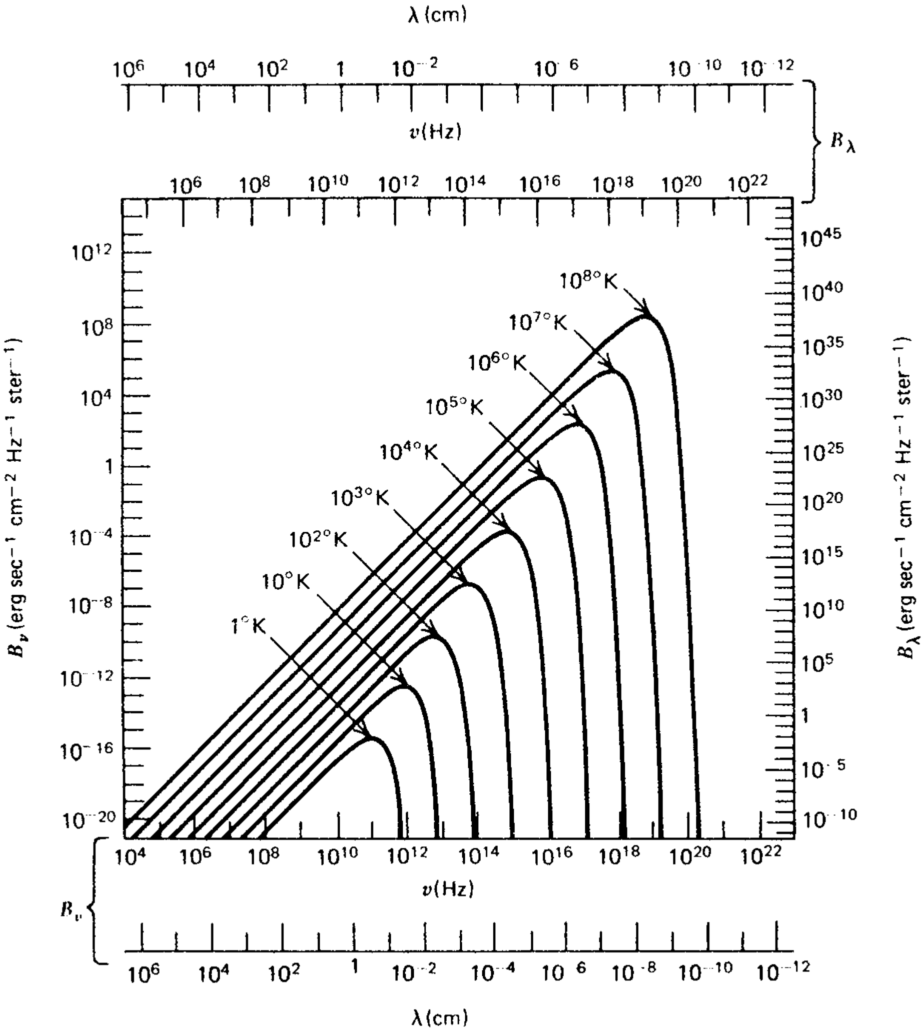


図 3.3: 黒体輻射のスペクトル

Rayleigh-Jeans Law

B_ν の長波長側、または $h\nu \ll k_\mathrm{B}T$ の近似を Rayleigh-Jeans Law と呼ぶ。

$$B_\nu^\mathrm{RJ}(T) \;=\; \frac{2\nu^2}{c^2}k_\mathrm{B}T \tag{3.82}$$

となる。

Wien Law

B_ν の短波長側、または $h\nu \gg k_\mathrm{B}T$ の近似を Wien Law と呼ぶ。

$$B_\nu^\mathrm{W}(T) \;=\; \frac{2h\nu^3}{c^2}\exp\left(\frac{-h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) \tag{3.83}$$

となる。

3.2.2 Kirchhoff's Law for Thermal Emission

上で示した状態は熱平衡になっているので、この様な輻射場を持つ箱を薄い壁で 2 つ繋いでも、状態は変化しない。この調子で薄い壁で隔てた箱を何個繋いでも同じことで、Optical Thick $\tau_\nu = \infty$。

一方、Optical Thick $\tau_\nu = \infty$ の場合、$I_\nu = S_\nu$ であった。よって、熱平衡に達している場合には、

$$S_\nu = B_\nu(T) \tag{3.84}$$

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T) \tag{3.85}$$

である。

温度が高くなると、放射係数は吸収係数に比べて T^4 で大きくなっていく。温度が高くなると、吸収に比べて放射が強くなる。

ここで示した議論は、光子の輻射メカニズムによっていない。熱的な平衡状態になった場合には、プラズマからの熱制動輻射、衝突電離輝線、固体からの輻射、たぶんシンクロトロンなど、放射メカニズムに関わらず熱的平衡にあれば成り立つ。

3.2.3 Stefan-Boltzmann Law

$$u_\nu(T,\Omega)d\nu d\Omega = \frac{2h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T)-1}d\nu d\Omega \tag{3.86}$$

を周波数で積分する。

$$\begin{aligned} u(T) &= \int u_\nu(T,\Omega)d\nu d\Omega \\ &= \int_{4\pi} d\Omega \int_0^\infty \frac{2h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T)-1}d\nu \\ &= \frac{8\pi^5 k_{\mathrm{B}}^4}{15c^3h^3}T^4 \qquad (3.87) \\ &= aT^4 (\mathrm{ergs\ cm^{-3}}) \qquad (3.88) \\ a &= 7.57\times 10^{-15} (\mathrm{ergs\ cm^{-3} deg^{-4}}) \qquad (3.89) \end{aligned}$$

内部が黒体輻射をしている箱に単位面積の穴を開けた場合に出てくる全輻射は、

$$\begin{aligned} F(T) &= \int I_\nu \cos\theta d\Omega d\nu \\ &= \int_{2\pi} \cos\theta \int B_\nu(T)d\nu \\ &= \pi \int \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T)-1}d\nu \\ &= \frac{2\pi^5 k_{\mathrm{B}}^4}{15c^2h^3}T^4 \qquad (3.90) \\ &= \sigma T^4 = \frac{ac}{4}T^4 (\mathrm{ergs\ cm^{-2} sec^{-1}}) \qquad (3.91) \\ \sigma &= \frac{ac}{4} = 5.67\times 10^{-5} (\mathrm{ergs\ cm^{-2} sec^{-1} deg^{-4}}) \qquad (3.92) \end{aligned}$$

となる。

3.3　光子ガス

3.3.1　状態方程式と断熱指数

状態方程式

理想気体と光子気体に関して、圧力と運動量、エネルギーとの関係から圧力と内部エネルギーには

$$P_{\rm g} = \frac{2}{3}u_{\rm g} \tag{3.93}$$

$$P_{\rm ph} = \frac{2}{c}\int I_\nu \cos^2\theta d\Omega = \frac{2}{c}\int J_\nu d\nu \int \cos^2\theta d\Omega = \frac{1}{3}\frac{4\pi}{c}\int J_\nu d\nu = \frac{1}{3}u_{\rm ph} \tag{3.94}$$

の関係がある。さらに、熱的な気体では

$$P_{\rm g} = \frac{2}{3}u_{\rm g} = nk_{\rm B}T/V \tag{3.95}$$

$$P_{\rm ph} = \frac{1}{3}u_{\rm ph} = \frac{a}{3}T^4 \tag{3.96}$$

となる。

断熱指数

$dS = 0$ の断熱変化させた時に、P と $n \propto 1/V$ が

$$P \propto V^{-\gamma} \propto n^{\gamma} \tag{3.97}$$

と表される時に、γ を断熱指数と呼ぶ。

断熱指数を使って P と u の関係を書くと

$$P = (\gamma - 1)u \tag{3.98}$$

となるので、上の状態方程式と比較し理想気体は $\gamma = 5/3$、光子気体は $\gamma = 4/3$ となる。

断熱変化では

$$u \propto n^{\gamma} \propto V^{-\gamma} \tag{3.99}$$

が成立するので、光子のエネルギー密度は

$$u_{\rm ph} \propto V^{-4/3} \propto L^{-4} \tag{3.100}$$

と書ける。一方、理想気体の熱エネルギーの方は

$$u_g \propto V^{-5/3} \propto L^{-5} \tag{3.101}$$

となる。しかし温度が GeV オーダー以下の場合、理想気体の熱エネルギーは、静止エネルギーに比べて無視できる。

(補足) 断熱指数を用いた場合の圧力と内部エネルギーの関係の導出

熱力学第一法則は

$$dQ = dU + dW = dU + PdV \quad \text{— (1)} \tag{3.102}$$

である。

断熱変化とは

$$dQ = 0, dS = \frac{dQ}{T} = 0 \tag{3.103}$$

のことを言う。熱力学第一法則 (1) と組合せると

$$dU + PdV = 0 \text{ — } (2) \tag{3.104}$$

となる。

一方、

$$U = uV \tag{3.105}$$

であり、断熱変化により粒子数に変化ない場合 (光子の場合は必ずしも自明ではないかも知れないが、これについては後で補足する)、は体積と密度の間に

$$V \propto 1/n \tag{3.106}$$

の関係がある。よってこれを使って (2) を書き換えると、

$$dU + PdV = 0 \tag{3.107}$$

$$d\left(\frac{u}{n}\right) + Pd\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ — } (3) \tag{3.108}$$

となる。

$dS = 0$ の断熱変化させた時に、

$$P \propto V^{-\gamma} \propto n^{\gamma} \tag{3.109}$$

と表される時に、γ を断熱指数と呼ぶ。もう少しちゃんと断熱指数の定義し、変形すると

$$\gamma \equiv \left(\frac{d\ln P}{d\ln n}\right)_S = \left(\frac{dP/P}{dn/n}\right)_S \tag{3.110}$$

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{\gamma}\frac{dP}{P} \text{ — } (4) \tag{3.111}$$

が得られる。

(3) より

$$\frac{1}{n}du - \frac{u}{n^2}dn - \frac{P}{n^2}dn = 0 \tag{3.112}$$

$$du - \frac{u}{n}dn - \frac{P}{n}dn = 0 \tag{3.113}$$

と変形し、(4) を使って dn/n を消すと、

$$du - \frac{u}{\gamma P}dP - \frac{1}{\gamma}dP = 0 \tag{3.114}$$

$$du = \left(\frac{du}{\gamma P} + \frac{1}{\gamma}\right)dP \tag{3.115}$$

$$\gamma\frac{du}{u+P} = \frac{dP}{P} \text{ — } (5) \tag{3.116}$$

となる。

既に見た通り、理想気体の場合も光子気体の場合も、圧力と内部エネルギー密度は比例関係にある。そこで一般的にこの両者が比例する場合を仮定すると、

$$P = A \cdot u, \quad \ln P = \ln u + \ln A \tag{3.117}$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{du}{u} \text{ — } (6) \tag{3.118}$$

となる。

最終的に (5) に (6) を代入し、dP、du を消すと、

$$P = (\gamma - 1)u \tag{3.119}$$

が得られる。

(補足) 断熱変化の場合の光子数の保存

先ほどは、断熱変化により系の光子数は変化しないとしたが、これを確認しよう。
光子気体のエネルギー密度は、ステファンボルツマンの a 係数で以下のように示された。

$$u_{\rm ph}(T) = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k_{\rm B}T}{h}\right)^4\zeta(4)\Gamma(4) = \frac{8\pi^5 k_{\rm B}^4}{15c^3h^3}T^4 = aT^4({\rm ergs\ cm^{-3}}) \tag{3.120}$$

$$a = 7.57\times10^{-15}({\rm ergs\ cm^{-3}deg^{-4}}) \tag{3.121}$$

これと全く同じ手法で、各光子のエネルギーを割った上で周波数積分を行なえば、光子数密度が次のように得られる。

$$n_{\rm ph}(T) = 16\pi\zeta(3)\left(\frac{k_{\rm B}T}{hc}\right)^3, \quad \zeta(3) = 1.202 \ \text{—}\ (1) \tag{3.122}$$

(3.123)

これはプランク分布「のみ」から得た数密度であり、光子数が保存することを仮定せずに得たことに注意する。
一方、上で数密度が一定であることを「仮定」した上で、断熱変化させた場合の光子エネルギー密度と系の体積には、

$$u_{\rm ph} \propto V^{-4/3} \tag{3.124}$$

なる関係があることを導いた。一方、プランク分布より

$$u_{\rm ph} \propto aT^4 \tag{3.125}$$

である。よって、断熱変化させた時の光子気体の温度変化は

$$T \propto V^{-1/3}, \quad T^3 \propto V^{-1} \ \text{—}\ (2) \tag{3.126}$$

となる。
さて (1) と (2) を見比べると、

$$n_{\rm ph}(T) \propto V^{-1} \tag{3.127}$$

であることでコンシステントとなる。すなわち、光子ガスの場合も粒子数はやはり保存すると考えて良い。

3.3.2 輻射/物質のエネルギー密度

太陽

太陽表面での輻射エネルギー密度は

$$u_{\rm ph}(T) = aT^4 \tag{3.128}$$

$$= 7.57\times10^{-15}\times6000^4 \tag{3.129}$$

$$\sim 10({\rm ergs\ cm^{-3}}) \tag{3.130}$$

一方、ガス密度は $\sim 10^{17}{\rm cm^{-3}}$ なので、

$$u_{\rm g}(T) = \frac{3}{2}nk_{\rm B}T \tag{3.131}$$

$$= \frac{3}{2}10^{17}\times1.38\times10^{-16}\times6000 \tag{3.132}$$

$$\sim 10^5({\rm ergs\ cm^{-3}}) \tag{3.133}$$

となる。

太陽中心での輻射エネルギー密度は

$$u_{\mathrm{ph}}(T) = aT^4 \tag{3.134}$$

$$= 7.57 \times 10^{-15} \times (1.5 \times 10^7)^4 \tag{3.135}$$

$$\sim 4 \times 10^{14}(\mathrm{ergs\ cm}^{-3}) \tag{3.136}$$

一方、ガス密度は $100\mathrm{gr\ cm}^{-3} = 6 \times 10^{25}$ なので、

$$u_{\mathrm{g}}(T) = \frac{3}{2} n k_{\mathrm{B}} T \tag{3.137}$$

$$= \frac{3}{2} 10^{25} \times 1.38 \times 10^{-16} \times 1.5 \times 10^7 \tag{3.138}$$

$$\sim 3 \times 10^{16}(\mathrm{ergs\ cm}^{-3}) \tag{3.139}$$

である。熱エネルギーという意味で、物質の方が大きく、さらに静止エネルギーも含めると全く問題にならない。

宇宙全体

宇宙背景放射は 2.7K なので、現在の輻射密度は

$$u_{\mathrm{ph}}(T) = aT^4 \tag{3.140}$$

$$= 7.57 \times 10^{-15} \times 2.7^4 \tag{3.141}$$

$$\sim 4 \times 10^{-13}(\mathrm{ergs\ cm}^{-3}) \tag{3.142}$$

$$\sim 0.25(\mathrm{eV\ cm}^{-3}) \tag{3.143}$$

である。一方、物質の静止エネルギー密度は

$$u_{\mathrm{rm}} \sim 2 \times 10^{-9}(\mathrm{ergs\ cm}^{-3}) \tag{3.144}$$

$$\sim 1 \times 10^{3}(\mathrm{eV\ cm}^{-3}) \tag{3.145}$$

となり、物質が「優勢」な宇宙である。宇宙のスケールを a とすると、物質の静止エネルギー密度は $u_{\mathrm{rm}}a^3$ が保存される。一方、$u_{\mathrm{ph}}a^4$ が保存される。現在の値をそれぞれ a_0、u_{rm0}、u_{ph0} とする。

現在の両者のエネルギー密度比は、

$$\frac{u_{\mathrm{rm0}}}{u_{\mathrm{ph0}}} \sim 10^4 \tag{3.146}$$

$$\left(\frac{u_{\mathrm{rm}}}{u_{\mathrm{rm0}}}\right) = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} \tag{3.147}$$

$$\left(\frac{u_{\mathrm{ph}}}{u_{\mathrm{ph0}}}\right) = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \tag{3.148}$$

$$\left(\frac{u_{\mathrm{rm}}}{u_{\mathrm{ph}}}\right) = \left(\frac{u_{\mathrm{rm0}}}{u_{\mathrm{ph0}}}\right)\left(\frac{a}{a_0}\right) \tag{3.149}$$

となる。

よって、宇宙がもっと小さかった時、両者のエネルギー密度が等しかった時期が存在する。この時の値には eq という添字を与えるとすると、

$$\left(\frac{u_{\mathrm{rm0}}}{u_{\mathrm{ph0}}}\right) \sim 10^4, \left(\frac{u_{\mathrm{rm}}}{u_{\mathrm{ph}}}\right)_{eq} = 1 \tag{3.150}$$

から、

$$\left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right) = \left(\frac{u_{\mathrm{rm0}}}{u_{\mathrm{ph0}}}\right)^{-1} \sim 10^{-4} \tag{3.151}$$

となる。

(3.152)
$$\left(\frac{a}{a_0}\right) > \left(\frac{u_{\mathrm{ph0}}}{u_{\mathrm{rm0}}}\right) \sim 10^{-4}, a > a_{eq}$$

なら、物質が優勢で、

(3.153)
$$\left(\frac{a}{a_0}\right) < \left(\frac{u_{\mathrm{ph0}}}{u_{\mathrm{rm0}}}\right) \sim 10^{-4}, a < a_{eq}$$

なら、輻射が優勢となる。

Einstein-de Sitter モデル ($\Lambda = 0$、物質優勢) の場合、

(3.154)
$$a \propto t^{2/3}$$

なので、両者が等しくなる時刻 t_{eq} は

(3.155)
$$t_{\mathrm{eq}} = (a_{\mathrm{eq}}/a_0)^{3/2} t_0$$

(3.156)
$$\sim (10^{-4})^{-3/2} 10^{10}(\mathrm{yr}) \sim 10^4(\mathrm{yr})$$

となる。これは赤方偏移で言うと $z \sim 1000$ の時代である。これ以前では物質に対して輻射が優勢である。これ以前では、輻射がどんどん優勢になる。よって、この 3K 輻射のエネルギー源は物質の質量エネルギーの一部解放というのでは不可能。現在の理論では素粒子の統一理論が想定する真空状態の転位によるもので、その際のエネルギー差によって励起された黒体輻射の残光がこの放射の起源である、とされている。

輻射と物質のエネルギーが等しくなる時期の輻射の温度を求める。

(3.157)
$$\left(\frac{a_{eq}}{a_0}\right) \sim 10^{-4}$$

(3.158)
$$u_{ph} \propto L^{-4}$$

より、

(3.159)
$$\left(\frac{u_{ph,eq}}{u_{ph,0}}\right) \sim 10^{16}$$

となる。

(3.160)
$$u_{ph} \propto T^4$$

なので、

(3.161)
$$\left(\frac{T_{eq}}{T_0}\right) = \left(\frac{u_{ph,eq}}{u_{ph,0}}\right)^{1/4} \sim 10^4$$

となる。$T_0 = 2.7(\mathrm{K})$ なので、

(3.162)
$$T_{eq} \sim 3 \times 10^4(\mathrm{K})$$

(3.163)
$$k_{\mathrm{B}} T_{eq} \sim 2.6(\mathrm{eV})$$

となる。

$z \sim 1000$ の後、さらに温度が下がり $T \sim 4000(\mathrm{K})$ 程度になると今度は陽子と電子の再結合が起こり、水素原子となる。この中性化の結果、自由電子はなくなり、$T \sim 2700(\mathrm{K})$ 以降では、輻射と物質の相互作用は切れて光子の平均自由行程が長くなり、宇宙が晴れ上がる。

3.4　光学的に厚い大気からの輝線と吸収線

3.4.1　温度構造が無い場合

傾いていても、Brightness は一定値なので、同じ明るさの円盤が見えるだけ。

3.4.2　温度構造がある場合: 太陽の例

太陽の周辺減光

太陽は外側に行くほど温度が下がる構造を持っている。また、Optical Depth $\tau_\nu = 1$ に対応する物理距離 l_ν の大気の黒体輻射を見ている。太陽の中心付近では実際に深さが物理距離 l_ν の場所の大気を観測しているが、周囲では太陽が球体であるため、太陽表面と観測者を結ぶ角度が垂直からずれるので、物理距離 l_ν より浅い場所の温度構造を見ることになる。

観測している波長での吸収係数 α_ν はわかっているものとすると、周辺減光を観測することで太陽表面での情報が得られる。

もしも、周辺減光がほとんど見られなければ、物理距離 l_ν より浅い場所で温度構造がほとんどないことを意味するから、太陽表面は深さ方向に等温なのか、それとも密度が非常に高いので $\tau_\nu = 1$ に対応する物理距離 l_ν が非常に浅いことを意味する。逆に、周辺減光が激しければ、温度構造が非常にきついか、密度が薄いことを意味する。

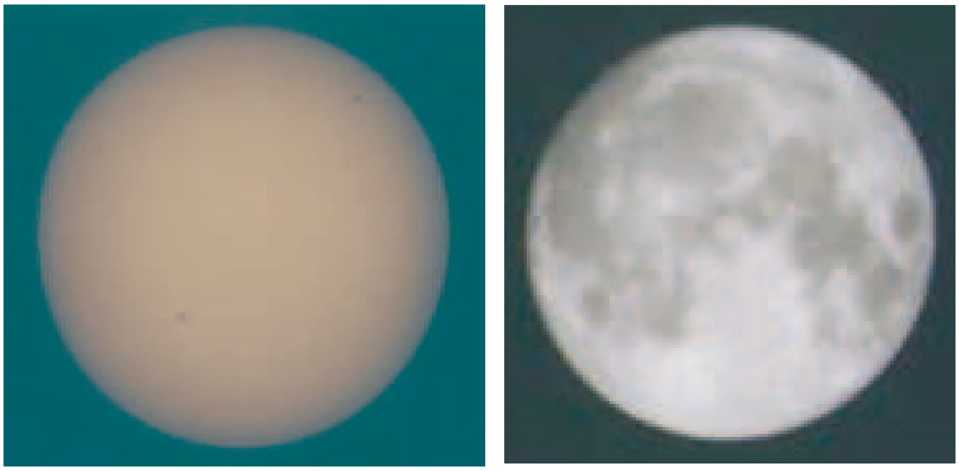


図 3.4: 太陽と月の写真。太陽には周辺減光が見えるが、月には見えない (もっとも、月は太陽光の反射で光っているのであまり良い例ではないが)。

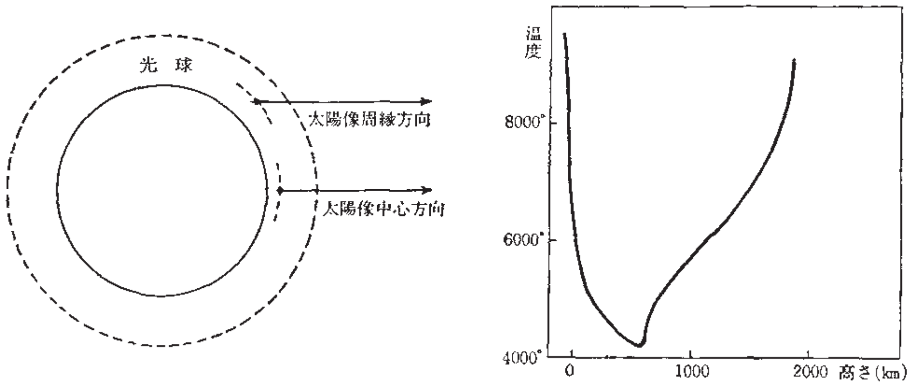


図 3.5: 太陽の周辺減光を利用して大気モデル。

「吸収線」と呼ばれるもの

太陽の「吸収線」という言い方を一般的に行なうが、これは必ずしも正しくない。基本は Optical Depth $\tau_\nu = 1$ に対応する物理距離 l_ν の大気の黒体輻射を見ている。他の周波数に比べ輝線の周波数 ν_0 では吸収係数が大きいため、Optical Depth $\tau_\nu = 1$ に対応する物理距離 l_ν が小さいので、深さが浅い場所を観測することになる。太陽表面大気は温度構造を持ち、深さが浅くなるにつれて温度が下がる。よって、輝線 ν_0 ではこの様に温度の低い浅い場所を見ていることになる。

いずれの周波数にしても太陽半径に比べて十分浅い場所を見ているとすると、観測者が見込む太陽の立体角を $d\Omega$ とすると

$$\frac{dE}{dAdt} = B_\nu(T)d\Omega \tag{3.164}$$

となる。B_ν の形は輝線でもそうでなくても同じで、T が違うだけ。輝線の波長では T が低い場所を見ているので、その $B_\nu(T)$ は、輝線の波長からずれた場所の $B_\nu(T)$ よりも小さい (R-J 側も Wein 側も同じ)。よって、差を見ると吸収線の様に見えるだけである。

3.4.3　温度構造がある場合: 2 層モデル

コアと外層を持つ恒星を考える。コアと外層の温度をそれぞれ T_C、T_S とする。観測者から見てそれぞれ立体角 S_0、$(S_1 - S_0)$ を持つ。これを周波数 ν_0 とそれ以外 (ν_1 で代表的に呼ぶ) で観測をする。ν_0 の吸収係数は大きく、コア外層ともに Opticall Thick であるのに対して、ν_1 では外層は Opticall Thin で、コアは Opticall Thick であるとする。$T_C \gg T_S$、$T_C = T_S$、$T_C \ll T_S$ の 3 つの場合に分け、さらに外層がコアに対して静止している場合と吹き出している場合に観測されるスペクトルを考える。

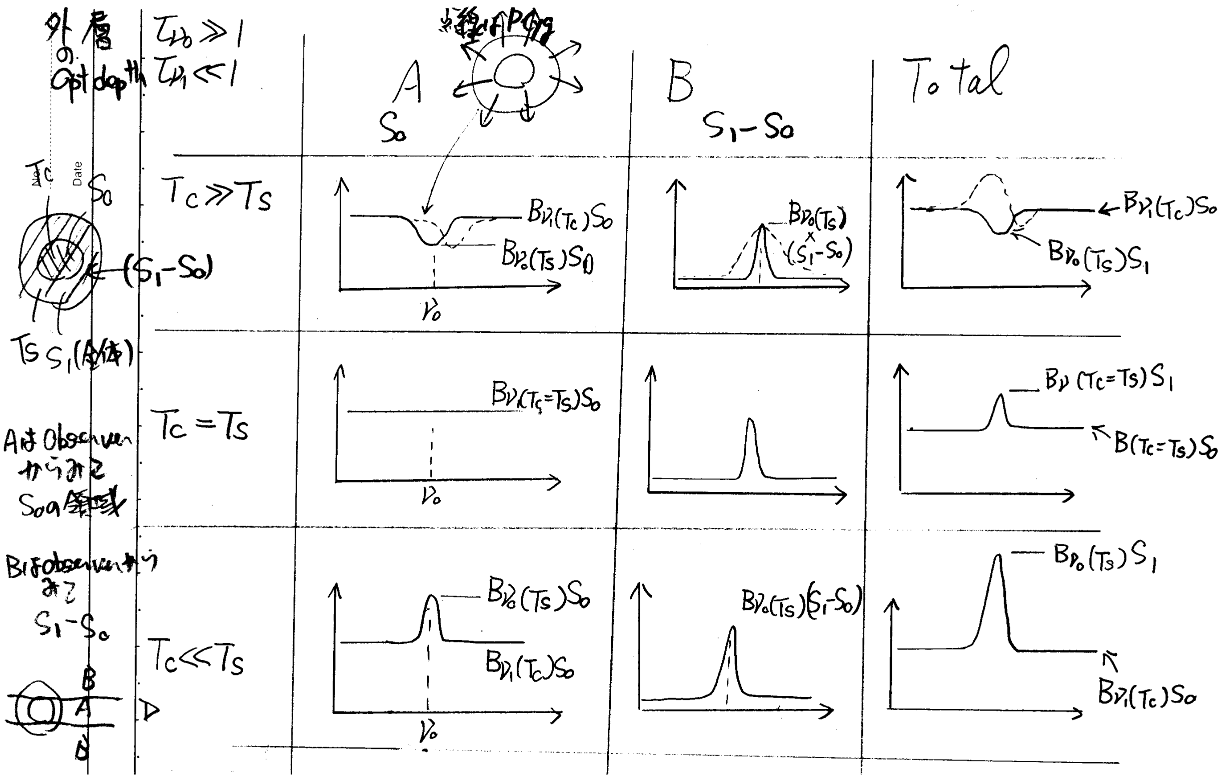

外層の Opt depth
$\tau_{\nu_0} \gg 1$
$\tau_{\nu_1} \ll 1$
A
S_0
輝線(PCyg)
B
$S_1 - S_0$
Total
Tc
S_0
(S_1-S_0)
Ts S_1(全体)
$T_C \gg T_S$
$B_{\nu_1}(T_C)S_0$
$B_{\nu_0}(T_S)S_0$
ν_0
$B_{\nu_0}(T_S)$
×
(S_1-S_0)
$B_{\nu_1}(T_C)S_0$
$B_{\nu_0}(T_S)S_1$
$T_C = T_S$
$B_{\nu_1}(T_C=T_S)S_0$
ν_0
$B_\nu(T_C=T_S)S_1$
$B(T_C=T_S)S_0$
Aは Observer から見て S_0 の領域
Bは Observer から見て S_1-S_0
$T_C \ll T_S$
$B_{\nu_0}(T_S)S_0$
$B_{\nu_1}(T_C)S_0$
ν_0
$B_{\nu_0}(T_S)(S_1-S_0)$
$B_{\nu_0}(T_S)S_1$
$B_{\nu_1}(T_C)S_0$
B
A
B
No.
Date

図 3.6: コアと外層を持つ恒星大気のスペクトル。

$T_C \gg T_S$ で吹き出しがある場合を P Cygni Profile と呼ぶ。

3.5 アインシュタインの A 係数と B 係数

3.5.1 アインシュタイン係数の導入

Definition of Coeffecients

Einstein 係数 A_{21}、B_{12}、B_{21} を以下のように定義する。

1) 輻射と相互作用する二つの準位

輻射と相互作用している (例えば) 原子の 2 つの状態について、Level 1、Level 2 があり、そのエネルギー差 $\Delta E = h\nu$ とする。Level 1, 2 それぞれの状態数を g_1、g_2、それぞれの準位の状態にある原子の数を n_1、n_2 とする。

2) 自然放出係数 $A_{21}(\mathrm{sec}^{-1})$:

$A_{21} =$ 単位時間あたりに Level 2 に居る原子が、$h\nu$ の光子を放出し Level 1 に落ちる確率。

3) 吸収係数 $B_{12}(\mathrm{ergs}^{-1}\mathrm{cm}^2\mathrm{str\ Hz})$:

$B_{12}J_\nu =$ 単位時間あたりに Level 1 に居る原子が、$h\nu$ の光子を吸収し Level 2 に上がる確率。

4) 誘導放出係数 $B_{21}(\mathrm{ergs}^{-1}\mathrm{cm}^2\mathrm{str\ Hz})$:

$B_{21}J_\nu =$ 単位時間あたりに Level 2 に居る原子が $h\nu$ の光子に誘導され、$h\nu$ の光子を放出して Level 1 に落ちる確率。

Relations between Einstein Coeffecients

平衡状態であるなら、

$$n_1 B_{12} J_\nu = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} J_\nu \tag{3.165}$$

となる。J_ν について解くと、

$$J_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1} \tag{3.166}$$

となる。平衡に加えて、熱平衡状態を仮定すると、Level 1 と Level 2 の間は、

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{g_1 \exp(-E_1/k_\mathrm{B}T)}{g_2 \exp(-E_2/k_\mathrm{B}T)} && (3.167) \\ &= \frac{g_1 \exp(-E_1/k_\mathrm{B}T)}{g_2 \exp(-(E_1 + h\nu)/k_\mathrm{B}T)} && (3.168) \\ &= \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu/k_\mathrm{B}T) && (3.169) \end{aligned}$$

となる。上記の式にこれを代入すると、

$$J_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21}) \exp(h\nu/k_\mathrm{B}T) - 1} \tag{3.170}$$

となる。熱平衡なのだから、この式の J_ν と次に示す Planck の式の B_ν は同じ形をしている。

$$B_\nu(T) = I_\nu = u_\nu c \quad = \quad \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_\mathrm{B}T) - 1} \tag{3.171}$$

よって、

$$\begin{aligned} g_1 B_{12} &= g_2 B_{21} && (3.172) \\ A_{21} &= \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} && (3.173) \end{aligned}$$

となる。これを Einstein の関係と呼ぶ。

この式を導く際には熱平衡を仮定したが、この関係の中には温度 T が入っていない。また、A_{21}、B_{12}、B_{21} はミクロな過程のみで決まっている。ミクロ過程は、系全体が熱平衡かどうかを気にしない。よって、この式自体は熱平衡とは関係なく成立する。

一般的に、ある波長の光子に対して、吸収係数 B_{12} が大きい物質は自動的にその光子に対する自然放出係数と誘導放出係数は高いことになる。例えば、赤外線を吸収しやすい服は赤外線を放出しやすいと言うことで、逆も真。しかし、吸収しやさは光子の波長依存性があるので、ある波長で吸収しやすいからと言って、別の波長での放出係数が高い、ということではない。

また、ある周波数では吸収と放出は必ずカップルして登場する。片方だけ、ということはない。もちろん、周波数が違えば話しは変わるので、ある周波数では吸収は大きいが、放出は別の周波数で大きい、ということがある。

この3つの係数の内、一つを決めれば自動的に後2つの値も決まる。つまり、放出と吸収の素過程を計算する場合、一番計算しやすい係数を具体的に計算し、残りはこの係数で計算する。

3.5.2　第2量子化

$\vec{k}$ の状態に居る光子が n_k 個ある状態を $|n_k>$ と書くと、生成消滅演算子 $a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}}$ を使って、吸収する確率と、生成する確率を以下の通りに書ける。

$$|<n_k-1|a_{\vec{k}}|n_k>|^2 = |<n_k-1|\sqrt{n_k}|n_k-1>|^2 = n_k \to B_{12}J_\nu \tag{3.174}$$

$$|<n_k+1|a^\dagger_{\vec{k}}|n_k>|^2 = |<n_k+1|\sqrt{n_k+1}|n_k+1>|^2 = n_k+1 \to B_{21}J_\nu + A_{21} \tag{3.175}$$

吸収する確率は光子の数に比例する (B_{12})。一方で放射する確率は光子の数に比例する成分 (B_{21}) と、自然に放射される成分 (A_{21}) の2つの成分が自然に出てくる。つまり、Planck の式や Einstein 係数は量子論をきちんと反映されていることが分かる。

3.6　放射による伝熱

伝熱工学は、高温物体から低温物体へ伝えられる熱エネルギーの移動速度を明らかにすることが目的である。熱移動の形態は熱伝導、対流熱伝達、放射伝熱に分類される。ここでは、放射による伝熱について考えてみる。

3.6.1　伝熱工学の基礎

伝熱工学で用いられる記号と、上の Radiative Transfer で用いられる記号は若干違うので、改めて記号の定義をしておく。

放射率・吸収率

物体に入射した輻射が、その物体により吸収もしくは反射されると考える。相互作用せずそのまま通過するという「透明」は考えない

その場合、物体表面に入射された微分フラックス $F_\nu(\mathrm{ergs\ sec^{-1}cm^{-2}Hz^{-1}})$ に対し、単色吸収率 α_ν を定義し、吸収されたエネルギー $F_{\nu,a}$ は

$$F_{\nu,a} = \alpha_\nu F_\nu \tag{3.176}$$

と書ける。

一方、物体表面に入射された微分フラックス F_ν に対し、単色反射率 ρ_ν を定義し、反射されたエネルギー $F_{\nu,r}$ は

$$F_{\nu,r} = \rho_\nu F_\nu \tag{3.177}$$

と書ける。

$$F_\nu = F_{\nu,a} + F_{\nu,r} \tag{3.178}$$

なので、

$$\alpha_\nu + \rho_\nu = 1 \tag{3.179}$$

となる。

Kirchihoff's law

Radiative Transfer のセクションで述べた Kirchihoff's law は、

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T) \tag{3.180}$$

であった。$B_\nu(T)$ は黒体放射。伝熱工学の場合には、熱的な放射を基本とするので、両辺を $B_\nu(T)$ で割って

$$\varepsilon_\nu \equiv \frac{j_\nu}{B_\nu(T)} = \alpha_\nu \tag{3.181}$$

とし、ε_ν を単色放射率と呼ぶ。

この単色放射率と単色吸収率が等しいと言うことを、(伝熱工学で言う) Kirchihoff's law と呼ぶ。

「黒体」と「灰色体」

$\varepsilon_\nu = \alpha_\nu$ は、黒体に関わらない全ての物体に成り立つ重要な結果である。しかし、元に戻って「黒体」とは何であろう。この伝熱工学の言葉では、「黒体」とは全ての波長に渡り、

$$\varepsilon_\nu = \alpha_\nu = \varepsilon = \alpha = 1 \tag{3.182}$$

であることを言う。全ての光を吸収する物体 (黒いので反射しない) ということである。ある周波数バンドに限れば黒体に近い場合は、「ホニャララのバンドでは黒い」のような言い方をする。

全ての波長に渡り単色放射率と単色吸収率が等しいが、1 でない、

$$\varepsilon_\nu = \alpha_\nu = \varepsilon = \alpha \neq 1 \tag{3.183}$$

の性質を持つ物体を「灰色体」と呼ぶ。

一般には全ての波長で「黒い」ような物体は存在せず、周波数依存性がある。

3.6.2 2 つの黒体平板間の熱流

1 から 2 へ及び、2 から 1 への輻射による熱流は次のように書ける。

$$J_{12} = f_{12} S_1 \sigma T_1^4 \tag{3.184}$$

$$J_{21} = f_{21} S_2 \sigma T_2^4 \tag{3.185}$$

S_1、S_2 は物体 1、2 の面積を持つ平板、f_{12}、f_{21} は「形態系数」「放射結合係数」と呼ばれる幾何学的な関係を示す係数。

Radiative Transfer のセクションで角度依存性の無い Specific Intensity$I = I(\Omega)$ が通過する面積 S の平板から半球方向に放射されるフラックス F は

$$F = \pi I S \tag{3.186}$$

と書けたので、物体 1 と 2 の距離を r とすると、f_{12} は、

$$f_{12}\pi I S_1 = \int_{S_2}\int_{S_1} I \frac{1}{R^2} \cos\phi_1 \cos\phi_2 d\phi_1 d\phi_2 \tag{3.187}$$

$$f_{12} = \frac{1}{\pi S_1}\int_{S_2}\int_{S_1} \frac{1}{R^2} \cos\phi_1 \cos\phi_2 d\phi_1 d\phi_2 \tag{3.188}$$

同様に f_{21} は、

$$f_{21} = \frac{1}{\pi S_2}\int_{S_1}\int_{S_2}\frac{1}{R^2}\cos\phi_2\cos\phi_1 d\phi_2 d\phi_1 \tag{3.189}$$

となる。ϕ_1 は、物体 1 の面素の法線に対する、相手の物体 2 の面素への角度。ϕ_2 も同様。

ここで Radiative Transfer の “Constancy of Specific Intensity Along Rays in Free Space” のセクションで示した通り、

$$f_{12}S_1 = f_{21}S_2 \equiv F \tag{3.190}$$

が成立する。よって、二つの物体間の正味の熱流は

$$Q_{12} = Q_{1\to 2} = J_{12} - J_{21} \tag{3.191}$$

$$= F\sigma(T_1^4 - T_2^4) \tag{3.192}$$

となる。

ここでは物体は平板と考えたが、それ以外の形の物体の場合も同様に考えれば良い。

3.6.3　温度変化: 電気との等価回路

$$Q_{12} = F\sigma(T_1^4 - T_2^4) \tag{3.193}$$

は、

Q : 電流
$F\sigma$: 抵抗
T^4 : 電圧
C(熱容量) : コンデンサー

と考えると、電気と等価回路と考えることができる。よって、物体の温度変化は

$$C_1\frac{dT_1}{dt} = Q_{21} = F\sigma(T_2^4 - T_1^4) \tag{3.194}$$

$$C_2\frac{dT_2}{dt} = Q_{12} = F\sigma(T_1^4 - T_2^4) \tag{3.195}$$

と書ける。

3.6.4　2 枚の黒体並行平板の間に並行平板を 1 枚挿入する

簡単のために面積 S の並行平板とし、f は忘れることにする。

2 枚の黒体並行平板

温度 T_1、$T_2(T_1 > T_2)$ の黒体の面積 S の並行平板の物体 1 と物体 2 を考える。この場合、物体 1 から 2 へ流れる熱流 Q は

$$Q_{12} = S\sigma(T_1^4 - T_2^4) \tag{3.196}$$

となる。

黒体平衡平板を 1 枚はさむ

物体 1 と物体 2 の温度はそのままに、物体 3 をはさむ。物体 1 から物体 3 への熱流を Q_{13}、物体 3 から物体 2 への熱流を Q_{32} とすると、平衡状態であるのでこの両者は等しく、さらに、結局の所物体 1 から物体 2 への熱流と等しくなり、

$$Q'_{12} = Q_{13} = Q_{32} \tag{3.197}$$

と表される。よって、物体 3 の温度 T_3 は

$$Q'_{12} = Q_{13} = S\sigma(T_1^4 - T_3^4) = Q_{32} = S\sigma(T_3^4 - T_2^4) \tag{3.198}$$

を満たす値に落ち着くことになる。これを解くと、

$$T_3^4 = \frac{1}{2}(T_1^4 + T_2^4) \tag{3.199}$$

$$Q'_{12} = S\frac{1}{2}\sigma(T_1^4 - T_2^4) \tag{3.200}$$

$$= \frac{1}{2}Q_{12} \tag{3.201}$$

となる。つまり、一枚黒体を挿入することにより、熱流を半分にすることが可能になる。

反射平板を 1 枚はさむ

今度は、黒体並行平板物体 3 の代わりに、反射並行平板の物体 4 をはさむ。

この場合は、物体 1 から物体 4 に放射した輻射は全て反射され、物体 1 に戻ってくる。一方、物体 4 の反射係数が 1 であるということは、吸収係数が 0 である。すなわち、物体 4 の放射係数は 0 であり、放射しないことになる。

よって物体 1 について、放射する輻射と入射する

$$J_{14} = S\sigma T_1^4 \times \varepsilon_4 = 0(\leftarrow \varepsilon_4 = 0) \tag{3.202}$$

$$J_{41} = S\sigma T_1^4 \times \varepsilon_4 = 0(\leftarrow \varepsilon_4 = 0) \tag{3.203}$$

$$Q_{14} = J_{14} - J_{41} = 0 \tag{3.204}$$

となる。物体 4 と物体 1 の間についても同じ事が成り立ち、

$$Q_{42} = J_{42} - J_{24} = 0 \tag{3.205}$$

よって、

$$Q''_{12} = 0 \tag{3.206}$$

となり、熱流が 0 となる。

3.6.5 灰色物体間の熱輸送

黒体の代わりに、それぞれ灰色並行平板の物体 1、物体 2 を向かい合わせる。放射係数は ε_1、ε_2 とする。

物体 1 を出発した輻射 $\varepsilon_1 S T_1^4$ は、まず最初に物体 2 に入射すると、その内 $\varepsilon_2(=\alpha_2)$ のみを吸収し、残りの $1-\varepsilon_2$ は反射し、物体 1 へ戻す。物体 1 はそのうち、$\varepsilon_1(=\alpha_1)$ のみを吸収し、残りの $1-\varepsilon_1$ は反射し、再び物体 2 に入射させる.... と考えると、物体 1 から物体 2 への方向への熱流は、

$$J_{12} = \varepsilon_2(\varepsilon_1 S\sigma T_1^4) + \varepsilon_2(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1 S\sigma T_1^4) + ... \tag{3.207}$$

$$= \varepsilon_2(\varepsilon_1 S\sigma T_1^4)\sum_{n=0}^{\infty}[(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)]^n \tag{3.208}$$

$$= \frac{S\sigma T_1^4}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \tag{3.209}$$

となる。J_{21} も同様に考えると、正味の熱量は、

$$\begin{aligned} Q_{12} &= J_{12} - J_{21} && (3.210)\\ &= \frac{S\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} && (3.211) \end{aligned}$$

となる。

黒体の場合

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ であり、上で示した場合と同じ答となる (当たり前)。

完全反射の場合

完全反射というのは、物体 1、2 共に両者が $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ の場合である。この場合、$Q_{12} = 0$ となる。

3.6.6　熱制御の原則

以上からわかるとおり、二つの物体間の熱流を大きくするためには、両者とも黒体とし、結合係数を大きくするため、互いが大きな面積を見せ合わせるように配置する。一方、熱流を減らすためには、まずは黒体を一枚挟むことである。一枚より二枚の方が良い。さらに良いのは、反射体を挟むことである。同じように、挟まないまでも物体の表面を反射体にすることで、同じ効果を得ることができる。

衛星内部の設計ではこの原則で作られている (図 3.7)。衛星全体の温度を常温とすると、この温度に近い値にしたいコンポーネントは、できるだけ熱的に結合させるために、表面を赤外線に対し黒く塗装し、黒体に見せることにする。一方、衛星全体とは違う温度にしたい場合、例えば CCD カメラのように冷却したい場合は、回りからの熱輻射を受けないようにする必要がある。アルミの地を出したり、金テープを張る、金メッキをするなどして反射体とし、熱的に結合を切る。XRS の様に極めて厳重に熱的に切るためには、コンポーネント全体を反射体とすると共に、MLI(Multi Layer Insulator) と呼ばれるフィルムを巻く。これは、両面をアルミ面にしたアルミナイズドマイラを、メッシュを挟んで何枚も重ねたものである (図 3.8 及び現物)。アルミ面は赤外で反射体であり、それを何枚も重ねることで、熱的に切る。メッシュを挟むのはアルミナイズドマイラがお互いに接触しないためで、これは当然熱伝導による熱流を防ぐためである。

日常生活でも、最新の防寒具や携帯クーラがアルミ面をしているのはこのためである。

3.6.7　地球における太陽輻射による熱流入と黒体輻射の平衡

地球は太陽の輻射を受けて加熱され、自身の黒体輻射により冷却する。その平衡状態を解いて、地球の温度を求める。

太陽の半径と表面温度は

$$R_\odot = 7 \times 10^{10} (\mathrm{cm}) \tag{3.212}$$

$$T_\odot = 6000 (\mathrm{K}) \tag{3.213}$$

であるので、太陽の光度は

$$\begin{aligned} L_\odot &= \sigma T^4 4\pi R_\odot^2 && (3.214)\\ &= 4 \times 10^{33} (\mathrm{ergs\ sec^{-1}}) && (3.215) \end{aligned}$$

である。地球と太陽の距離は

$$D = 1\mathrm{AU} = 1.5 \times 10^{13} (\mathrm{cm}) \tag{3.216}$$

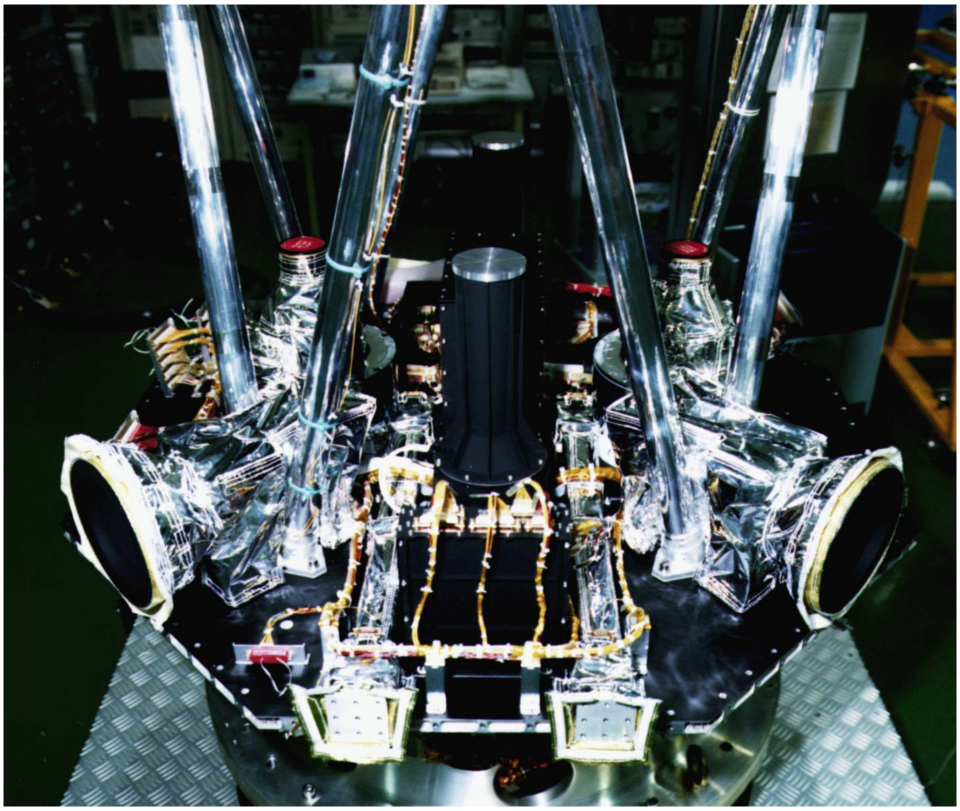


図 3.7: 「あすか」衛星のベースプレート。常温に保ちたい GIS は黒く塗装することで、黒体に近付け、冷却をしたい SIS や STT は MLI を巻き、熱的な結合を切っていることがわかる。

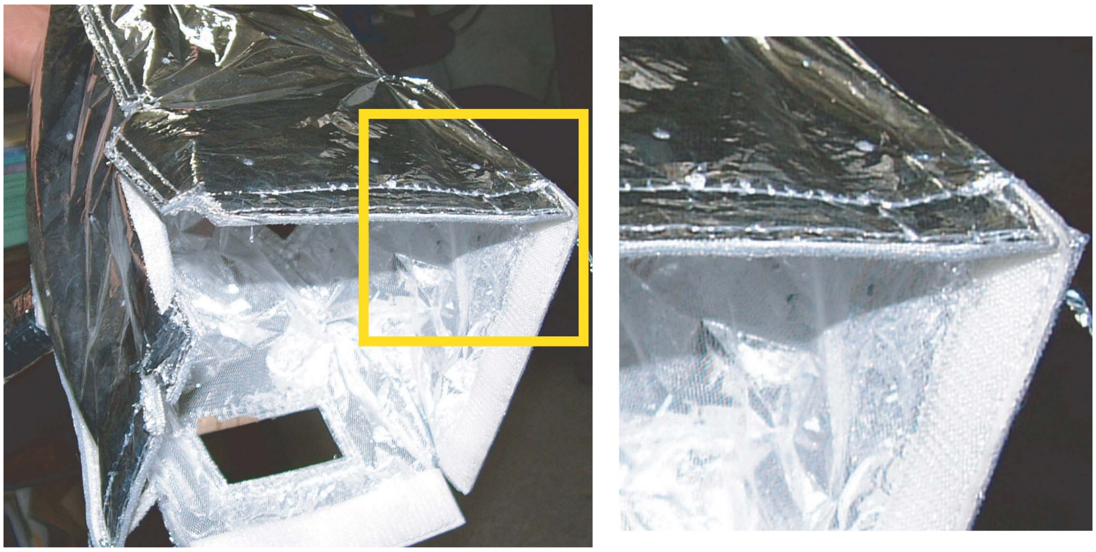


図 3.8: Multi Layer Insulator。両面が表の様にアルミコーティングされたフィルムが、裏面に見えるメッシュに挟まれ、数層に重ねられている。

である。地球の半径は

$$R_\oplus = 6 \times 10^8 (\mathrm{cm}) \tag{3.217}$$

なので、単位時間に地球が受けるエネルギーは

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_\oplus = \frac{\pi R_\oplus^2}{4\pi D^2} L_\odot = 1.6 \times 10^{24} (\mathrm{ergs\ sec^{-1}}) \tag{3.218}$$

となる。これが地球表面で再熱化され黒体放射となり、その輻射と釣り合う。地球の表面温度を (昼側も夜側共に)$T_\oplus$ と

すると、太陽から地球への熱流入と地球から放射される黒体輻射量の釣り合いの式は、

$$L_{\oplus} = \sigma T_{\oplus}^4 4\pi R_{\oplus}^2 \tag{3.219}$$

$$= \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\oplus} = 1.6\times 10^{24}(\mathrm{ergs\ sec^{-1}}) \tag{3.220}$$

となる。これを解くと

$$T_{\oplus} = 278(\mathrm{K}) = 5^{\circ}\mathrm{C} \tag{3.221}$$

となる。

3.6.8 ビニールハウスと地球温暖化

ビニールも二酸化炭素も可視光には透明だが、赤外では不透明。すなわち放射係数が0ではない。よって、6000Kの可視光を受け地球地表が温められ、300Kに再熱化され、赤外線で熱放射する。しかし、地表の上に赤外で灰色体の二酸化炭素がかぶさっているために、効率良く熱放射をすることができない。ガラスも同じであり、車も同じこと。

3.6.9 人工衛星の熱制御

人工衛星では太陽電池パネルを大きく広げ太陽エネルギーを受けて、そのエネルギーを衛星内部に電気的に輸送した上で消費し発熱している。つまり衛星本体は、直接太陽から受ける以上のエネルギーを衛星内部で消費することとなる。そのため、衛星本体を赤外線、可視光両方で黒体にすると、平衡点は常温より高くなってしまう。そこで、可視光での吸収 = 放射係数を小さく、赤外線での吸収 = 放射係数を大きくすることで、太陽からの可視光は遮断し、自らの発熱を効率良く放射させる。

通常熱放射を切るためには、フィルム両面をアルミ面を出す。しかし、上記の目的には、アルミ面にさらにポリイミド(カプトン)をコーティングしたフィルムを用いる。ポリイミドは可視光には透明なので、そのまま通過させその下にあるアルミフィルムによって反射される。一方、赤外波長ではポリイミドは黒い。よって、フィルム全体で見ると、可視光には放射吸収係数が低く、赤外線には放射吸収係数が高い。

これを用いることで、太陽から衛星本体への可視光線は遮断し、熱流入を妨げる一方、衛星内部の発熱は赤外線として衛星から効率良く放射させる。フィルムの衛星内部の面もポリイミドとし、衛星の各コンポーネントからの赤外輻射を効率良く受けとる。

太陽からの可視光は上記の方法で対処した場合、地球と衛星の温度と同じなので地球からの赤外線は効率良く受けとることになってします。太陽電池が受けるエネルギー以外の熱流入としては、この地球からのアルベドが最も大きい。

3.7 輻射輸送への散乱の効果

これまでは、吸収と放射のみを考えたが、前章で実際には散乱という素過程が存在する。散乱には大きくエネルギーシフトがおこるコンプトン散乱と、シフトしないトムソン散乱がある(両方とも詳細は後述する)。エネルギーシフトのあるコンプトン散乱は当然のことながら、エネルギーシフトの無いトムソン散乱であっても、散乱により「道のり」と「距離」の関係が変わって来る。ここでは、輻射輸送への散乱の効果の基礎的な物理を示す。

3.7.1 ランダムウォーク

光子が電子によって散乱されながら進む場合、実際に光子が歩く「道のり」と、その結果進むことのできた「距離」には違いがでてくる。この両者の関係を求める考えを「ランダムウォーク」と呼ぶ。この考えを使って、あるシステムを光子が抜け出すのに何回散乱を行うかを見積もる。

光子がある場所で放出され、N回目の散乱を受けて移動した位置を$\vec{R}$、それぞれの散乱での移動を$\vec{r_1}\cdots\vec{r_N}$と書くと

$$\vec{R} = \vec{r_1} + \vec{r_2} + \cdots + \vec{r_N} \tag{3.222}$$

となる。1回の散乱で進む平均的な距離をlとすると

$$l^2 \equiv < \vec{r}^2 > \tag{3.223}$$

である。一方、N回散乱した結果移動した距離をRとすると、以下のように両者の関係を求めることができる。

$$R^2 \equiv < \vec{R}^2 > = < (\vec{r_1} + \vec{r_2} + \cdots + \vec{r_N})^2 > \tag{3.224}$$
$$= < \vec{r_1}^2 > + < \vec{r_2}^2 > + \cdots + < \vec{r_N}^2 > \tag{3.225}$$
$$+ \quad 2 < \vec{r_1} \cdot \vec{r_2} > + 2 < \vec{r_1} \cdot \vec{r_3} > + \cdots \tag{3.226}$$

クロスタームの合計は散乱角θに対して$\cos\theta$の合計をとることと同じである。よって散乱の回数が十分大きい場合は、クロスタームの合計は$\simeq 0$と近似できる。よって、

$$R^2 = < \vec{R}^2 > = N \cdot < \vec{r}^2 > = Nl \tag{3.227}$$
$$R = \sqrt{N} l \tag{3.228}$$

となる。

つまりシステムの大きさをRとした場合に、これを散乱しながら抜けてくる場合に散乱する回数Nは

$$R = \sqrt{N} l \tag{3.229}$$
$$N = R^2 / l^2 \tag{3.230}$$

と得られることになる。

システムを抜けるのに必要な散乱回数が**1**回よりも十分多い場合

散乱の光学的厚みτは、

$$n\sigma l = 1 \tag{3.231}$$
$$\rho\kappa l = = 1 \tag{3.232}$$
$$\tau \equiv R/l = n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}} R = \rho\kappa R \tag{3.233}$$

で与えられる。この厚みが十分大きい場合は、システムを抜けるのに必要な散乱回数は

$$N = R^2/l^2 = \tau^2 \gg 1 \tag{3.234}$$

となる。1回の散乱毎に進むのに要する時間はl/cなので、システムを抜けるのに要する時間Δtは

$$\Delta t = Nl/c = \tau (R/c) \tag{3.235}$$
$$= n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}} R^2/c = \rho\kappa R^2/c \tag{3.236}$$

となる。よって散乱が無い場合に比べて、τ倍程余計に時間がかかることになる。システムの質量$M \propto \rho R^3$なので、

$$\Delta t \propto M/R \tag{3.237}$$

となる。よって、システムの質量が同じ場合はシステムが小さい程抜けるのに時間がかかることとなる。

システムを抜けるのに必要な散乱回数が 1 回よりも十分小さい場合

この場合は、ランダムウォークの近似 (クロスタームの合計が $\simeq 0$) が成り立たなくなり、散乱の回数は単純に

$$N = \tau \ll 1 \tag{3.238}$$

となる。散乱数は 1 回よりも十分小さいので、システムを抜けるのに必要な時間は単純に

$$\Delta t = R/c \tag{3.239}$$

となる。システムの質量が同じであっても、光学的な厚みが十分小さい近似がなりたつうちは、

$$\Delta t \propto R \tag{3.240}$$

となる。

システムを抜けるのに必要な散乱回数 (両者のまとめ)

散乱回数が 1 回よりも十分大きい場合、小さい場合の両方をまとめるとシステムを抜けるのに必要な散乱回数は

$$N = \tau + \tau^2 \quad \text{or} \quad max(\tau, tau^2) \tag{3.241}$$

であり、必要な時間は

$$\Delta t = (R/c)(1+\tau) \quad \text{or} \quad (R/c) \times max(1, \tau) \tag{3.242}$$

となる。

システムの質量を変えずに大きさを変えた場合、システムの大きさが大きすぎても (光学的に非常に薄い)、小さすぎても (光学的に非常に厚い) システムを抜けるのに時間がかかる。よって、その中間つまり中途半端な光学的厚みを持つ場合が最も短い時間で抜けることが可能となる。

3.7.2 散乱のみの場合の輻射輸送方程式

(未完)

3.7.3 吸収放射に散乱が加わる場合の輻射輸送方程式

(未完)

3.8 輻射の拡散

3.8.1 Rosseland 近似

(未完)

3.8.2 Eddington 近似

(未完)

第4章　ビルアル定理と降着円盤

4.1　ビルアル定理

重力で束縛された系での、時間平均された重力エネルギーの総和と時間平均された運動エネルギーの簡単な関係。

4.1.1　一般の場合

質点の位置、系の重力エネルギーを

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ...\vec{r}_i, ... \tag{4.1}$$

$$\Omega(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ...\vec{r}_i, ...) \tag{4.2}$$

とする。運動エネルギーの総和 K は

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 \tag{4.3}$$

と書ける。運動方程式は

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial \vec{r}_i} \tag{4.4}$$

と書ける。

ここで、重力エネルギーが

$$\sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial \vec{r}_i}\vec{r}_i = \alpha\Omega \tag{4.5}$$

である、という系を仮定する (α 次の同次式。ケプラー運動であれば、$\alpha = -1$)。この系の場合、運動方程式を積分しなくても解くことが出来る。

運動方程式の両辺に $\vec{r}_i$ を掛けて $\sum_i$ を取ると、Ω は α の同次式なので

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{r}_i = -\sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i = -\alpha\Omega \tag{4.6}$$

となる。両辺の時間平均を取ると、

$$-\alpha < \Omega >= -\alpha \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Omega dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{r}_i dt \tag{4.7}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_i m_i \left\{ [\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i]_0^T - \int_0^T v_i^2 dt \right\} \tag{4.8}$$

となる。ここで、粒子は束縛されていて無限大には行かないとすると、$[\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i]_0^T$ は有限値なので、$\lim_{T\to\infty}$ の極限を取ると消える。

よって、

$$-\alpha < \Omega >= -\sum_i < m_i v_i^2 >= -2 < K > \tag{4.9}$$

$$< K >= \frac{\alpha}{2} < \Omega > \tag{4.10}$$

となる。

4.1.2　中心星による重力場がドミナントの場合

重力エネルギーは、

$$\Omega = -\sum_i G\frac{Mm_i}{r_i} \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{r}_i} = G\frac{Mm_i}{r_i^3}\vec{r}_i \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{r}_i}\cdot\vec{r}_i = G\frac{Mm_i}{r_i} \tag{4.13}$$

となるので、

$$\sum_i\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{r}_i}\cdot\vec{r}_i = \sum_i G\frac{Mm_i}{r_i} = -1\times\Omega \tag{4.14}$$

$$\tag{4.15}$$

となる。よって、

$$\alpha = -1 \tag{4.16}$$

である。

よって、

$$< K >= -\frac{1}{2} < \Omega > \tag{4.17}$$

となる。粒子は 1 個でも良い訳で、その場合ケプラー運動を考えると、運動エネルギーと重力エネルギーはこの関係になっている。また、

$$< K > + < \Omega >= -\frac{1}{2} < \Omega > + < \Omega >= \frac{1}{2} < \Omega >< 0 \tag{4.18}$$

であり、束縛されている。

4.1.3　自己重力系の場合

i 番目の粒子に対する運動方程式は、

$$m_i\dot{\vec{v}}_i = \sum_{j\neq i}\frac{Gm_im_j(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{|r_j-r_i|^3} \tag{4.19}$$

となるので、両辺に r_i をかけ、$\sum_i$ を取ると、

$$\frac{d^2(r_i^2)}{dt^2} = 2\left(\vec{r}_i\cdot\dot{\vec{v}}_i + v_i^2\right) \tag{4.20}$$

$$\vec{r}_i\cdot\dot{\vec{v}}_i = \frac{1}{2}\frac{d^2(r_i^2)}{dt^2} - \vec{v}_i^2 \tag{4.21}$$

なので、

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i\frac{m_ir_i^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_i m_iv_i^2 = \sum_i\sum_{j\neq i}Gm_im_j\frac{\vec{r}_i(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^3} \tag{4.22}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}Gm_im_j\frac{(\vec{r}_i-\vec{r}_j)(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^3} \tag{4.23}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{Gm_im_j}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|} \tag{4.24}$$

となる。長時間平均を取ると

$$< \frac{d^2}{dt^2} \sum_i \frac{m_i r_i^2}{2} > \rightarrow 0 \tag{4.25}$$

となるので、

$$< \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 > \quad = \quad < \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} > \tag{4.26}$$

$$< K > \quad = \quad -\frac{1}{2} < \Omega > \tag{4.27}$$

となる。

結局、自己重力系の場合も、中心に重い星がある場合も同じになる。これはまぁ考えてみれば当たり前で、2 つの星の自己重力系を考えた場合は、運動エネルギーは両方にばらけている。中心に重い星がある場合は、ほとんどの運動エネルギーは軽い星が担う。重力エネルギーは両方ともちゃんと数えられているので、自己重力系で中心に重い星があった場合の極限を計算しているだけである。

4.1.4 一様な密度分布を持つ粒子系

球対称分布、半径 R、総質量 M の粒子系があった場合の重力エネルギーは

$$\Omega = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \tag{4.28}$$

となる。ビルアル定理を考えると、

$$K = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R} \tag{4.29}$$

となる。

この粒子を分光観測して視線速度 $v_{||}$ を求めることができたとする。この場合、3 次元的な速度は $v^2 = 3v_{||}^2$ となるので、

$$K = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{3}{2} M v_{||} \tag{4.30}$$

となる。よって、

$$M = 5 \frac{v_{||}^2 R}{G} \tag{4.31}$$

となる。

4.1.5 流体的な取り扱い

星の中心から半径 r に対する関数として圧力 P、密度 ρ、温度 T を考え、半径 r までに含まれる質量 M_r を以下のように定義する。

$$M_r(r) \quad = \quad \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr \tag{4.32}$$

$$\frac{dM_r}{dr} \quad = \quad 4\pi r^2 \rho \tag{4.33}$$

この星の半径を R、質量を M とし、これに以下の境界条件を課する。

$$r = 0 \quad \rightarrow \quad M_r = 0 \tag{4.34}$$

$$r = R \quad \rightarrow \quad M_r = M, P = 0 \tag{4.35}$$

この時、力学平衡は

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r\rho}{r^2} \tag{4.36}$$

と表せる。この両辺に $4\pi r^3$ を掛けて体積積分を行なうと、

$$0 = \frac{dP}{dr} + G\frac{M_r\rho}{r^2} \tag{4.37}$$

$$= \int_0^R \frac{dP}{dr} 4\pi r^3 dr + G\int_0^R \frac{\rho M_r}{r^2} 4\pi r^3 dr \tag{4.38}$$

$$= \left[4\pi r^3 P\right]_0^R - 3\int_0^R 4\pi r^2 P dr + G\int_0^R \frac{M_r}{r} 4\pi r^2 \rho dr \tag{4.39}$$

$$\left(\leftarrow 4\pi r^2 \rho dr = dM_r\right) \tag{4.40}$$

$$= -3\int_0^R 4\pi r^2 P dr + G\int_0^M \frac{M_r}{r} dM_r \tag{4.41}$$

となる。ここで、単位質量あたりの内部エネルギーを u とすると、単位体積あたりの内部エネルギーは ρu となるので、

$$P = (\gamma - 1)\rho u \tag{4.42}$$

となる。よって、先ほどの式は

$$0 = -3\int_0^R 4\pi r^2 (\gamma - 1)\rho u dr + G\int_0^M \frac{M_r}{r} dM_r \tag{4.43}$$

$$(\leftarrow 4\pi r^2 \rho dr = dM_r) \tag{4.44}$$

$$= -3\int_0^M (\gamma - 1) u dM_r + G\int_0^M \frac{M_r}{r} dM_r \tag{4.45}$$

$$\left(\leftarrow \Omega = -G\int_0^M \frac{M_r}{r} dM_r\right) \tag{4.46}$$

$$= -3(\gamma - 1)U - \Omega \tag{4.47}$$

となり、

$$\Omega = -3(\gamma - 1)U \tag{4.48}$$

となる。理想気体では、$\gamma = \frac{5}{3}$ なので、

$$\Omega = -2U \tag{4.49}$$

$$E = U + \Omega = \frac{1}{2}\Omega = -U < 0 \tag{4.50}$$

となる。

4.1.6　負の比熱

自己重力系でもそうで無い系でも構わないが、

$$E = K + \Omega = -K < 0 \tag{4.51}$$

$$\text{or } E = U + \Omega = -U \tag{4.52}$$

$$K = 1 \tag{4.53}$$

$$K : \Omega : E = 1 : -2 : -1 \tag{4.54}$$

$$E \downarrow \Rightarrow K \uparrow, \Omega \downarrow\downarrow \tag{4.55}$$

なので、全エネルギーから輻射などによりエネルギーを抜くと、逆に運動エネルギーまたは内部エネルギーは上昇してしまう。つまり、常識とは逆にエネルギーを抜くと温度が上昇することになる。

これは、宇宙では重大な意味を持つこととなる。原始星では、輻射によりエネルギーを失い収縮することで逆に中心核の温度は上昇し、最終的には熱核反応がはじまるのは、これが原理である。また星中心が重力収縮により高温になることで、吸熱反応の鉄の光分解が起こることで、超新星爆発が起こる。

4.2 光学的に厚い降着円盤

4.2.1 ブラックホールによって得られるエネルギーと角運動量の役割

Schwarzschild のブラックホールを考える場合、事象の地平線である Schwarzschild 半径は

$$r_g = 2\frac{GM}{c^2} \tag{4.56}$$

と与えられる。無限遠からプロトンを落し得られるエネルギーは、

$$G\frac{m_pM}{R} = G\frac{m_pM}{r_g} = \frac{1}{2}m_pc^2 \sim \frac{1}{2}938\mathrm{MeV} \tag{4.57}$$

で、一定となる。これは、ブラックホールの質量に関わらず、静止質量の半分がエネルギーとして出力することができることを意味している (これは覚えておくと良い)。

もしも、r_g まで落ちてそこで全てのエネルギーを解放すると、温度は数百 MeV になるのだが、ブラックホール近傍からのその様なエミッションは観測されていない。

これは物質がブラックホールに落ちる際、r_g の所で一度にエネルギーを解放するのではなく、少しずつ解放するためである。完全に角運動量を 0 にして、ブラックホールに落ちることは現実的にはあり得ず、その場合降着円盤というものを作る。

降着円盤には、「標準ディスク」と呼ばれる光学的に厚く幾何学的に薄い円盤が有名である。最近、もう一つの標準モデルとして「アドベクション優勢ディスクモデル (ADAF)」が注目されている。ADAF は後で簡単に紹介する。

物質を中心の星に落す場合、角運動量 0 で落ちることはまずあり得ない。たとえば、中性子星表面でケプラー運動する場合、半径 10km で光速の 50% 程度で回転しているが、これは太陽半径の距離離れた場所で速度 $\sim$ 4km/s でケプラー運動するのと同じ角運動量を持つに過ぎない。よって、一般的には、角運動量 0 で落ちることはなく、最終的には回転運動をしながら落ちていく、と考えている。

角運動量は、降着円盤の場合には、隣り合うリングとの粘性により内側から外側へ角運動量が運ばれると考えられている。しかし、全ての角運動量が外へ運ばれる訳ではなく、一部は中心星へ持ち込まれる。これはケプラー運動をしながら落ち込むのであるから当たり前である。この時の回転速度と中心星の回転速度の関係から、中心星がスピンアップしたり、スピンダウンしたりする。また、AGN や最近では近傍のブラックホール候補天体でジェットが観測されている。これは、この角運動量と関係があるのかも知れない。

4.2.2 光学的に厚く幾何学的に薄い標準ディスクモデル

中心星 (まだブラックホールとは限らない) の質量を M_X とし、そこに質量 m の粒子を半径 r でケプラー運動させる。この場合の重力エネルギー Ω、運動エネルギー K とそれを合わせた全エネルギー E は、ビルアル定理を考えると

$$\Omega = -G\frac{M_Xm}{r} \tag{4.58}$$

$$K = -\frac{1}{2}\Omega \tag{4.59}$$

$$E = \frac{1}{2}\Omega < 0 \tag{4.60}$$

となる。半径を r から $r+\Delta r$ に変更すると、全エネルギーは

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta\Omega = \frac{1}{2}G\frac{M_Xm}{r^2}\Delta r \tag{4.61}$$

となる。今、物質が内側に落ちていると言うことは $\Delta r < 0$ であり、全エネルギーは減ることになる。これにより解放されたエネルギーは言うまでもなく輻射として放出されている。光学的に厚く幾何学的に薄い円盤を仮定し、この輻射のスペクトルを求めてみる。

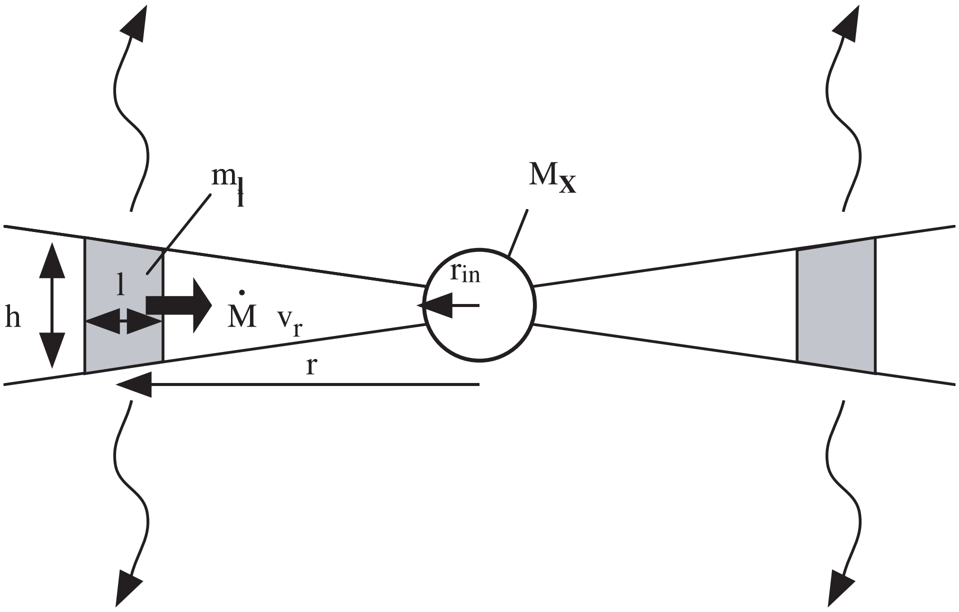


図 4.1: 標準モデルの模式図。

図 4.1 のハッチングした場所の運動エネルギーは、ケプラー運動の成分と熱エネルギ- の 2 つに分けられるが、ケプラー運動の方がドミナントと仮定する。でなければ、膨らんでしまう。また、ディスクからの放射は全て光学的に厚いと仮定する。しかし、あくまでもこれは仮定なので、実際に解いてみてその仮定が正しかったどうかを判定する必要があるが、この授業ではそこまでやるのは大変なのでそれは行なわない。

ハッチングした場所の質量 m_l は

$$m_l = 2\pi r h l \rho \tag{4.62}$$

と表せる。外から、外の都合で質量降着率 $\dot{M}$ の割合でガスが落ちてきているとすると、質量保存則より

$$Const = \dot{M} = 2\pi r h \rho v_r = \frac{m_l v_r}{l} \tag{4.63}$$

$$m_l = \frac{\dot{M} l}{v_r} \tag{4.64}$$

となる。ハッチングした場所の重力エネルギーは $M_X \gg m_l$ とすると、

$$\Omega_l = -G\frac{M_X m_l}{r} \tag{4.65}$$

である。ここで、ハッチングした場所が $\Delta r = -v_r \Delta t < 0$ ほど落ちたとすると、ビルアル定理より

$$\Delta E_l = \frac{1}{2}\Delta\Omega_l = \frac{1}{2}G\frac{M_X m_l}{r^2}\Delta r = \frac{1}{2}G\frac{M_X \dot{M} l}{r^2 v_r}\Delta r = -\frac{1}{2}G\frac{M_X \dot{M} l}{r^2}\Delta t < 0 \tag{4.66}$$

となる。これを Δt の間に輻射として放射しなければならないので、ハッチングした場所の光度を ΔL_l とし、さらに光学的に厚い黒体輻射を仮定すると、

$$\Delta L_l = -\frac{\Delta E_l}{\Delta t} = \sigma T^4(r) \cdot 2\pi r l \times 2 \tag{4.67}$$

となる。最後の 2 はディスクの表と裏を合わせたため。これより、

$$\begin{aligned} \sigma T^4(r) &= \frac{1}{4\pi r l}\frac{1}{2}G\frac{M_X\dot{M}l}{r^2} && (4.68)\\ &= G\frac{M_X\dot{M}}{8\pi}\frac{1}{r^3} && (4.69)\\ T(r) &= \left(G\frac{M_X\dot{M}}{8\pi\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} r^{-\frac{3}{4}} && (4.70) \end{aligned}$$

となる。

質量降着率が高くなると、全体的に温度が一様に上昇する。半径が大きくなると $r^{-\frac{3}{4}}$ で温度が下がる。外からこれを観測すると、ディスクの各場所の温度が重ね合わさったスペクトルに見える。X 線光度は真上から見た時の値であり、斜めから見ると $\cos(\theta)$ の割合で暗く見える。このことを「ディスクブラックボディ」とか「マルチカラーブラックボディ」などという言葉で呼ぶ。ディスクで最も温度の高い場所はもちろんディスクの最内縁 $r_{\rm in}$ だが、それはシステムによって違う。

4.2.3 Low Mass X-ray Binaries

図 4.2 は Uhuru 衛星によって検出された X 線星の分布を銀河座標系で書いたもの。明らかに銀河中心方向にコンセントレーションがある。よって、これらの星は (1) 銀河系に関係した星、(2) 銀河中心領域に存在する (距離 $\sim$ 10kpc)、(3) 種族 II に属する古い星である。また、少数はディスク、つまり種族 I に属する新しい系である。

銀河中心方向に大量に存在する X 線星の多くは「Low Mass X-ray Binary」と呼ばれており、磁場の弱い中性子星と晩期型星の連星である。晩期型星は進化しており、大気が Loche Lobe を満たしてしまったためラグランジェポイントから質量が流れ出して中性子星に降りつもり、その時に解放される重力エネルギーを輻射として X 線で放出している。

中性子星が誕生するには超新星爆発を経る必要があるが、それに連星の相手の星は耐えることができないとされている。ということは、超新星爆発を起こした時点では連星ではなく、中性子星になった後連星系が形成されたことになる。中性子星が誕生した後、銀河間空間をさまよう間に恒星をキャプチャーし、それが現在観測されている連星になったと考えられている。

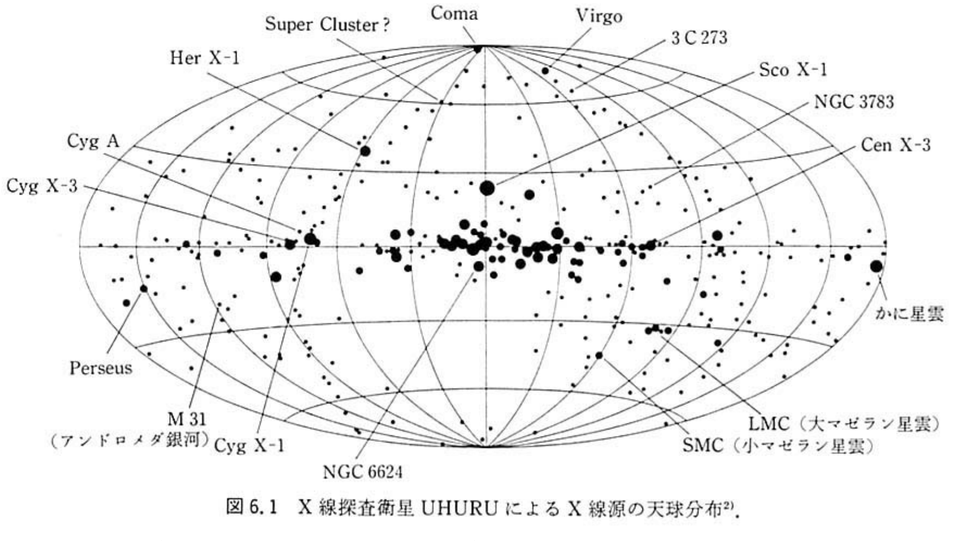

Super Cluster ?
Coma
Virgo
3 C 273
Her X-1
Sco X-1
NGC 3783
Cyg A
Cen X-3
Cyg X-3
かに星雲
Perseus
M 31
（アンドロメダ銀河）
Cyg X-1
LMC（大マゼラン星雲）
SMC（小マゼラン星雲）
NGC 6624
図 6.1 X 線探査衛星 UHURU による X 線源の天球分布2).

図 4.2: Uhuru 衛星で得られた全天の明るい X 線天体の分布。銀河座標を取っている。銀河中心方向に明るい X 線天体が集中していることがわかる。

4.2.4 中性子星の場合

中性子星の場合は、降着円盤の内側の端 r_{in} は中性子星の表面になる。中性子星の表面に達した時の重力エネルギーを Ω_s とすると、$-\frac{1}{2}\Omega_s$ をそれまでのディスクで放射し、残った $-\frac{1}{2}\Omega_s$ はケプラー運動として保持している。これが中性子星表面にぶつかり、中性子星表面で放射されることになる。

結局、

$$L_{\text{disk}} = L_{\text{surface}} \tag{4.71}$$

$$L_{\text{disk}} = -\frac{1}{2}\Omega_s = \frac{1}{2}G\frac{M_X\dot{M}}{r_{\text{NS}}} \tag{4.72}$$

$$L_{\text{surface}} = -\frac{1}{2}\Omega_s = \frac{1}{2}G\frac{M_X\dot{M}}{r_{\text{NS}}} = 4\pi r_{\text{NS}}^2 f\sigma T_s^4 \tag{4.73}$$

となる。f は中性子星の表面の内光っている領域の割合。

観測的には、常に face on で見ているとは限らないので、inclination を θ とし、観測的に得られる X 線光度と内縁半径を L'_{disk}、r'_{in} とすると

$$L'_{\text{disk}} = L_{\text{disk}}\cos\theta \tag{4.74}$$

$$r'_{\text{in}} = r_{\text{in}}(\cos\theta)^{1/2} \tag{4.75}$$

となる。

LMXB の場合に未知数は M_{NS}、r_{NS}、$\dot{M}$ の 3 つであり、スペクトル観測から以下の 3 つの情報を得ることができる。全光度 L_{total}

$$L_{\text{total}} = L_{\text{disk}} + L_{\text{surface}} = -\Omega_{\text{s}} = G\frac{M_{\text{NS}}\dot{M}}{r_{\text{NS}}} \tag{4.76}$$

が得られる。次に中性子星表面成分の光度 L_{surface} と温度 T_{s}

$$L_{\text{surface}} = \sigma T_s^4 \cdot 4\pi R_{\text{NS}}^2 \tag{4.77}$$

降着円盤からの多温度ディスクブラックボディの最内縁温度

$$T_{\text{in}} = \left(G\frac{M_X}{8\pi\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} M_X^{\frac{1}{4}}\dot{M}^{\frac{1}{4}} r_{\text{in}}^{-\frac{3}{4}} \tag{4.78}$$

$$= 1.1\times 10^7(\text{K})\left(\frac{\text{M}_{\text{NS}}}{1.4\text{M}_\odot}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\dot{\text{M}}}{10^{17}\text{gm/sec}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\text{r}_{\text{NS}}}{10(\text{km})}\right)^{-\frac{3}{4}} \tag{4.79}$$

となる。その結果、$\dot{M}$、M_{NS}、R_{NS} の全てを解くことができる。

図 4.4 で $R' < r'_{\text{in}}$ であること、X 線光度によらず r_{in} が一定であることに注意する。理論的な中性子星の半径は ~ 10km。質量は典型的に $\sim 1.4M_\odot$ であり、色々なモデルを考えても $2\sim 3M_\odot$ である。$1.4M_\odot$ の場合、$r_{\text{g}} = 4$km である。次の章で示す安定な円軌道の限界である 3 倍の Schwarzchile 半径は $3r_{\text{g}} \sim 12$km である。どちらの値を採用しても、~ 10km であり、観測の r'_{in} とほぼ一致する。以上の事実から、このモデルの正当性が主張される。

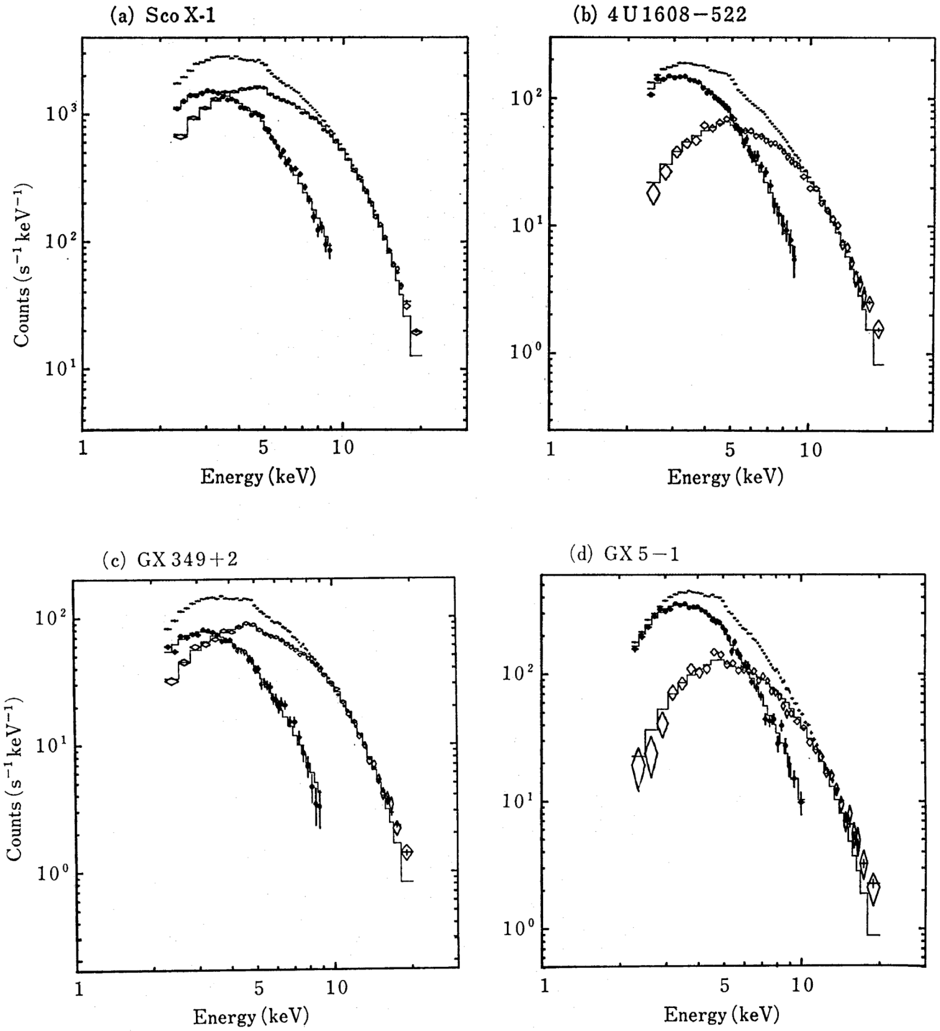


Fig. 4. Examples of the spectrum in the pairs for Sco X-1, 4U 1608−522, GX 349+2, and GX 5−1 (cross), and the decomposed soft (crossed circle) and hard components (rhomb). The best-fit model spectra of the two components are shown by the histograms.

図 4.3: 「てんま」で得られた LMXB のスペクトルと DiskBB+BB モデル。

4.3 ブラックホールの場合

ブラックホールの場合、中性子星の様な表面はない。では降着円盤の内縁は、$r_g = 2\frac{GM}{c^2}$ かというと、実はそうではない。それをごく簡単に触れる。

4.3.1 有効ポテンシャル・エネルギー

古典力学の場合、中心力を受ける粒子のエネルギーは以下のように書ける。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) \tag{4.80}$$

v は動経方向成分 $\dot{r}$ と回転方向成分 $r\dot{\varphi}$ に分けられるので、

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) \tag{4.81}$$

となる。一方、粒子の運動には角運動量保存則が成り立つので、角運動量を l とすると、

$$\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{l^2}{2mr^2} \tag{4.82}$$

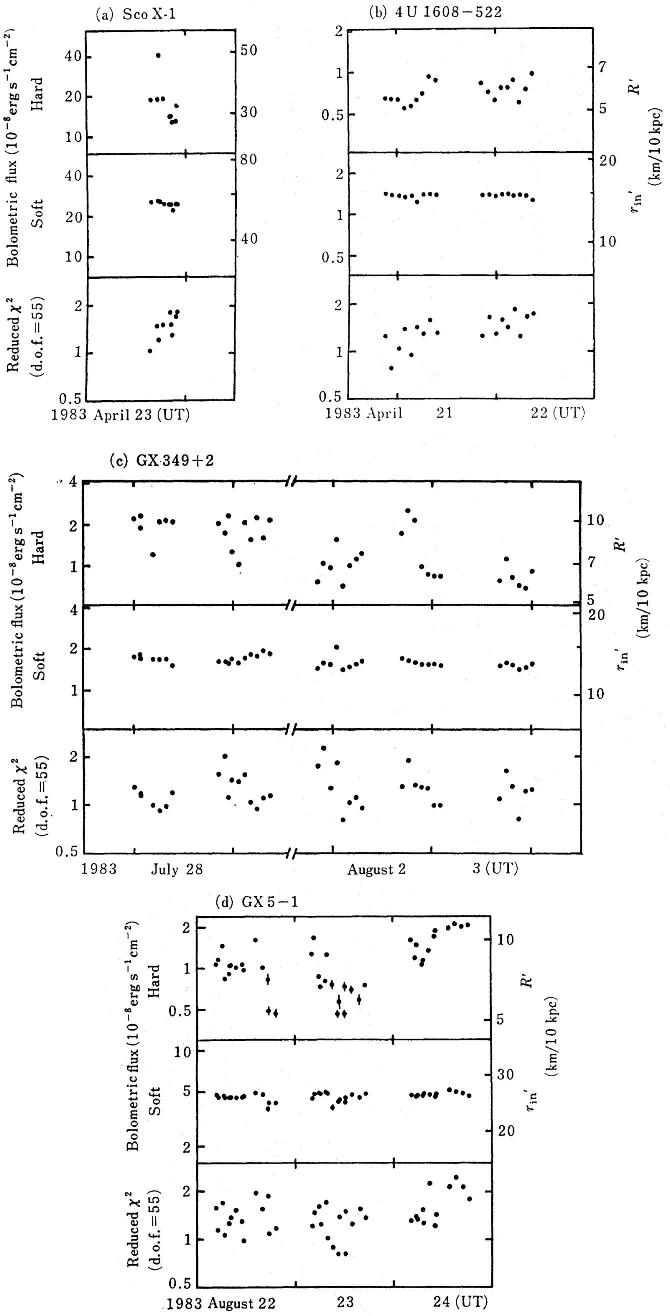


図 4.4: 「てんま」で得られた LMXM のスペクトルを DiskBB+BB モデルで分解した場合のパラメータの時間変化。R' は BB の半径で、$r'_{\rm in}$ はディスクブラックボディの内縁半径。

となる。よって、質量 m、角運動量 l の粒子に対し

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \left(\frac{l^2}{2mr^2} + U(r)\right) \tag{4.83}$$

$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\rm eff} \tag{4.84}$$

$$U_{\rm eff} = \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \tag{4.85}$$

として、有効ポテンシャル・エネルギーU_{eff}を定義することで、粒子の運動を1次元運動にみなすことが可能である。上は中心力一般であったが、ニュートニアンの重力でも当然成り立つ訳で、

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\mathrm{eff}} \tag{4.86}$$

$$U_{\mathrm{eff}} = \frac{l^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} \tag{4.87}$$

となる。$l \neq 0$の場合、このグラフにすると以下の様になる。

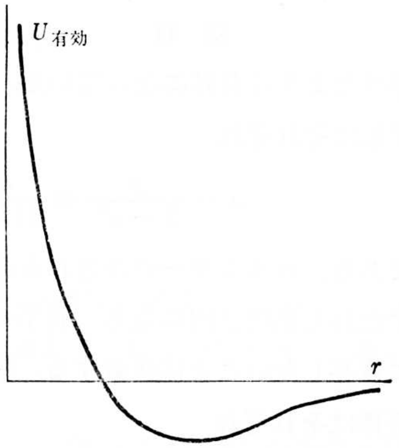


図 4.5: ニュートニアンの場合の有効ポテンシャル・エネルギー。

図4.5は、粒子の角運動量が一定の場合で、角運動量を一定にしたまま運動エネルギーは色々とって良い。最も運動エネルギーが小さい場合は、グラフのローカルミニマムに留まる。これはつまり円運動である。運動エネルギーを大きくすると、ある範囲の中での運動が許されることになり、これは楕円運動となる。さらにエネルギーを上げ0を越えると、$r = \infty$が許され、これは飛び去ることを意味する。いずれにしても注意したいのは角運動量が有限である限り$r = 0$に到達することはできないことである。

4.3.2 Schwarzschild解の場合

導出をやっていると大変なので、ここではそれを飛ばして結果のみを示す。Schwartzschild解の場合の有効ポテンシャル・エネルギーU_{eff}と、有効ポテンシャルV_{eff}は以下のように書ける。

$$U_{\mathrm{eff}} = mV_{\mathrm{eff}} \tag{4.88}$$

$$V_{\mathrm{eff}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right) \tag{4.89}$$

$$\tilde{l} = \frac{l}{m} \tag{4.90}$$

ただし、申し訳ないが自然単位系にしてあり、$\tilde{l}$は単位質量あたりの角運動量である。ニュートニアンと比較すると、定数成分とクロスタームに違いがある。これを図にすると図4.6になる。

奇妙な話しだが、エネルギーが高い粒子は安定な軌道を取ることができず、ブラックホールに落ちてしまう。さらに、今度は角運動量を色々変えてみると図4.7になる。

図4.7で書かれている点は、与えられた角運動量の場合で、エネルギーのローカルミニマムの場合の軌道で、円運動をする。降着円盤を考える場合は粒子は円運動しながら角運動量をすこしずつ失いながらブラックホールに落ちていく。よって、図4.7では常にローカルミニマムの状態を取りながら角運動量を失っていく。つまり各曲線のローカルミニマムを結ぶようにしてブラックホールに落ちていく。一方で、このようなローカルミニマムは$\tilde{l} > 2\sqrt{3}M$の場合にのみ存在し、それより角運動量を失うと、安定な円運動を描くことができなくなる。その時の軌道の半径は、3倍のSchwartzschild半径$3r_g = 6GM/c^2$である。これがブラックホールの場合の標準円盤の内縁となる。

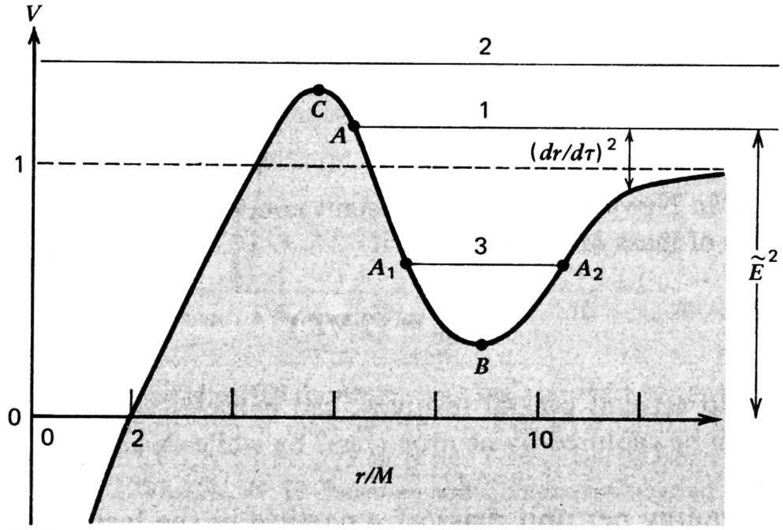


図 4.6: 静止質量が 0 でない粒子の Schwarzschild ブラックホール (質量 M) での有効ポテンシャル。$\tilde{E}$ は単位質量あたりのエネルギー。(1) 束縛されていない (2) ブラックホールに落ちる (3) 束縛される。与えられた角運動量で、エネルギーが最少である場合は円運動となる。

しかし、$3r_g$ 以下では物質が光っていないか、というとそういうことではなく、しっかり $3r_g$ まで観測することが可能であるが、その領域からの輻射は無視できる、ということに過ぎない。この領域で解放される重力エネルギーは、ほとんど運動エネルギーに行ってしまい、そのエネルギーを持ったままブラックホールに素早く落ち込んでしまうということである。

Slim Disk と呼ばれる質量降着率が非常に高い状態では、$r_g \sim 3r_g$ の領域からの輻射も無視できなくなることがいわれている。

4.3.3　ブラックホール標準円盤の内縁温度と光度

前の章から Schwartzschild ブラックホールの場合の安定な最も内側の軌道は 3 倍の Schwartzschild 半径 $3r_g = 6GM/c^2$ であることがわかった。つまり、標準降着円盤を考える場合、その内縁 $r_{\rm in}$ は

$$r_{\rm in} = 3r_g = 6G\frac{M}{c^2} \tag{4.91}$$

となる。標準円盤モデルの場合、ガスはほとんど円運動をしながら少しずつ中心に近付くが、$3r_{\rm g}$ に到達した途端に、熱エネルギー、角運動量を保持したままブラックホールに落ちる。

標準降着円盤の内縁の温度 $T_{\rm in}$ は次のように書ける。

$$T_{\rm in} = \left(G\frac{M_{\rm BH}\dot{M}}{8\pi\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} r_{\rm in}^{-\frac{3}{4}} \tag{4.92}$$

$$= \left(\frac{\dot{M}c^6}{6^3\cdot 8\pi\sigma G^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{M_{\rm BH}}} \tag{4.93}$$

となる。

次に光度を求める。

恒星の場合のエネルギー源は中心核での核融合反応であったが、ブラックホールや中性子連星の場合は、相手の星から供給されるガスの重力エネルギーの解放である。これまで述べた X 線星が光るための、質量降着率 $\dot{M}$ を考えよう。

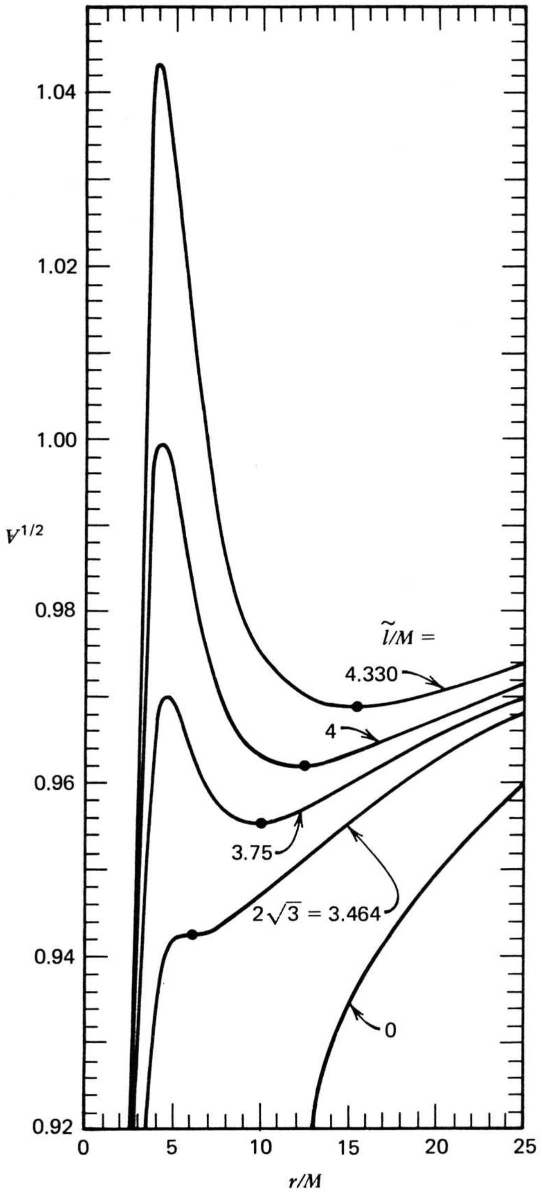


図 4.7: 静止質量が 0 でない粒子の Schwarzschild ブラックホール (質量 M) での有効ポテンシャル。$\tilde{E}$ は単位質量あたりのエネルギー。安定な軌道を取ることができるのは 3 倍の Schwartzschild 半径 $3r_g = 6GM/c^2$ の所まで。それよりも内側では安定な軌道が取れない。

解放された重力エネルギーが輻射に転化されたと考えると、

$$L = \dot{M}\frac{GM}{R} = \eta\dot{M}c^2 = 1.3 \times 10^{37}\left(\frac{\dot{M}}{10^{17}\mathrm{g\ sec}^{-1}}\right)\mathrm{ergs\ sec}^{-1} \tag{4.94}$$

$$\eta = \frac{GM\dot{M}}{R}/\dot{M}c^2 = \frac{GM}{Rc^2} \tag{4.95}$$

と書ける。η は、静止質量に対する輻射への転換効率である。

Schwarzschid のブラックホールを考える場合、Schwarzschild 半径は

$$r_g = 2\frac{GM}{c^2} \tag{4.96}$$

と与えられる。前の章で、ブラックホールの場合、無限遠から Schwarzschild 半径まで落した場合の重力エネルギーが全て解放された場合には、無限遠からプロトンを落し得られるエネルギーは、

$$G\frac{m_pM}{R} = G\frac{m_pM}{r_g} = \frac{1}{2}m_pc^2 \sim \frac{1}{2}938\mathrm{MeV} \tag{4.97}$$

で一定となり、これは、ブラックホールの質量に関わらず、静止質量の 1/2 がエネルギーとして出力することができることを示した。

しかし、現実には降着円盤を形成し、安定な内縁軌道半径が

$$3r_g = 6\frac{GM}{c^2} \tag{4.98}$$

であること、さらにケプラー運動していることから、力学エネルギーを持ったままブラックホールに落ち込む。ビルアル定理は

$$\Omega = -G\frac{m_pM}{R} \tag{4.99}$$

$$E = K + \Omega = \frac{1}{2}\Omega = -\frac{1}{2}G\frac{m_pM}{R} \tag{4.100}$$

なので、$3r_g$ に落ちるまでに解放される重力エネルギーのうち、輻射として放出されるエネルギーは

$$-E = \frac{1}{2}G\frac{m_pM}{3r_g} = \frac{1}{12}m_pc^2 \tag{4.101}$$

$$L = \frac{1}{2}G\frac{\dot{M}M}{3r_g} = \frac{1}{12}\dot{M}c^2 \tag{4.102}$$

となる。よって、光度はブラックホールの質量に関係なく質量降着率で一意に決まりる。η の値は

$$\eta \sim 10\% \tag{4.103}$$

となる。

ここで注意すべきは以下の通りである。まず、中性子星の場合は解放される全重力エネルギーの内、半分が降着円盤で、残りの半分は中性子星表面で放射されたが、ブラックホールの場合は、表面がなく、降着円盤のみとなる。

次に、質量降着率が同じ場合、ブラックホール質量が上がると逆に温度は下がることになる。実際、恒星質量ブラックホールの降着円盤からのブラックボディ輻射はX線領域に来るのに対し、セイファート銀河などAGNでは、紫外線領域に来る (Big Blue Bump)。

ブラックホールまでの距離が分かっていた場合、観測量であるフラックスから光度を求めることができる。ブラックホールの標準円盤を仮定する場合、光度が分かれば、質量降着率 $\dot{M}$ となる。スペクトル観測から円盤内縁の温度 $T_{\rm in}$ は分かる。よって、内縁温度の式からブラックホール質量を求めることができる。

もちろん、これは標準円盤が形成されており、輻射の大半が標準円盤からのブラックボディで放射されている場合に成り立つ式である。銀河系内の恒星質量ブラックホールのHigh Stateはこの状態にあるがLow Stateは非熱的成分が卓越するので、以上の議論は適用できない。また、AGNも同じく非熱的成分が非常に強く、さらに一部のAGNではビーミングという問題があるので、やはり以上の議論は簡単には適用できない。

4.3.4　恒星質量ブラックホール (Stellar Mass Black Hole) のスペクトル

我々の銀河系とマゼラン星雲で見つかっているブラックホールは以下の表4.1の通りである。

ここで言うブラックホールの定義は以下の通り。まず相手の星がIDされており、その運動学より $M_{\rm BH}$ の値が決まっている必要がある。次に、その質量が中性子星の理論的な限界である $2\sim 3M_\odot$ よりも大きい必要がある。そういうのを調べてみると、ブラックホール連星にはX線新星が多い。

また、「X線での特徴が似ているので...」というのは、コンパクト星の質量は良く分からんが、時間変動とかスペクトルとかの様子がブラックホール候補天体に良くにているために、ブラックホールじゃないかなぁ、と思っている、という訳である。

誰もがブラックホール (候補) 連星と認める天体

			位置 (2000 分点)							
	質量	赤経			赤緯			銀経	銀緯	距離
	$M_\odot$	hh	mm	ss	dd	mm	ss	deg	deg	kpc
[X 線新星]										
J0422+32	> 3.2	04	21	42.8	+32	54	27	165.88	-11.91	1.39
A0620-00 (V616 Mon)	> 7.3	06	22	44.5	-00	20	45	209.96	-6.54	$1.0 \sim 1.2$
GS2000+251 (QZ Vul)	$6 - 7.5$	20	02	49.58	+25	14	11.3	63.37	-3.00	2.7
GS1124-68 (GRS1124-68)	~ 6	11	26	26.66	-68	40	32.6	295.30	-7.07	2.5
H1705-25 (V2107 Oph)	~ 6	17	08	14.6	-25	05	29	358.59	9.06	3
GS2023+338 (V404 Cyg)	$8 - 15.5$	20	24	03.77	+33	52	04.1	73.12	-2.09	3.5
4U1543-47	$2.7 - 7.5$	15	47	08.6	-47	40	10	330.92	5.43	6.1
J1655-40 (V1033 Sco)	7.02 ± 0.22	16	54	00.25	-39	50	45.0	344.98	2.46	3.2
[X 線で定常的に光っている天体]										
LMC X-3	> 7	05	38	56.4	-64	05	01	273.58	-32.08	50 (LMC)
LMC X-1	$\sim 6(?)$	05	39	38.7	-69	44	36	280.20	-31.52	50 (LMC)
Cyg X-1	$\sim 16(> 7)$	19	58	21.6756	+35	12	05.775	71.33	3.07	2.0

X 線での特徴が似ているのでブラックホール連星に入れる場合がある

			位置 (2000 分点)							
	質量	赤経			赤緯			銀経	銀緯	距離
	$M_\odot$	hh	mm	ss	dd	mm	ss	deg	deg	kpc
[X 線新星]										
GX339-4 (V821 Ara)		17	02	49.5	-48	47	23	338.94	-4.33	4
Cen X-4 (V822 Cen)		4	58	22.0	-31	40	08	233.65	-36.74	1.2

表 4.1: **ブラックホール連星のリストとその質量に関する参考文献**: Tanaka and Shibazaki ARAA 34, 607 (1996), Remillard et al. ApJ 459, 226 (1996), Orosz et al. ApJ 499, 375 (1998), Charles in “Black Holes in Binaries and Galactic Nuclei” p.28 (2000)

「ぎんが」衛星で得られた LMXB とブラックホール候補天体のスペクトルを示す。

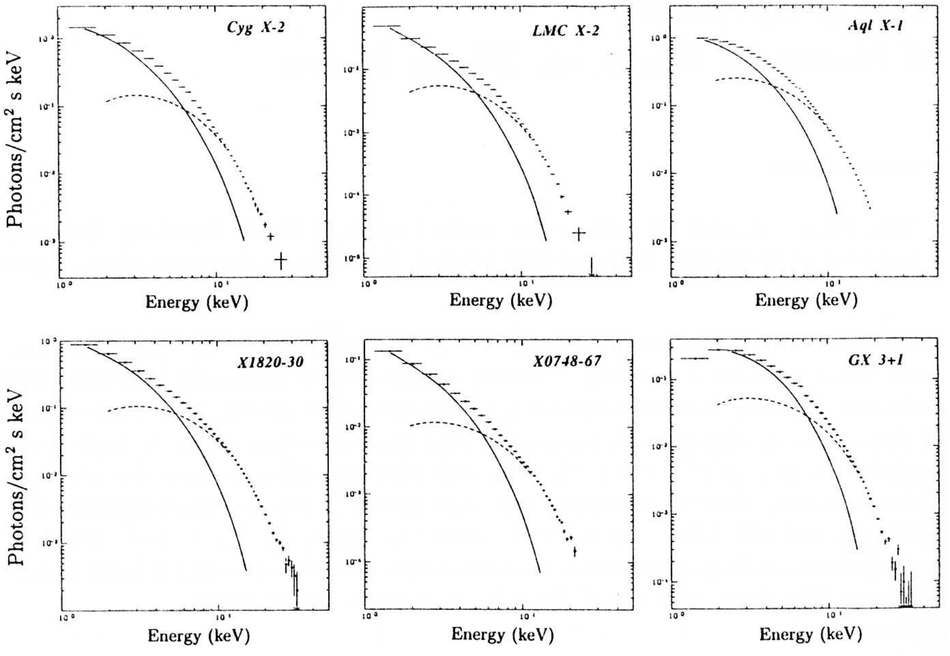


図 4.8: 明るい時の中性子星連星 (LMXB) の X 線スペクトル。

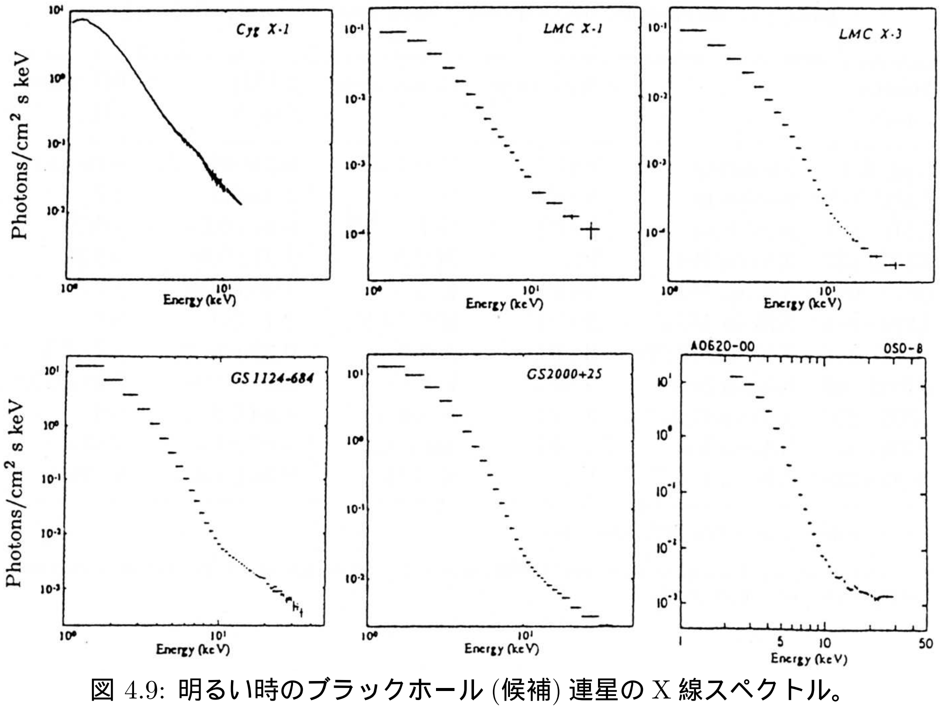


図 4.9: 明るい時のブラックホール (候補) 連星の X 線スペクトル。

図 4.8 と図 4.9 を比較すると、ブラックホール候補連星の方が一般的にソフトであることがわかる。ブラックホール候補天体ではハードテールが見えており、暗い時はこの成分が卓越する (Soft State = High State, Hard State = Low State)。これは中性子星連星でも同様。しかしこの起源は良く分かっていない。

4.3.5　AGN の場合

我々の銀河系を含む、ほとんどの銀河の中心には $10^6 \sim 10^9 \mathrm{M}_\odot$ の質量を持つブラックホールが存在する。もちろん質量降着がなければ、見えない訳で、実際我々の銀河系や M31 はそのために暗いのだと考えられている。

で、それなりに明るいのがSeyfert銀河。Sy1では光~X線に掛けて盛り上がりがあり、これをBig Blue Bumpと呼んだりする。これが降着円盤だと考えられている(図4.10)。

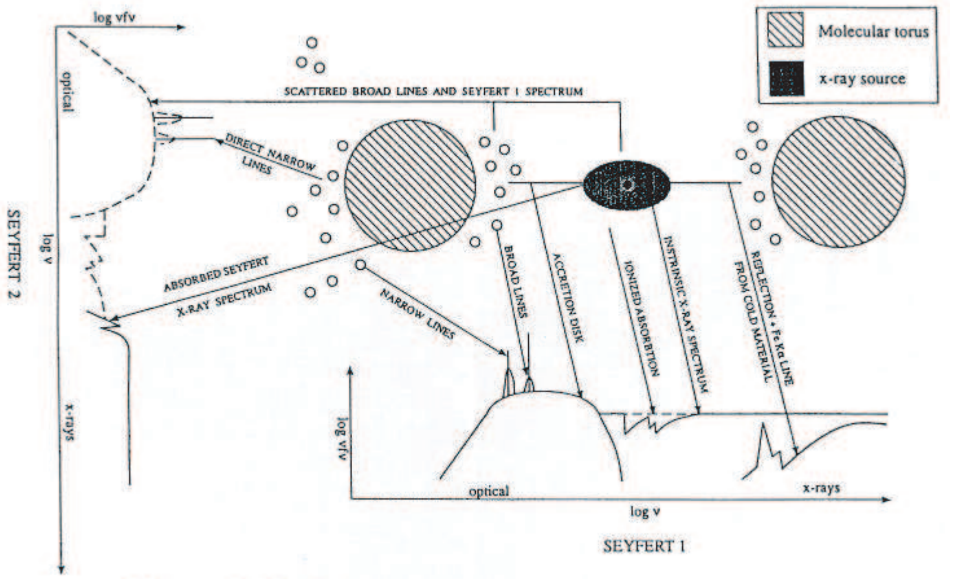

log νfν
optical
log ν
x-rays
SEYFERT 2
Molecular torus
x-ray source
SCATTERED BROAD LINES AND SEYFERT 1 SPECTRUM
DIRECT NARROW LINES
ABSORBED SEYFERT X-RAY SPECTRUM
NARROW LINES
BROAD LINES
ACCRETION DISK
IONIZED ABSORBTION
INTRINSIC X-RAY SPECTRUM
REFLECTION + Fe Kα LINE FROM COLD MATERIAL
log νfν
optical
x-rays
log ν
SEYFERT 1

Fig. 1. — The Big Picture of Seyfert galaxies (Mushotzky, Done & Pounds 1993).

図4.10: Big Picture of Seyfert Galaxy。

4.4　角運動量の輸送

ガスがブラックホールや中性子星に落ち込む時にエネルギーを輻射で失うが、同時に角運動量も失う必要がある。降着円盤の場合には、隣り合うリングとの粘性により、内側から外側へ角運動量が運ばれると考えられている。粘性の値や起源は良く分かっていないが、しばしばα Viscosityというのが仮定される。これは、粘性によるトルクが圧力に比例するというもの。

$$f_\phi = \alpha P \tag{4.104}$$

$$\alpha \lesssim 1 \tag{4.105}$$

しかし、全ての角運動量が外へ運ばれる訳ではなく、一部は中心星へ持ち込まれる。これはケプラー運動をしながら落ち込むのであるから当たり前である。中心星に落ち込むガスの内、βのみが中心星に降着し、残りの$(1-\beta)$が外へ逃げるとするとその量は

$$\dot{L} = \beta \dot{M} \left(GMr\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.106}$$

となる。この時の回転速度と中心星の回転速度の関係から、中心星がスピンアップしたり、スピンダウンしたりする。また、AGNや最近では近傍のブラックホール候補天体でジェットが観測されている。これは、この角運動量によって生じているのかも知れない。

4.5　ADAF

こえまで説明したディスクは「標準ディスク」と呼ばれるものであった。それに対し、別の理論的に安定な解としてアドベクション(移流)優勢ディスクモデル(ADAF)が発見され、議論されている(図4.11)。

標準モデルでは、解放される重力エネルギーは、粘性の働きにより熱エネルギ- に転化されるが、そのエネルギーは効率良く輻射の形でディスクから放射される。すなわち、粘性加熱と輻射冷却とのバランスで熱構造が決定できる。ディスクの温度による熱エネルギ- は、運動エネルギーに比べて十分冷えることができる。そのため、ディスクは幾何学的

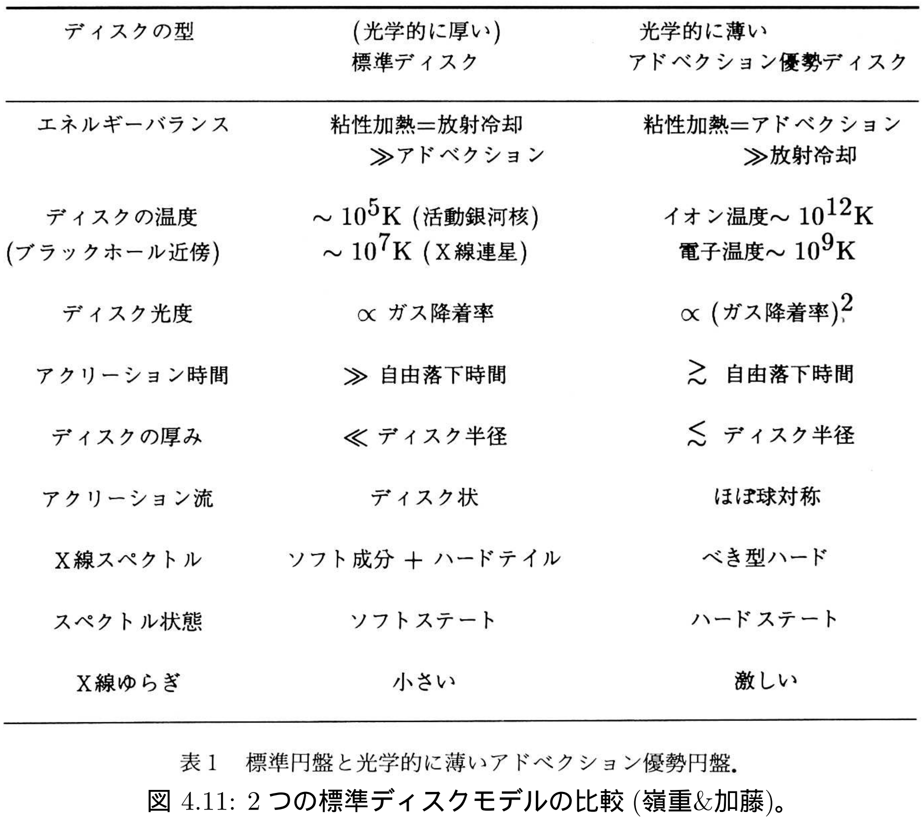
に薄くなる。アクリーションの時間スケールは粘性の働きによってガスの角運動量を抜き取る時間スケールで決まるが、粘性が小さいために、その時間スケールは自由落下時間に比べて十分長くなる。

一方、ADAF は輻射を出す効率が極めて悪い場合の定常解である。ADAF は、1) 光学的に薄いディスク、2) 光学的に厚いディスクの2種類がある。後者は「Slim ディスク」とも呼ばれる。ここではまず前者を説明する。

ガスの粘性はほぼ温度に比例するので、ガス温度が一旦上昇し粘性が高くなると角運動量を効率良く抜き取ることが可能となる。一方、温度が一旦上昇すると幾何学的にディスクがふくれてしまい、ガスの密度が下がる。その結果、輻射効率は悪くなり、さらにガスの温度が上昇することになり、やがてどこかで落ち着く。またガスの温度が高いため、高エネルギー放射が可能になる。ディスクは大局的には熱的に安定であるが、波長の短い摂動に対しては熱不安定であり激しい時間変動を起こす。詳しいシミュレーションではこの摂動は最初の形を保ったまま、中心に落ちていく。解放された重力エネルギーのほとんどは、熱エネルギ- の形でガスが持ったまま自由落下時間程度で、中心星へ持ち込むことになる。AGN や LMXB では、硬 X 線、ガンマ線成分が観測されるが、この ADAF によって放射されていると考える説が有力である。

光学的に厚い ADAF(Slim Disk) は以下の様なものである。ディスクの内部で発生した熱は輻射としてディスク内部を散乱拡散しながらディスク表面に運ばれ、外へ放射される。標準ディスクでは、ガスが中心に落ち込む時間に比べ、ディスク内部で散乱拡散されながら表面に達する時間は十分短い。一方、Slim ディスクでは、その関係が逆のなってしまう。そのため、粘性により発生した熱はディスクから逃れることなく、輻射の形で中心星に持ち込まれる。

ADAF は radiative cooling より advection term ($\propto Tds/dr$) が上回っておきるもの。一般相対論とは無関係で、ニュートンでも相対論でも、どちらでもおきる。ADAF は元々比較的大きな角運動量をもってたとしても、高温で角運動量抜き取りの効率が大きいため (粘性はほぼ温度に比例する)、角運動量はすぐ無くなり spherical accretion に似たような状況が実現する。言い換えると、連星系 Roche lobe overflow のような場合でも実現するが、spherical accretion はおきない。



ディスクの型	(光学的に厚い) 標準ディスク	光学的に薄い アドベクション優勢ディスク
エネルギーバランス	粘性加熱＝放射冷却 ≫アドベクション	粘性加熱＝アドベクション ≫放射冷却
ディスクの温度 (ブラックホール近傍)	$\sim 10^5$K (活動銀河核) $\sim 10^7$K (X線連星)	イオン温度$\sim 10^{12}$K 電子温度$\sim 10^9$K
ディスク光度	$\propto$ ガス降着率	$\propto$ (ガス降着率)^2
アクリーション時間	$\gg$ 自由落下時間	$\gtrsim$ 自由落下時間
ディスクの厚み	$\ll$ ディスク半径	$\lesssim$ ディスク半径
アクリーション流	ディスク状	ほぼ球対称
X線スペクトル	ソフト成分 ＋ ハードテイル	べき型ハード
スペクトル状態	ソフトステート	ハードステート
X線ゆらぎ	小さい	激しい

表1　標準円盤と光学的に薄いアドベクション優勢円盤.

図 4.11: 2 つの標準ディスクモデルの比較 (嶺重&加藤)。

4.6　自己重力系と負の比熱

ここは、本当はビルアル定理の熱力学バージョンを導入してやりたいが、とても時間がないので残念ながらスキップします。

第5章　トムソン散乱とエディントン光度

5.1　動く粒子による放射

5.1.1　直観的理解

光は所詮、視線方向に垂直に時間変動する電場のことである。それはどのように放射されるのか、直観的に説明する。

電波の送信機のアンテナに、高周波をかけると電波が放射される。電波も光の一種である。この場合、観測者から見て電子の加速度運動が見える方向へ電波を放出されている (等速直線運動ではダメ)。アンテナを色々な方向から眺めた場合、電子の加速度運動が最も良く見えるのは、アンテナ垂直方向である。よって、この方向へは最も強い電波が放出されている。一方、l アンテナの軸方向から眺めると電子の加速度運動は見えない。電場の偏光方向は、観測者から見て電子の加速度方向と一致する。放出される光子の周波数は、観測者が検出する電場の時間変化をフーリエ変換したもので決まる。強度は、古典的には電場の振幅であり、量子論的には放出される確率分布、ということになる。

電波の送信機の場合は電子は単振動させることになるので、フーリエ分解を行っても、δ-関数的な周波数成分を持つ。一方で、制動放射などでは、色々な周波数成分を持つことになるので、出力される光子のエネルギーは連続的となる。

5.1.2　Larmor's Formula

動く粒子が作る電場、磁場は、$\vec{n}$ を粒子と観測者間の単位ベクトル、R を両者の距離とすると次のように書ける。

$$\vec{\beta} \equiv \frac{\vec{u}}{c}, \kappa \equiv 1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta} \tag{5.1}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = q\left[\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\kappa^3 R^2}\right] + \frac{q}{c}\left[\frac{\vec{n}}{\kappa^3 R}\times\left\{\left(\vec{n}-\vec{\beta}\right)\times\dot{\vec{\beta}}\right\}\right] \tag{5.2}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \left[\vec{n}\times\vec{E}(\vec{r},t)\right] \tag{5.3}$$

電場、磁場の第一項は距離に 2 乗で落ちる。これは静電場、静磁場の項である。これに対し第二項は 1 乗なので減衰せず無限遠に到達できる。これが放射の項である。放射の項のみを取り出すと、

$$\vec{E}_{\mathrm{rad}}(\vec{r},t) = \frac{q}{c}\left[\frac{\vec{n}}{\kappa^3 R}\times\left\{\left(\vec{n}-\vec{\beta}\right)\times\dot{\vec{\beta}}\right\}\right] \tag{5.4}$$

$$\vec{B}_{\mathrm{rad}}(\vec{r},t) = \left[\vec{n}\times\vec{E_{\mathrm{rad}}}(\vec{r},t)\right] \tag{5.5}$$

となる。さらに、粒子の速度が光速よりも十分遅く $\beta \ll 1$、$\kappa \to 1$ とすると、

$$\vec{E}_{\mathrm{rad}}(\vec{r},t) = \frac{q}{Rc^2}\left[\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\dot{\vec{u}}\right)\right] \tag{5.6}$$

$$\vec{B}_{\mathrm{rad}}(\vec{r},t) = \left[\vec{n}\times\vec{E}_{\mathrm{rad}}(\vec{r},t)\right] \tag{5.7}$$

$$|\vec{E}_{\mathrm{rad}}| = |\vec{B}_{\mathrm{rad}}| = \frac{q\dot{u}}{Rc^2}\sin\Theta \tag{5.8}$$

$$\tag{5.9}$$

となる。この式の特徴は (1) 粒子は加速度運動をしている必要がある。(2) その加速運動が観測者から見えている必要がある。別の言い方をすると、視線方向に沿った加速運動では電場は観測者には観測されない。(3) 電場は、観測者から見た場合の粒子の加速度方向のちょうど逆方向に見える。(4) 電場強度は、観測者から見た時の粒子の加速度に比例し、距

離に反比例する。(5) 電磁場は、加速度が最も大きく見える方向へ最も強く放射され、加速度が見えない方向へは放射されない。

放射される電磁場のポインティングベクトル強度は

$$S = \frac{c}{4\pi}E_{\mathrm{rad}}^2 = \frac{c}{4\pi}\frac{q^2\dot{u}^2}{R^2c^4}\sin^2\Theta \tag{5.10}$$

となる。単位時間あたり単位立体角に放射される電磁場強度は、

$$dW = S\cdot dA\cdot dt \tag{5.11}$$

$$dA = R^2 d\Omega \tag{5.12}$$

$$\frac{dW}{dtd\Omega} = \frac{q^2\dot{u}^2}{4\pi c^3}\sin^2\Theta \tag{5.13}$$

となる。4π 方向に放射される電磁場強度は、

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{q^2\dot{u}^2}{4\pi c^3}\int \sin^2\Theta d\Omega \tag{5.14}$$

$$= \frac{2q^2\dot{u}^2}{3c^3} \tag{5.15}$$

となる。式 5.15 を Larmor's Formula と呼ぶ。

ところで、これは本当に光子であろうか?この電磁場のスペクトルを求めろと言われれば、電場の時間変化をフーリエ変換すれば良い。よって、観測者から見てもしも $\dot{u}$ が一定であれば、電場は時間変化をしないことになり、結局これは光子ではないと言うことになる。一方、単振動していれば、その周期の周波数を持つ光子が放出されていることになる。

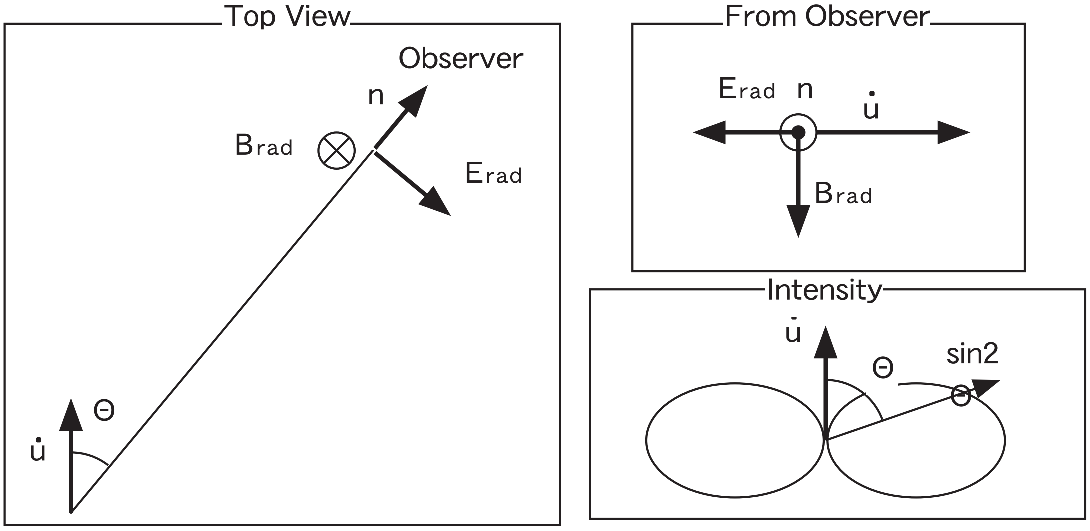


図 5.1: 加速度運動をする粒子からの電磁場の放射。

5.1.3 Dipole 輻射

複数 (1 つでも良い) の粒子群からの放射を考えると、観測される放射はそれぞれの粒子からの放射の足し合わせなので、

$$\vec{E}_{\mathrm{rad}} = \sum_i \frac{q_i}{c^2}\frac{\vec{n_i}\times(\vec{n_i}\times\dot{\vec{u}}_i)}{R_i} \tag{5.16}$$

である。粒子群の大きさに比べ、観測者は十分遠方に位置しているとし、$R_i \to R_0$、$\vec{n_i} \to \vec{n}$ と置き換え、さらに

$$\vec{d} = \sum_i q_i\vec{r_i} \tag{5.17}$$

$$\ddot{\vec{d}} = \sum_i q_i\ddot{\vec{r_i}} = \sum_i q_i\dot{\vec{u}}_i \tag{5.18}$$

という Dipole 近似を行なうと、

$$E = \ddot{d}\,\frac{\sin\Theta}{c^2 R_0} \tag{5.19}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\Theta \tag{5.20}$$

$$P = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3} \tag{5.21}$$

$$< P > = \frac{2 < \ddot{\vec{d}}^2 >}{3c^3} \tag{5.22}$$

となる。光子のスペクトルは、この電場をフーリエ変換して求められる。Dipole が単振動していれば単色の光子を放出していることになる (サイクロトロン)。そこで、次のような周波数 ω_0 で振動する電気双極子を仮定すると、

$$d(t) = d_0 \sin\omega_0 t \tag{5.23}$$

$$\ddot{d}(t) = -d_0\omega_0^2 \sin\omega_0 t \tag{5.24}$$

$$< \ddot{d}^2 > = \frac{1}{2} d_0^2\omega_0^4 \tag{5.25}$$

が得られる。よって、

$$< P > = \frac{1}{3}\frac{d_0^2\omega_0^4}{c^3} \tag{5.26}$$

が得られる。

単色でない場合のスペクトルは以下のように求められる。

$$d(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\hat{d}(\omega)d\omega \tag{5.27}$$

$$\ddot{d}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2\hat{d}(\omega))e^{-i\omega t}d\omega \tag{5.28}$$

これらの式から、$d(t)$、$\ddot{d}(t)$ から $\hat{d}(\omega)$ を求める。電場 E の時間変化が

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\hat{E}(\omega)d\omega \tag{5.29}$$

$$= \ddot{d}(t)\frac{\sin\Theta}{c^2 R_0} \tag{5.30}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2\frac{\sin\Theta}{c^2 R_0}\hat{d}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{5.31}$$

であることを考えると、電場 E の各周波数成分は

$$\hat{E}(\omega) = -\frac{1}{c^2 R_0}\omega^2\hat{d}(\omega)\sin\Theta \tag{5.32}$$

となる。よって放射される電磁波のエネルギーの各周波数成分は

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{c^3}\omega^4|\hat{d}(\omega)|^2\sin^2\Theta \tag{5.33}$$

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3}|\hat{d}(\omega)|^2 \tag{5.34}$$

となる。

5.2 トムソン散乱

5.2.1 トムソン散乱の考え方

自由電子による散乱をトムソン散乱と呼ぶ。トムソン散乱の古典的な考え方は以下の通り、(1) まず、入射フォトンの電場により電子が振動する。(2) この電子は電気双極子として考えると、Dipole 輻射を行なう。入射フォトンと同じ周波

数を持つ電磁波を放射しフォトンを放出する。(3) 入射フォトンも出力するフォトンも今は古典的な波だと考えているので、実は「フォトン」という考えは当てはまらず、微分散乱断面積に応じて放射される電磁波と考える。(4) しかし量子論的に考えると、入射フォトンは消えて新たにフォトンが出力される。そのエネルギーは変化しないので、外から見ている人には結果的に散乱として観測される。

量子論的に解くには、電磁場の量子化を行なう必要がある。トムソン散乱はエネルギーが変化しない散乱であるのに対し、コンプトン散乱はエネルギーが変化する散乱であるが、この両者は量子力学的には同じ過程である。コンプトン電子の静止エネルギーに対し光子エネルギーが小さい極限がトムソン散乱である。コンプトン散乱を真面目に量子力学的に扱ったのが Klien-Nishina である。興味のある人は勉強しましょう (というか、授業で習っていても悪くはない)。

5.2.2 入射フォトンが偏光している場合のトムソン散乱

入射してくる周波数 ω_0 の電磁波によって静止している電子が受ける力は

$$\vec{F} = e\vec{\epsilon}E_0 \sin\omega_0 t \tag{5.35}$$

である。よって、電子の質量を m_{e} とすると、その電気双極子は以下のように求められる。

$$m_{\mathrm{e}}\ddot{\vec{r}} = e\vec{\epsilon}E_0 \sin\omega_0 t \tag{5.36}$$

$$\vec{d} = e\vec{r} \tag{5.37}$$

$$\ddot{\vec{d}} = \frac{e^2E_0^2}{m_{\mathrm{e}}}\vec{\epsilon}\sin\omega_0 t \tag{5.38}$$

$$<\ddot{\vec{d}}^2> = \frac{1}{2}\frac{e^2E_0^4}{m_{\mathrm{e}}^2} \tag{5.39}$$

よって、放射される電磁波が以下のように得られる。

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{2<\ddot{\vec{d}}^2>}{4\pi c^3}\sin^2\Theta \tag{5.40}$$

$$= \frac{e^4E_0^2}{8\pi m_{\mathrm{e}}^2c^3}\sin^2\Theta \tag{5.41}$$

$$P = \frac{e^4E_0^2}{3m_{\mathrm{e}}^2c^3} \quad \text{— (1)} \tag{5.42}$$

散乱断面積は、入射エネルギーに対する出力エネルギーの立体角分布として求められるので、入射エネルギーをポインティングを S とすると

$$<S> = (c/8\pi)E_0^2 \quad \text{— (2)} \tag{5.43}$$

である。よって、

$$\frac{dP}{d\Omega} = <S>\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{cE_0^2}{8\pi}\frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{5.44}$$

$$= \frac{e^4E_0^2}{8\pi m_{\mathrm{e}}^2c^3}\sin^2\Theta \tag{5.45}$$

となる。よって、微分断面積は入射フォトンに対する出力フォトンの角度を θ とし、$\theta = \pi/2 - \Theta$ であることに注意すると、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{pol}} = \frac{e^4}{m_{\mathrm{e}}^2c^4}\sin^2\Theta = r_0^2\sin^2\Theta = r_0^2\cos^2\theta \tag{5.46}$$

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{m_{\mathrm{e}}c^2} = 2.8\times10^{-13}\mathrm{cm} \tag{5.47}$$

となる。θ は、z 軸から出力フォトンの進む軸を通ってさらに $x-y$ 平面上に落ちる時の、$x-y$ 平面と出力フォトンの進む軸の成す角度である。$x-y$ 平面と出力フォトンの進む軸の成す角度。つまり、z 軸に対して軸対称となる。r_0 は古典電子半径である。また、全断面積 σ_{T} は

$$\sigma_{\mathrm{T}} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \tag{5.48}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_{\mathrm{e}}c^2}\right)^2 \tag{5.49}$$

$$= \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 0.665 \times 10^{-24} \mathrm{cm}^2 \tag{5.50}$$

$$r_0 = \frac{e^2}{m_{\mathrm{e}}c^2} \tag{5.51}$$

となる。

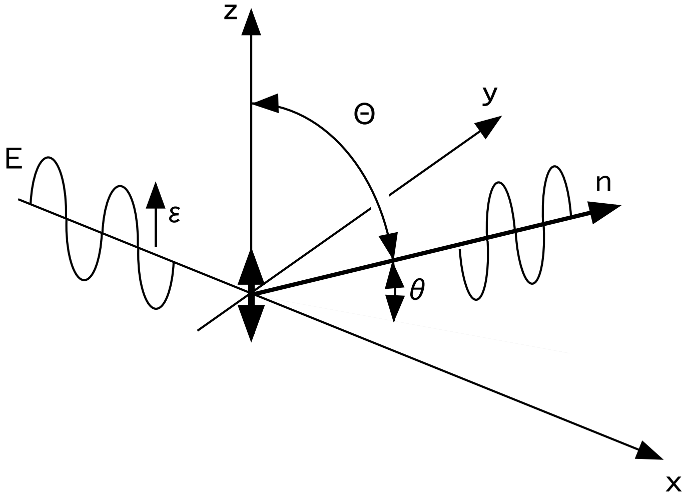


図 5.2: 偏光した光子に対するトムソン散乱。

図 5.2 で考えると、トムソン散乱はちょうど z 軸方向に対称なドーナツ状の微分散乱断面積を持つ。散乱されたフォトンの電場は、$\vec{n}$ と z 軸を結ぶ面に偏光する。

Forward 散乱と Backward 散乱の確率は同じになることは、定性的には以下のように理解できる。入射フォトンの電場に対し、電子が作る電場は逆位相である。その結果、入射フォトンがそのまま素通りしていく確率は減り、その代わりに別の方向に放射される確率が大きくなる。

全断面積の別の導出方法

式 (2) はポインティングベクトルであり、電子に対して単位時間、単位面積に与えられるエネルギーを示している。その内、式 (1) で与えられるエネルギーを散乱させている。よって散乱されているエネルギーを得るために、どれだけの面積のポインティングベクトルが必要か計算できる。つまり、これが散乱断面積 σ_{T} と考えることができる。すなわち、

$$\sigma_{\mathrm{T}} \cdot < S > = P \tag{5.52}$$

$$\sigma_{\mathrm{T}}(c/8\pi)E_0^2 = \frac{e^4 E_0^2}{3m_{\mathrm{e}}^2 c^3} \tag{5.53}$$

$$\sigma_{\mathrm{T}} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_{\mathrm{e}}c^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \tag{5.54}$$

となる。

5.2.3　入射フォトンが無偏光の場合のトムソン散乱

偏光していないフォトン (そもそもそんなものは存在しないが) は偏光したフォトンの足し合わせで考えることができる。詳しい計算は飛ばして結果だけ書くと、微分散乱断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm unpol} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\right)_{\rm pol} + \left(\frac{d\sigma(\pi/2)}{d\Omega}\right)_{\rm pol}\right] \tag{5.55}$$

$$= \frac{1}{2}r_0^2(1+\sin^2\Theta) \tag{5.56}$$

$$= \frac{1}{2}r_0^2(1+\cos^2\theta_1) \tag{5.57}$$

となる。θ_1 は先ほどの θ と意味が違い、入射フォトンの進む軸と、放射フォトンの進む軸の成す角度である。つまり、入射フォトンの進む軸に対して、軸対称。偏光度 Π は、

$$\Pi = \frac{1-\cos^2\theta_1}{1+\cos^2\theta_1} \tag{5.58}$$

となる。$\theta_1 = 0$ すなわち、入射フォトンと同じ軸 (forward と backward の二つ) の場合は偏向しない。これは散乱断面積が元の入射フォトンの偏光に関係ないためである。一方、$\pi/2$ すなわち入射フォトンと垂直方向に散乱された場合は、入射フォトンの進行方向に対し垂直方向に 100%偏光する。これは、散乱できる入射フォトンの偏光面は限られてしまうためである。

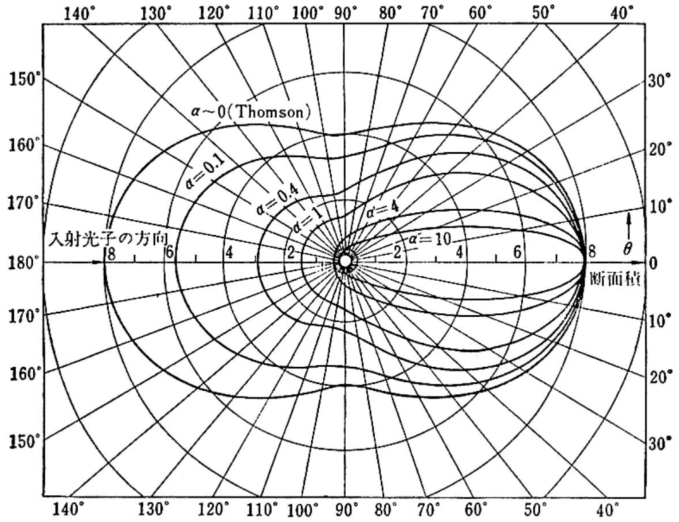


図 5.3: 偏光していない光子に対するトムソン散乱とコンプトン散乱の散乱断面積。$\alpha = h\nu/m_{\rm e}c^2$ である。

いずれにしても、(1) まず入射フォトンによる電子の加速度方向を考え、(2) 次にその加速度を観測者の方から見ることが可能かどうかを考えれば、散乱断面積と散乱による偏光は容易に理解できる。

ところで、

$$\sigma_{\rm T} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega \tag{5.59}$$

$$= \frac{8\pi}{3}r_0^2 = 0.665\times 10^{-24}{\rm cm}^2 \tag{5.60}$$

なので、プロトンに対する散乱断面積は無視できる。つまり、プロトンは重過ぎて振動させることができない、ということ。

5.2.4　コンプトン散乱との関係

コンプトン散乱でも、光子の電子による散乱であるが、入射光子のエネルギーが高く、電子と光子の間でエネルギーのやりとりがあることが、トムソン散乱との違いである。しかし、この 2 つの散乱は実体は全く同じものである。

電子の静止質量程度を境に、トムソン散乱からコンプトン散乱になると考えれば良い。コンプトン散乱は、電子のエネルギーが高い場合 (逆コンプトン散乱) の場合も含めて、別の所でもう少し詳しく述べる。

5.3　エディントン限界

質量 M、光度 L で光っている星に、プラズマ状態のガスが降着すること、または、プラズマ状態の星の外層を考える。星からの輻射はもちろん連続的だが、平均的なエネルギーを $h\nu$ だと考える (後でこの項は消えるので心配しない)。

半径 r で、単位時間あたり単位面積を通過する光子数 n は

$$n = \frac{L}{4\pi r^2 h\nu} \tag{5.61}$$

となる。光子は電子と衝突し 4π 方向に散乱され、電子に対して運動量を与える。一回の散乱で電子に与える運動量は $h\nu/c$ なので、単位時間あたりに与える運動量は力積の関係 $\Delta p = F\Delta t$ より、輻射により 1 個の電子が定常的に受ける力 $F_{\rm rad}$ は、

$$\begin{aligned}
\Delta p &= F\Delta t && (5.62)\\
F &= \frac{\Delta p}{\Delta t} && (5.63)\\
F_{\rm rad} &= \frac{h\nu}{c} n\sigma_{\rm T} = \frac{h\nu}{c}\frac{L\sigma_{\rm T}}{4\pi r^2 h\nu} && (5.64)\\
&= \frac{L\sigma_{\rm T}}{4\pi r^2 c} && (5.65)
\end{aligned}$$

となる。一方、一つの陽子が受ける重力 $F_{\rm G}$ は

$$F_{\rm G} = G\frac{Mm_p}{r^2} \tag{5.66}$$

である。プラズマ状態では電子と陽子はクーロン力で強く結びつけられている。そのため、電子と陽子は一体として考える必要があり、お互いが受ける力は両者に働くと考えるべきである。

この輻射力と重力の両者が釣り合うエディントン光度 $L_{\rm Edd}$ と呼び、

$$\begin{aligned}
F_{\rm rad} &= \frac{L_{\rm Edd}\sigma_{\rm T}}{4\pi r^2 c} = F_{\rm G} = G\frac{Mm_p}{r^2} && (5.67)\\
L_{\rm Edd} &= \frac{4\pi cGMm_p}{\sigma_{\rm T}} = 1.3\times 10^{38}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)[\text{ergs/s}] && (5.68)
\end{aligned}$$

で与えられる。もしも輻射力が重力に勝つと、質量降着による重力エネルギー解放で光っている星では、それ以上物が降着できなくなり、結果的に光れなくなる。また、恒星を考える場合は外層が吹き飛ばされることになるので、そのような恒星は安定には存在できないことになる。結果的に、エディントン光度よりも明るく輝くことはできないと言う事である。

ここでは水素のみを考えたが実際にはヘリウムもあるわけで、中性子の分だけ余分に重力が働くことになる。また、コンパクト星では一般相対論的な効果は無視できなくなる。それを補正すると以下の式になる。

$$\begin{aligned}
L_{\rm Edd} &= \frac{4\pi cGM}{\kappa}g = 1.5\times 10^{38}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{1.7}{1+X}\right)g[\text{ergs/s}] && (5.69)\\
\kappa &= \frac{\sigma_{\rm T}}{m_p}(1+X) && (5.70)\\
g &= \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{1/2} && (5.71)
\end{aligned}$$

κ はトムソン散乱の Opacity、X は水素の質量存在比である。g は一般相対論的な効果を表す値で、普通の星は当然 1 だが、中性子星表面だと $0.6 \sim 0.8$ に到達する。

5.4　恒星が取り得る最大質量 (多分トムソン散乱ではなく UV なので、調べること)

難しい話しはさておき、恒星の光度と質量には $0.5M_\odot < M < 20M_\odot$ の範囲で次の関係がある (eg. 高原「宇宙物理学」p55)。

$$L \propto M^{3.5} \tag{5.72}$$

$$\left(\frac{L}{L_\odot}\right) = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5} \tag{5.73}$$

$$L = 3.9\times10^{33}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5}\ \text{[ergs/s]} \tag{5.74}$$

この光度はエディントン限界より小さい必要があるので、

$$L < L_{\rm Edd} = 1.5\times10^{38}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\ \text{[ergs/s]} \tag{5.75}$$

(5.76)

よって、

$$3.9\times10^{33}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5} < 1.5\times10^{38}\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \tag{5.77}$$

$$M < 70M_\odot \tag{5.78}$$

が得られる。実際銀河系で観測されている最も質量の大きい恒星は $100M_\odot$ 程度であり、マゼラン雲を含めても $200M_\odot$ 程度である。また、質量の大きい O 型星や Wolf-Rayet 星では、輻射圧による恒星風が観測されており、Wolf-Rayet に至っては、そのために水素とヘリウムの外層はふっ飛び、恒星内部の CNO サイクルで元素合成された、炭素 (WC 型)、窒素 (WN 型) などがむき出しで見えている。

5.5　X 線バーストと吸収線

X 線バーストには I 型と II 型がある。実は II 型はこれまで見つかっているのは Rapid Burster と呼ばれる一種類のみである (もう一つ最近見つかったという話しを聞いたこともあるが...)。以下の話しは特に断らない限り I 型に限った話しである。

5.5.1　X 線バースト源の銀河系での分布

X 線バーストという現象が 1975 年にアメリカとオランダが共同で打ち上げた ANS 衛星が球状星団 NGC6624 の中にある L 星で発見された。「はくちょう」は、タイミング良く 1979 年に打ち上げられ、X 線バーストの研究で活躍をした。(ちなみに CORSA-A の打ち上げは 1976 年)。これは ~ 10 秒程度 X 線光度が急増するものであり、一度に解放するエネルギーは太陽エネルギーの 10 日分にもあたる ($\sim 10^{38}$(ergs/s)。この X 線バーストを起こす星は銀河中心方向と、球状星団に存在し、それゆえ、古いシステムであることがわかる。また、別の言い方をすると銀河中心方向にあるということは、それらは銀河中心付近に存在するわけで、距離を銀河中心とほぼ同じと仮定することができる。

5.5.2　黒体輻射による半径の導出

Swank et al. (1977) はこの X 線バーストのスペクトルが黒体で良く合うことを発見した。銀河中心にいると言う仮定を使うと、銀河中心までの距離から X 線フラックスから X 線光度を求めることができる。一旦 X 線光度が求まれば、次の半径 R を持つ星からの光度 Luminosity の式からその星の表面積や半径を求めることができる。

$$L = 4\pi R^2\sigma T^4 \tag{5.79}$$

それを行なった所、X 線バーストの初期ではその半径が膨張し、その後温度や光度の減少にも関わらず、その半径はほぼ 10km 程度となった。(誰が最初に何をやったというのは少しいい加減になっているかもしれないので、注意)。

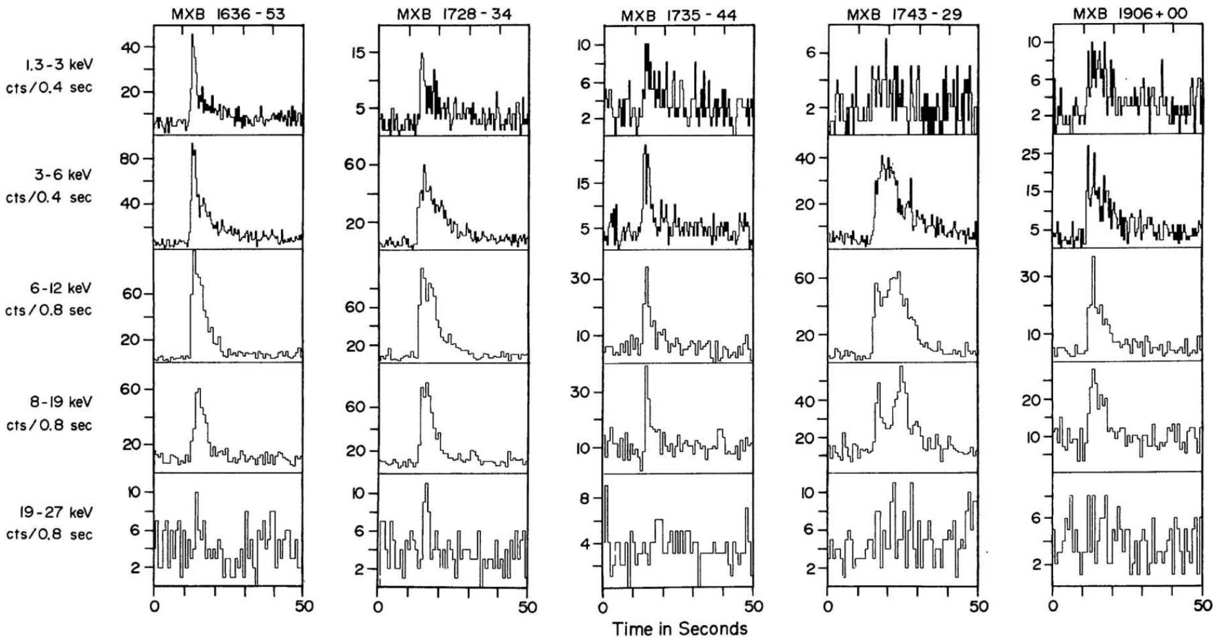


Figure 12 Profiles of typical X-ray bursts from five different sources in five X-ray energy channels (from Lewin & Joss 1977). Note that the gradual decay (known as the burst "tail") persists longer at low X-ray energies than at high energies, indicating cooling of the burst emission region.

図 5.4: X 線バーストのプロファイル

5.5.3 エディントン光度による質量の導出

X 線バーストの初期を良く調べた所、次の様子が観測された (図 5.6、図 5.7)。(1) 半径は膨張しているにも関わらず、光度はほぼ一定であった。(2) 次に半径が減少し 10km に近付くが、この間も光度はほぼ一定であった。(3) その後、半径が一定になった所で、ゆっくりと温度が減少するために、X 線光度が減少した。

X 線光度はある値よりも越えない訳で、それを越えようとすると大気が膨張するということは、この光度はエディントン光度と考えて良い。そうすると、このエディントン光度から X 線バーストを起こしている星の質量を求めることができる。その値は、$\sim 1.4M_\odot$ となった。

半径 10km で質量 $1.4M_\odot$ というのはちょうど理論的に予想されていた中性子星にぴったりであった。

5.5.4 鉄の吸収線による重力赤方偏移の検出

さらに、Waki et al. (1984) は X1636-536 の X 線バーストの初期のスペクトルに 5.7keV、減衰期のスペクトルから 4.1keV 付近に吸収線構造を発見した。

本来はこんな所に吸収線構造はないわけで、温度や深さなど色々考えた所、鉄 (XXV) の K_α 輝線または Cr(XXIII) の K_α 輝線の共鳴だという結論になった。

太陽の周辺減光を思い出せば、見ているブラックボディの温度は、光学的深さが約 1 程度の所であった。He-like の元素が存在すると共鳴散乱が起こるため、他の波長に比べ光学的深さ 1 に対応する実際の深さが浅くなり、それゆえ温度の低い場所を観測することになる。その結果、吸収線として見える。

一方、Schwartzchild 半径を r_g と書くと、半径 R での重力赤方偏移は

$$g = \left(1 - \frac{r_g}{R}\right)^{1/2} \tag{5.80}$$

$$r_g = 3.0 \left(\frac{M}{M_\odot}\right) (\mathrm{km}) \tag{5.81}$$

となる。半径 10km、質量 $1.4M_\odot$ の中性子星を仮定すると

$$g = 0.76 \leftarrow M = 1.4M_\odot, R = 10\mathrm{km} \tag{5.82}$$

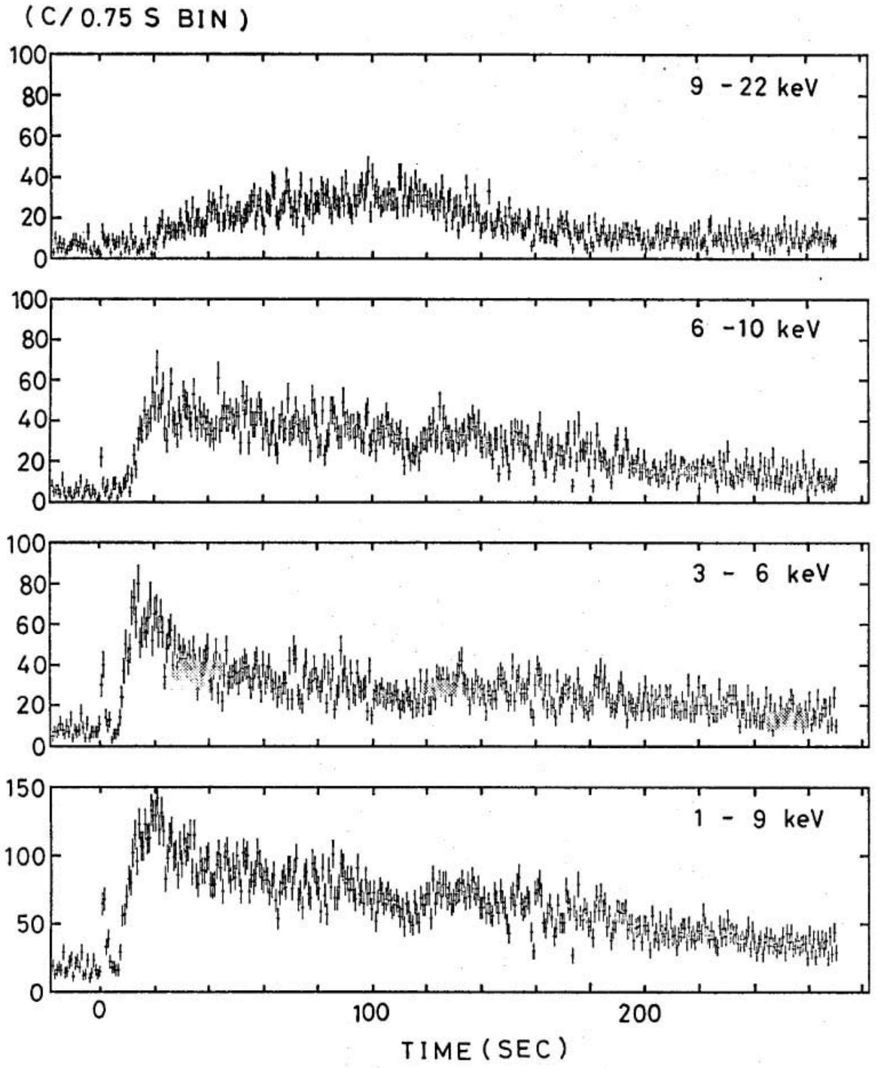


Fig. 1. The raw counting-rate data of the X-ray burst with the precursor from XB 1715−321 in four energy ranges; 1–9 keV, 3–6 keV, 6–10 keV, 9–22 keV, respectively. Time bin size is 0.75 s.

図 5.5: X1715-321 の X 線バーストのプロファイル。プリカーサーが見えている。Tawara et al. (1984)

が得られる。これで減衰期の 4.1keV を素直に戻すと 5.4keV 程度に来る。

X 線バーストでは Cr が最も多く合成される金属である。観測された吸収線が Cr XXIII の K_α 共鳴吸収線と仮定すると、初期の 5.7keV の吸収線は重力赤方偏移無しに説明でき、減衰期の 4.1keV 吸収線は $M = 1.5M_\odot$ で説明可能である。

一方、宇宙に大量に存在する鉄だと仮定するとどうなるだろうか。4.1keV 吸収線を無理矢理 Fe XXV の K_α 輝線の 6.7keV だと仮定すると、$g = 0.61$ 程度になり、半径 10km を変えないとすると、Schwartzchild 半径が大きく、すなわち質量が $1.4M_\odot$ よりも大きく $2M_\odot$ 程度である必要がある。また、初期の 5.7keV の吸収線は、半径 20km に大気がふくれていた時のものだと考えられる。この吸収線が鉄によるものであれば、X1636-536 は中性子星としてぎりぎりの最大質量ということになる。

その後の衛星では、興味の対象や検出器の制約のため、相対的に見て、しばらく X 線バーストとその吸収線構造の研究はそれほど活発ではなかったが、最近になり、XMM-Newton の RGS 検出器により、赤方偏移した鉄 L 酸素 K 輝線の共鳴吸収線構造が発見された (Cottam et al. 2002)。それによると、$M = 1.4 \sim 1.8M_{\mathrm{odot}}$、$R = 9 \sim 12\mathrm{km}$ と得られた。これは、現在の中性子星理論と良く一致する。

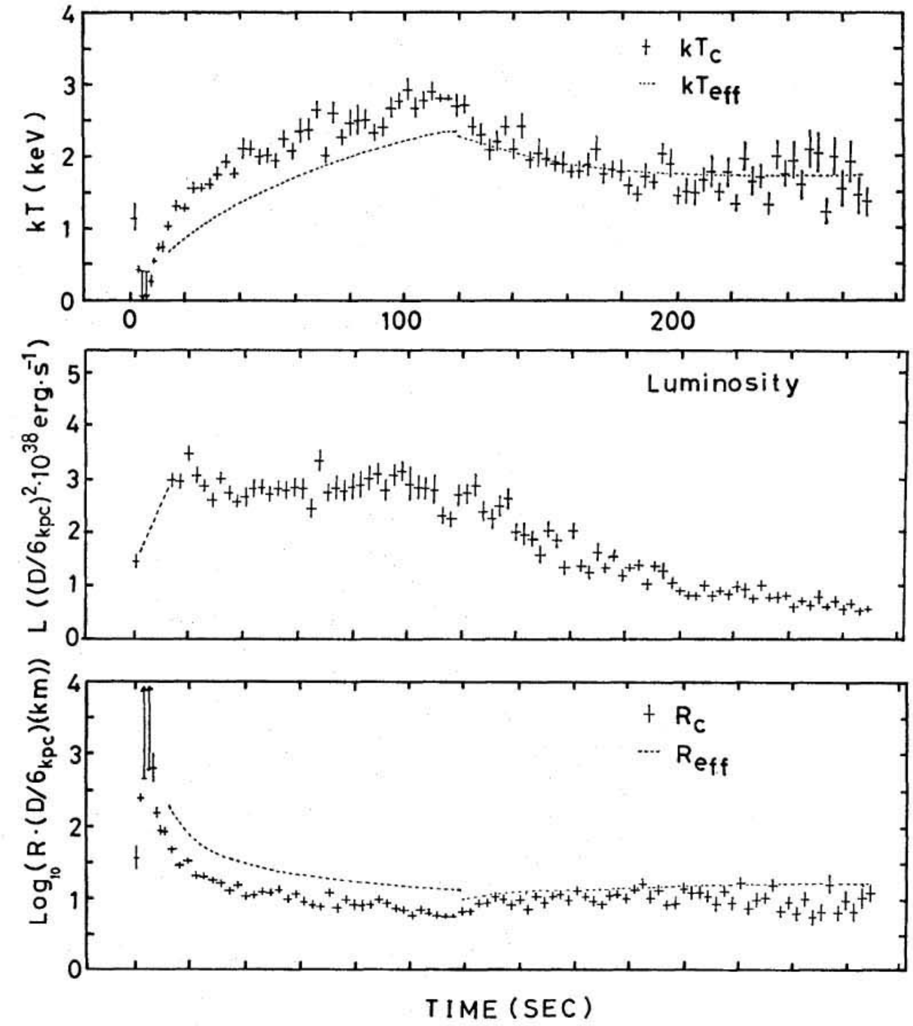


Fig. 3. Blackbody temperatures (color temperature kT_c, effective temperature $kT_{\rm eff}$), bolometric luminosities L, and the blackbody radii (color radius R_c, effective radius $R_{\rm eff}$) of the present event. Color temperature and bolometric luminosity are derived from a fit to the four energy-band intensities assuming the blackbody spectrum for each 3-s bin of $t>12$ s, where $t=0$ corresponds to the onset of the precursor. Here, we assume the absorption measure $N_{\rm H}$ of 2×10^{22} H-atoms cm^{-2} and the spherical emission from the source, whose distance is assumed to be 6 kpc. For the data of $t<12$ s, we assume the linearly increasing bolometric luminosity from the value of the precursor to the flat peak of the main burst as shown by the dashed line, and the color temperatures are fitted by the intensity data for the assumed bolometric luminosities for respective 1.5-s bins. Color radii are derived from the relation of $L=4\pi R_c^2\sigma T_c^4$. The effective temperature $T_{\rm eff}$ and the effective radius $R_{\rm eff}$ as shown by the dashed lines in respective figures are derived from the smoothed profiles of color temperature and color radius, using the method described in the text.

図 5.6: X1715-321 の X 線バースト中のブラックボディのパラメータ Tawara et al. (1984)。

5.5.5 光電吸収ではなく共鳴吸収である理由

(未完)

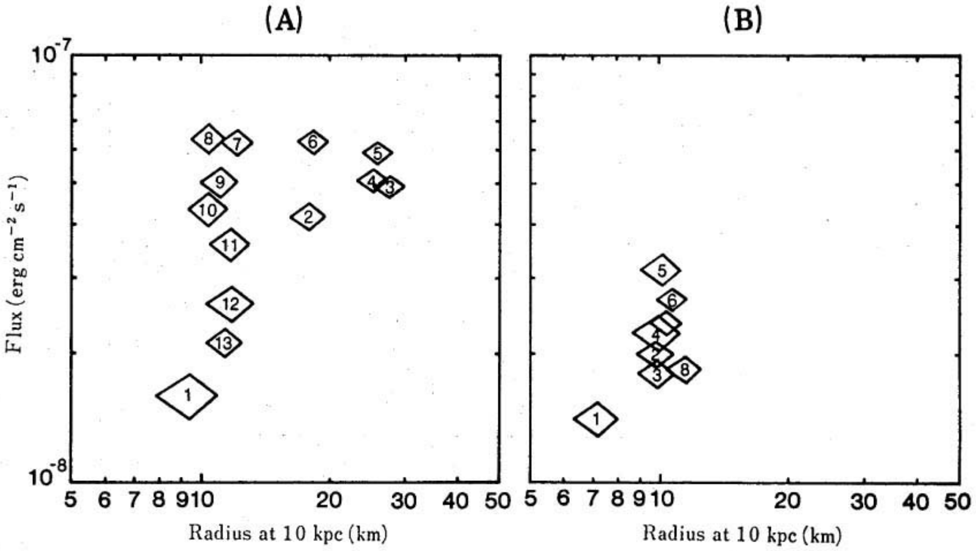


Fig. 2. Time variations of energy flux versus apparent radius during the first 6.5 s of burst E (A) and 8 s of burst K (B). Numbers in the diamonds indicate time-sequences; Nos. 1–13 in (A) and Nos. 1–8 in (B) represent results of 0.5 s and 1 s intervals, respectively.

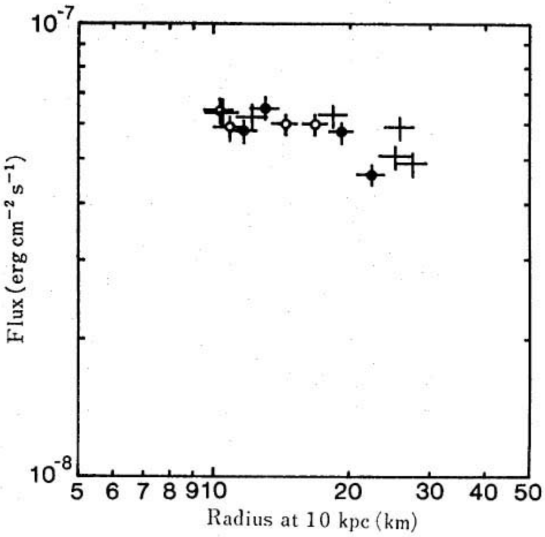


Fig. 3. Energy flux versus apparent radius during 2–3 s after the radius maxima of burst D (crosses with filled circles), E (crosses), and H (crosses with open circles).

図 5.7: X1636-536 の X 線バースト中のブラックボディのパラメータの時間変化。Inoue et al. (1984)

5.5.6　X 線バーストのエネルギー源

X 線バースターはバースト時に輝くのみならず、通常も光っている。バースト時の X 線光度を $L_b(t)$、定常時を $L_p(t)$ とし、それぞれの時間積分の比を α とすると、

$$\alpha = \int L_p(t)dt \Big/ \int L_b(t)dt \tag{5.83}$$

$$\sim 1 \times 10^2 \quad \text{(Type I Burst)} \tag{5.84}$$

$$\sim 1 \quad \text{(Type II Burst)} \tag{5.85}$$

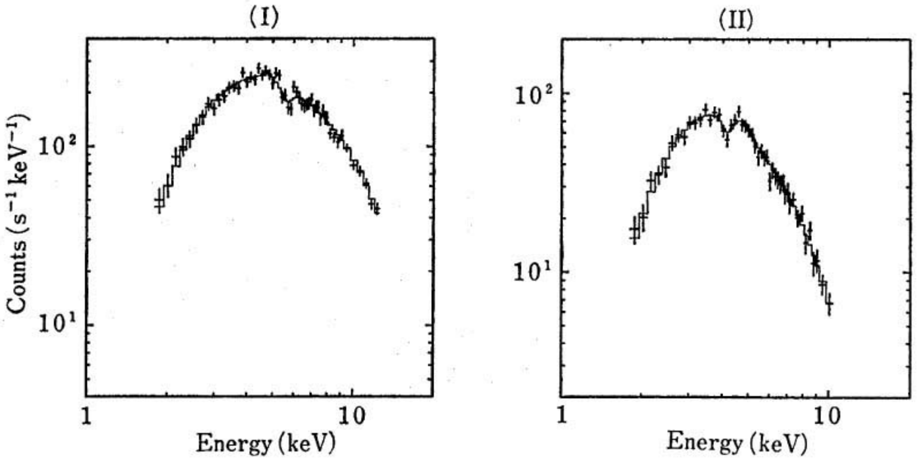


Fig. 3. **The best-fit blackbody models [equation (1)] including an absorption line for Spectrum I and Spectrum II, respectively.**

図 5.8: X1636-536 の X 線バースト中の X 線スペクトル左はバースト初期 (0-8)sec で 5.7keV に吸収線構造、右はバースト後期 (8-36)sec で 4.1keV に吸収線構造が見える。Waki et al. (1984) 。

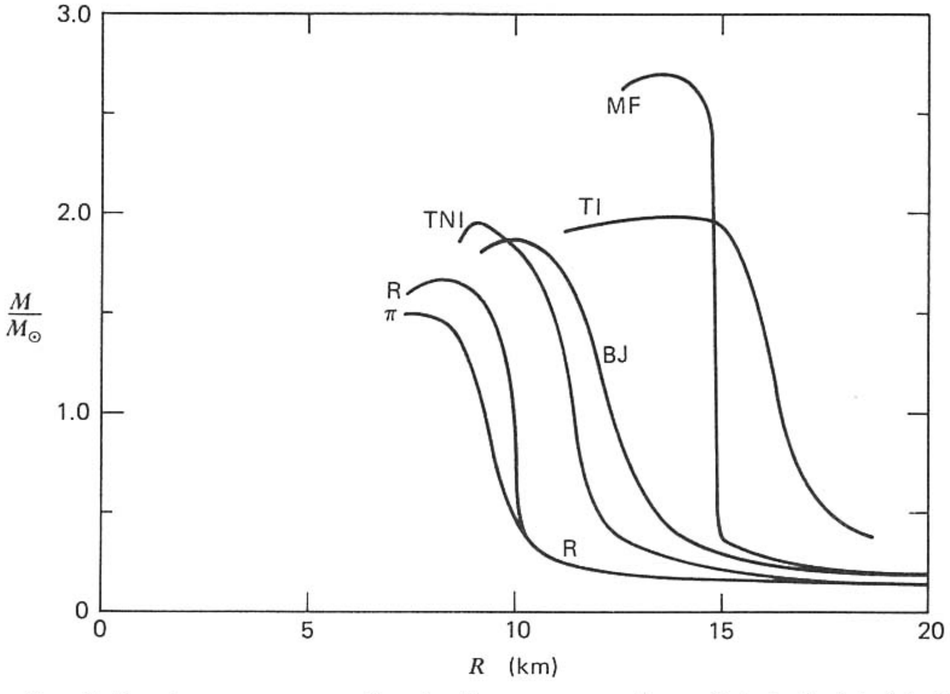


Figure 9.3 Gravitational mass versus radius for the same equations of state depicted in Figure 9.2. [After Baym and Pethick (1979). Reproduced with permission, from the *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 17. © 1979 by Annual Reviews Inc.]

図 5.9: 中性子星の理論的な質量-半径関係。

が得られた。定常時は質量降着による重力エネルギーの解放で光っているとすると、時間積分した質量降着量を ΔM とすると、重力エネルギーで解放されるエネルギーは静止質量に対して

$$\left(\frac{GM_{\rm NS}}{R_{\rm NS}}\Delta M\right)/(\Delta Mc^2) \quad = \quad \frac{r_g}{2R_{\rm NS}} = 20\% \tag{5.86}$$

が解放される。

水素の核融合反応による質量欠損の割合は

$$4{\rm H} \quad \rightarrow \quad {\rm He} \Rightarrow 0.72\% \tag{5.87}$$

$$\rightarrow \quad \sim 7{\rm MeV/p} \tag{5.88}$$

しかし、質量降着されるガスのうち水素の質量比は 70%なので、

$$\alpha = 0.20/(0.0073 \times 0.7) = 40 \tag{5.89}$$

となり、観測とはそれほど悪くない。しかし、この反応は定常的に進むため、バーストにはならない。一方、ヘリウムの核融合反応はシリコンとなる (Joss 1978)。さらに詳しい計算では圧力によって違い、$\log P = 19.2, 20.0, 20.5, 21.5, 22.1, 22.5, 227, 23.0$ のそれぞれで、^{16}O,^{24}Mg,^{28}Si,^{32}S,^{40}Ca,^{44}Ti,^{48}Cr,^{52}Fe (Hashimoto et al. 1983) が主に合成される元素である。$\log P > 23.0$ の場合は、^{56}Ni と ^{56}Fe ができる。どちらができるかは時間スケールによる。この場合、質量欠損は

$$7\mathrm{He} \quad \rightarrow \quad \mathrm{Si} \Rightarrow 0.1\% \tag{5.90}$$

$$\rightarrow \quad \sim 1\mathrm{MeV/p} \tag{5.91}$$

となる。よって、

$$\alpha = 0.20/0.001 = 200 \tag{5.92}$$

となる。

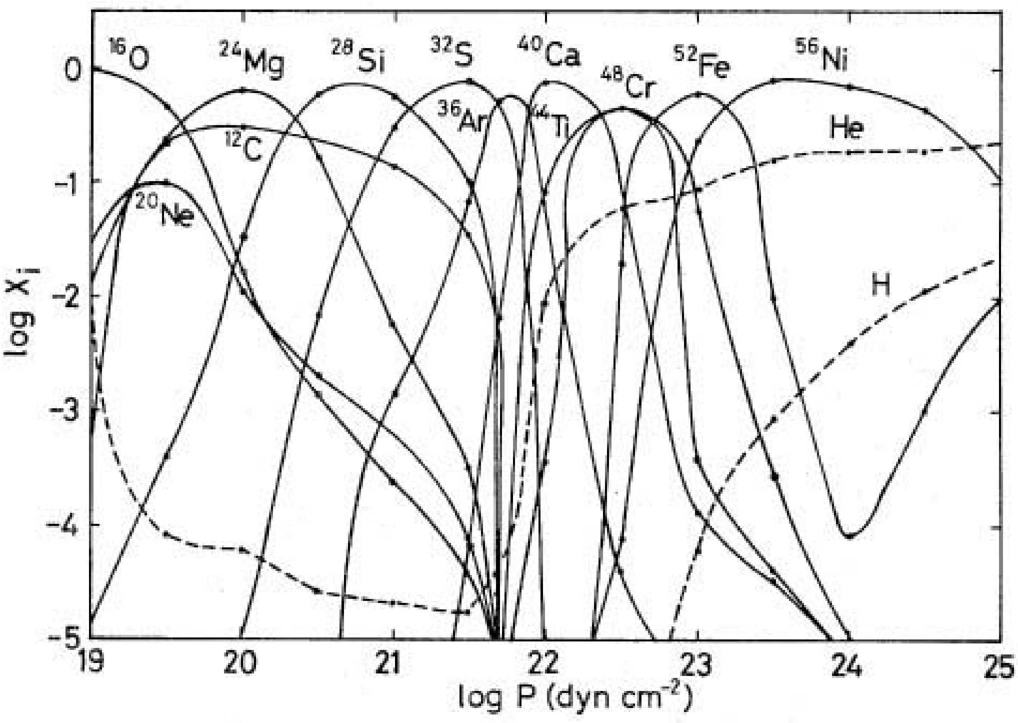


Fig. 10. Chemical abundances of the most abundant nuclides and of helium and proton are plotted against the assumed values of the pressures. Dots represent the calculated points. Here plotted are those at the stages where the energy generation rate has just dropped down to 10^{-5} of its maximum value ($\varepsilon_n' = 10^{-5}\, \varepsilon'_{n,\max}$). Therefore, the abundances in this figure do not necessarily represent those of the final products.

図 5.10: X 線バーストの熱核反応における、圧力に対する生成される各元素の割合。

5.5.7 II 型 X 線バーストの性質

SAS-3 衛星により発見されたラピッドバースターは、多く見つかった I 型に比べ非常に奇妙な振舞いをする。

I 型では減衰時に X 線放射面積は変化せず (すなわち中性子星の表面積に等しい)、温度が下がる。それに対し、II 型では減衰時に温度は変化せず、表面積が減少する。

もう一つの奇妙な現象は、1 つのバーストのエネルギーと次のバーストまでの休止時間が比例することである (5.11)。つまり大きなバーストが起こると、次のバーストまで長時間休む。これはある種の「溜め」が存在すると考えれば良いが、その量は 5×10^{21}g にも達する。この様な巨大な「溜め」の機構は今の所不明である。

さらに、この II 型バーストを起こす星は、今の所このラピッドバースターしか見つかっていない。

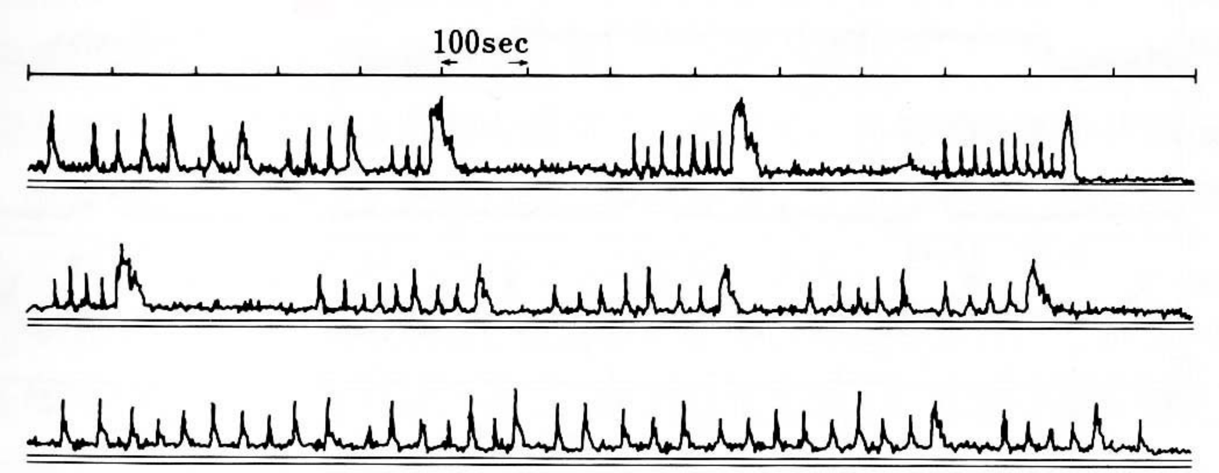


図 5.11: SAS-3 衛星で得られた II 型バースト源 = ラピッドバースターの光度曲線

5.6　コンパクトネスパラメータと Pair Plasma

(未完)

5.7　エディントン質量降着率とブラックホールの成長

恒星の場合のエネルギー源は中心核での核融合反応であったが、ブラックホールや中性子連星の場合は、相手の星から供給されるガスの重力エネルギーの解放である。前の章で述べたように、ブラックホールの標準円盤を考えた場合、質量降着率 $\dot{M}$ と光度には次の関係がある。標準円盤の内縁は $3r_g$ であることと、ビリアル定理からここに落ちるまでに解放されたエネルギーのうち、輻射として放出されるエネルギーは

$$L = \eta\dot{M}c^2 \tag{5.93}$$

$$= \frac{1}{2}G\frac{\dot{M}}{3r_g} = \frac{1}{12}\dot{M}c^2 \tag{5.94}$$

となる。

光度は質量降着率に比例し、その光度にはエディントンリミットがある、ということはそれ以上には質量降着できない、ということである。その時の質量降着率をエディントン降着率と呼ぶ。質量降着はブラックホールには関係ないまわりの環境により決まるから、質量降着率がエディントン降着率よりも大きくなろうとすると、実際にはアウトフローしてしまうのだと思う。

そのエディントン降着率は

$$\eta\dot{M}c^2 = L_{\rm Edd} = 1.3\times 10^{38}({\rm erg\ sec^{-1}}) \tag{5.95}$$

$$\dot{M}_{\rm Edd} = 1.4\times 10^{17}\frac{1}{\eta}\frac{M}{M_\odot}({\rm g\ sec^{-1}}) \tag{5.96}$$

$$= 2.2M_\odot({\rm yr^{-1}})\frac{1}{\eta}\frac{M}{10^9 M_\odot} \tag{5.97}$$

となる。QSO など明るい AGN では典型的に $\sim 1M_\odot{\rm yr}^{-1}$ と覚えておくと良い。

質量降着はブラックホールの質量の増加をもたらす。ブラックホールの質量を 2 倍にするタイムスケールは以下の通り。

$$t_{\rm Edd} = \frac{M}{\dot{M}_{\rm Edd}} \tag{5.98}$$

$$= \frac{\eta c\sigma_{\rm T}}{4\pi G m_p} \tag{5.99}$$

$$= 4.5\times 10^8\eta({\rm yr}) \tag{5.100}$$

$10^9M_\odot$ の質量を持つ銀河中心核の巨大ブラックホールを、$1M_\odot$ の恒星質量ブラックホールに質量降着させて作ることができるだろうか。それに要する時間を t とすると、

$$10^9 = 2^{t/t_{\rm Edd}} \tag{5.101}$$

$$t = 30t_{\rm Edd} = 1.4\times 10^{10}\eta({\rm yr}) \tag{5.102}$$

となる。宇宙の年齢が、

$$\tau_{\rm Hubble} = 1/H_0 = 1.4\times 10^{10}\times\left(\frac{h}{0.7}\right)^{-1}({\rm yr}) \tag{5.103}$$

なので、$\eta = 10\%$ とか考えると成長は可能の気がするが、そもそも Eddington 光度で常に光っている訳もない。よって、降着のみで SMBH に成長するのは簡単ではないことがわかる。

5.8　X 線発生装置の偏光とトムソン散乱を用いた X 線偏光測定

トムソン散乱断面積には、入射 X 線偏光に対する依存性がある。これを利用すると X 線偏光の測定が可能となる。その際、光電吸収との競合過程になる。光電吸収は Z^4 に比例し、トムソン散乱は電子の数すなわち Z に比例する。実験する上では固体が望ましいことを考えると、ポリエチレンが良く使われる $(\mathrm{CH2})_{\mathrm{n}}$。

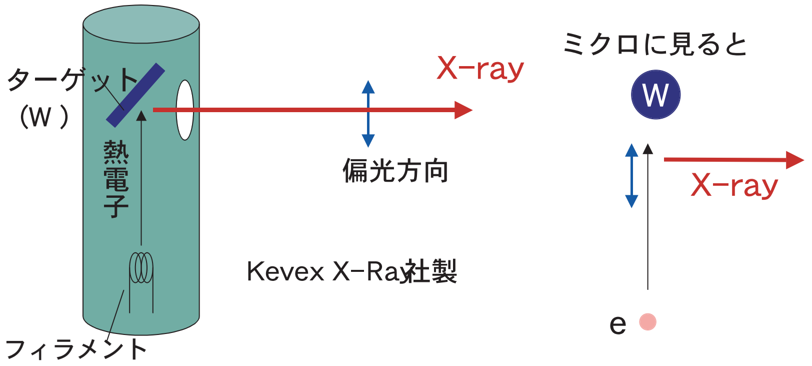

ターゲット
（W ）
熱電子
フィラメント
X−ray
偏光方向
Kevex X−Ray社製
ミクロに見ると
W
X−ray
e

図 5.12: X 線発生装置からの X 線

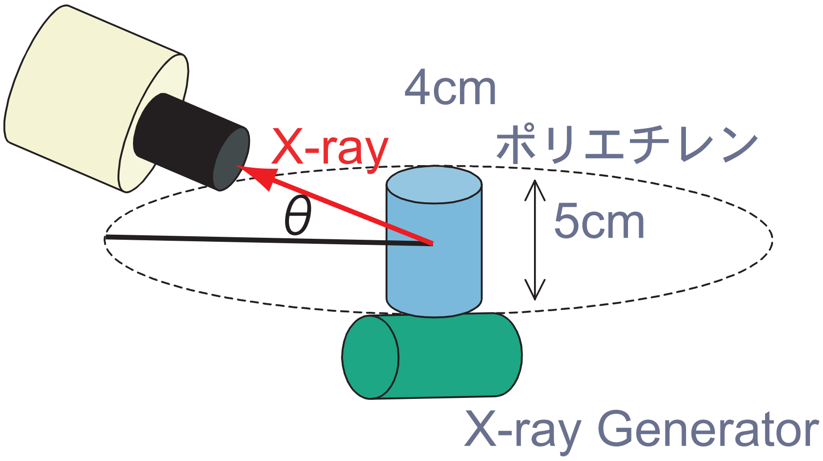

4cm
X-ray
ポリエチレン
θ
5cm
X-ray Generator

図 5.13: トムソン散乱を用いた X 線偏光測定

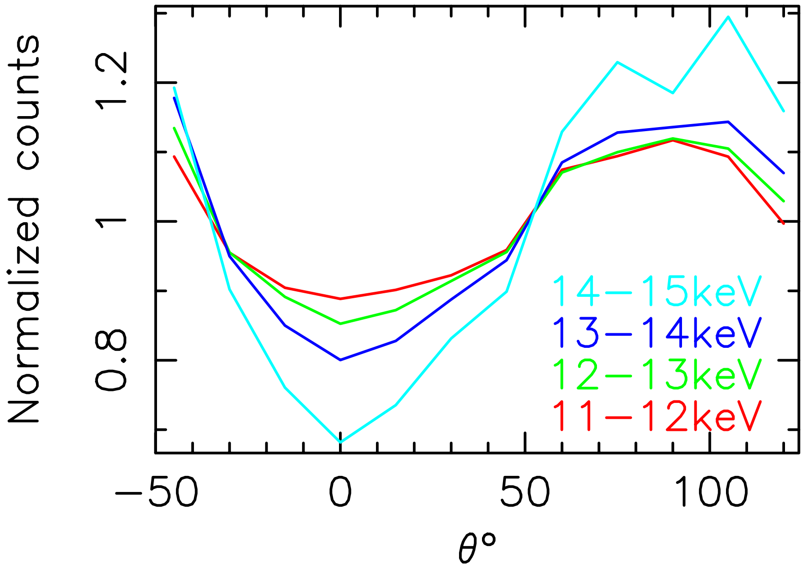


図 5.14: トムソン散乱を用いた X 線偏光測定の結果 (池田、河野、馬場 1999)

5.9　2 型セイファート銀河と光学偏光観測

1 型セイファートと 2 型セイファートは実は同じもので、見ている方向が違うという話しがあった。この仮説が正しければ、2 型セイファートの偏光成分だけ取り出すとコアのスペクトルが取れる訳で、それが 1 型セイファートのスペクトルをしているはずです。そこで、Miller et al. (1991) は NGC1068 を観測したところ、偏光成分のみを取り出したスペクトルはまさに 1 型セイファートのスペクトルをしていた。

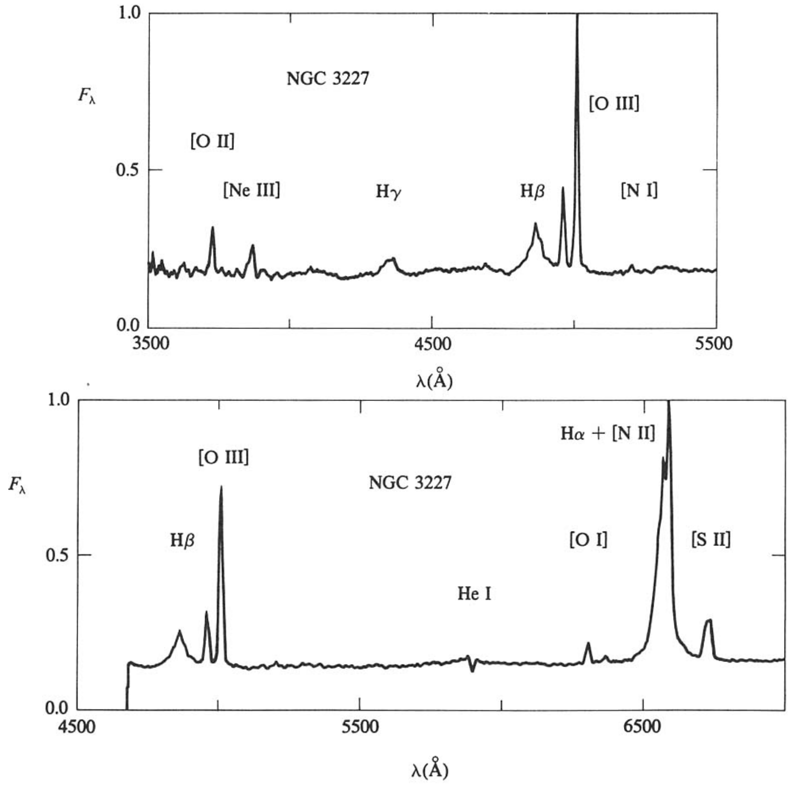


FIGURE 11.1
Spectral scan of NGC 3227, a Seyfert 1 galaxy. Relative flux per unit wavelength interval is plotted against wavelength in the rest system of the object; so areas under the curve correspond to energy radiated. Note that the two parts of the scan overlap in the Hβ, [O III] spectral region.

図 5.15: 1 型セイファートの光学スペクトル

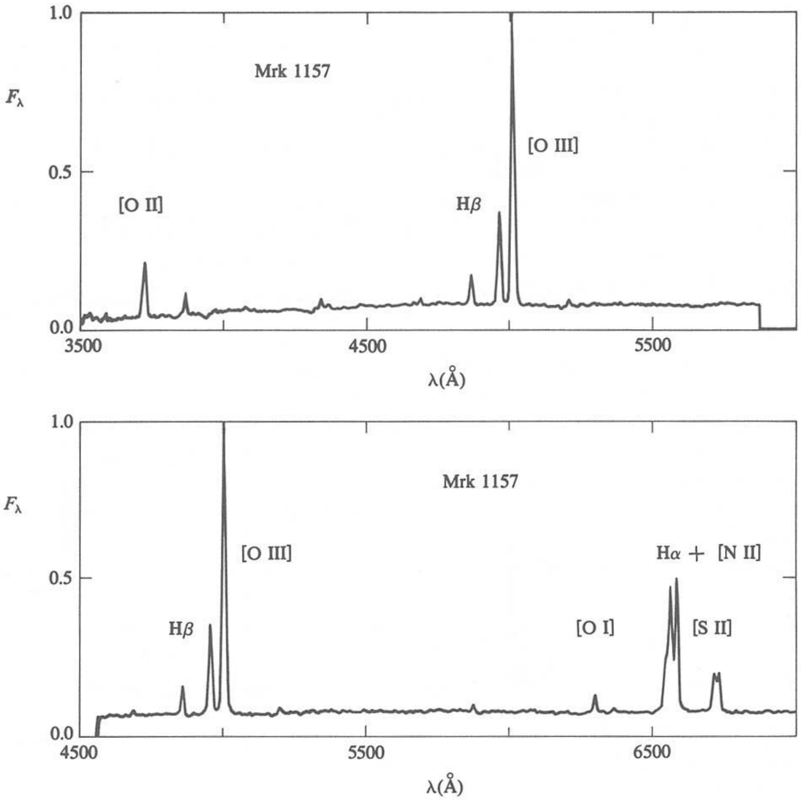


FIGURE 11.2
Spectral scan of Mrk 1157, a Seyfert 2 galaxy. Axes as in Figure 11.1.

図 5.16: 2型セイファートの光学スペクトル

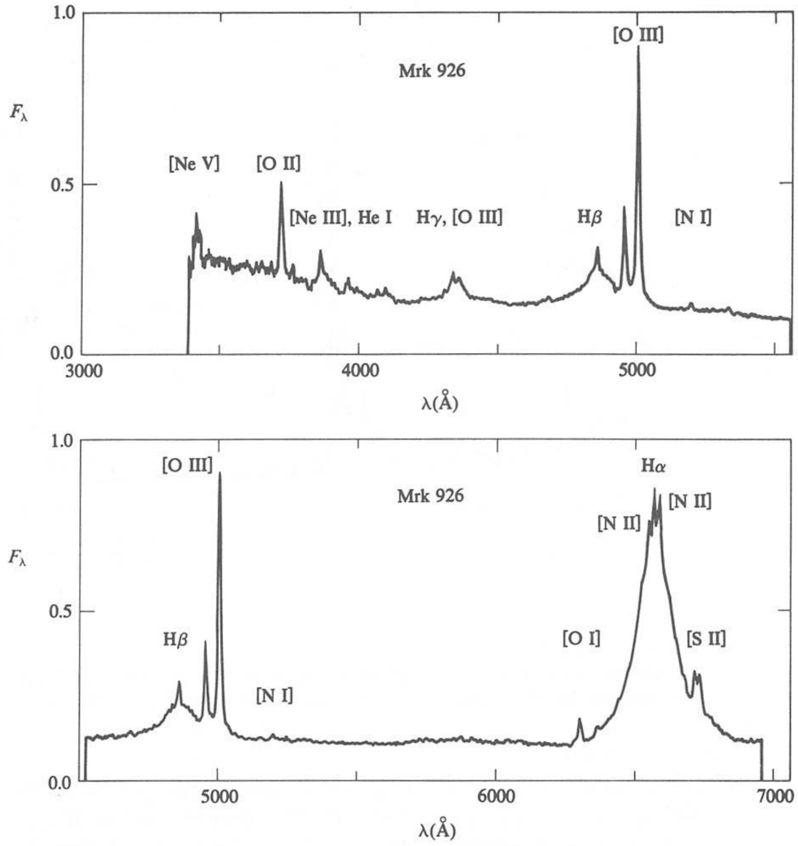
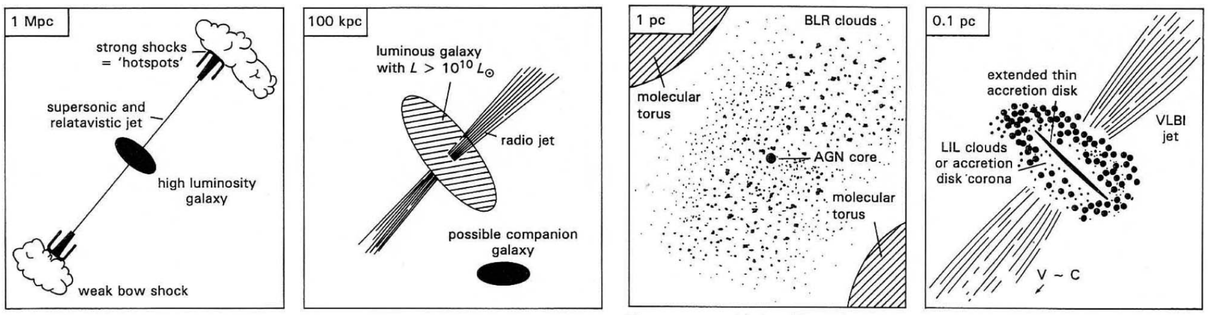


FIGURE 11.3
Spectral scan of Mrk 926, a Seyfert 1.5 galaxy. Axes as in Figure 11.1.

図 5.17: 1.5型セイファートの光学スペクトル

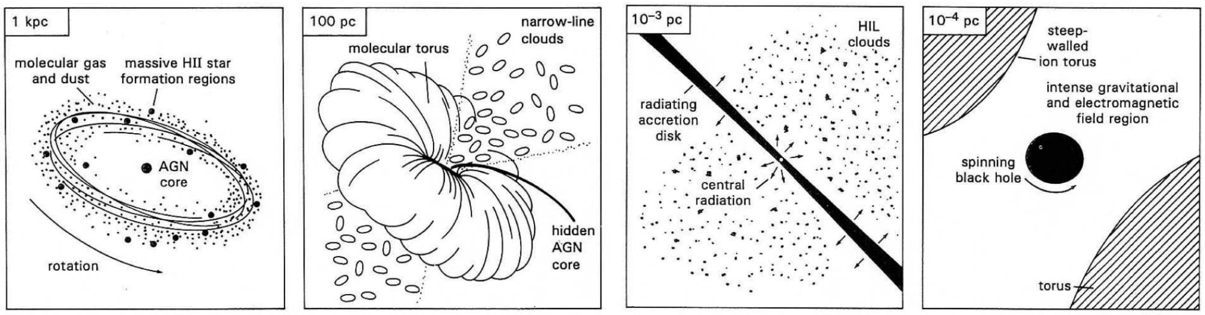

1 Mpc
strong shocks = 'hotspots'
supersonic and relatavistic jet
high luminosity galaxy
weak bow shock
100 kpc
luminous galaxy with $L > 10^{10} L_\odot$
radio jet
possible companion galaxy
1 pc
BLR clouds
molecular torus
AGN core
molecular torus
0.1 pc
extended thin accretion disk
VLBI jet
LIL clouds or accretion disk corona
V ~ C

The extended radio sources — shown is an FRII source with an edge-brightened structure. The FRIs have lower jet velocities and fade-out to the ends.

The host galaxy. Although shown as an early type galaxy with a smooth profile, it could also be highly irregular with multiple nuclei as a result of merging.

The outer extent of the broad-line region and the deep-walled molecular torus which can provide an effective shield of the central AGN, depending on the relative orientation of the observer.

Inside the molecular torus — the VLBI jet becomes self-absorbed closer in, and the low ionization lines of the BLR, which might be the corona of the accretion disk.


1 kpc
molecular gas and dust
massive HII star formation regions
AGN core
rotation
100 pc
narrow-line clouds
molecular torus
hidden AGN core
10^{-3} pc
HIL clouds
radiating accretion disk
central radiation
10^{-4} pc
steep-walled ion torus
intense gravitational and electromagnetic field region
spinning black hole
torus

The central kpc star formation disk. This strong far infrared emitting zone might be fed by a bar structure, as seems to be the case for NGC1068.

The narrow-line region comprising small but numerous clouds of the interstellar medium ionized by the central AGN core.

The accretion disk which radiates strongly at UV and optical wavelengths. The high ionization clouds of the BLR are excited by the central continuum radiation field.

The black hole. The Schwarzschild radius for a $10^8\,M_\odot$ black hole is 2 AU (10^{-5} pc). The spin will introduce twisted magnetic field lines and particle acceleration.

Fig. 9.9 Cartoon of the representative scale sizes of an AGN. How we eventually see the object depends on a number of parameters, the main one being the orientation of the obscuring torus with respect to the observer. (Adapted from Blandford, *Active Galactic Nuclei,* Saas-Fee Advanced Course 20, Springer–Verlag, 1990.)

図 5.18: AGN のマンガ

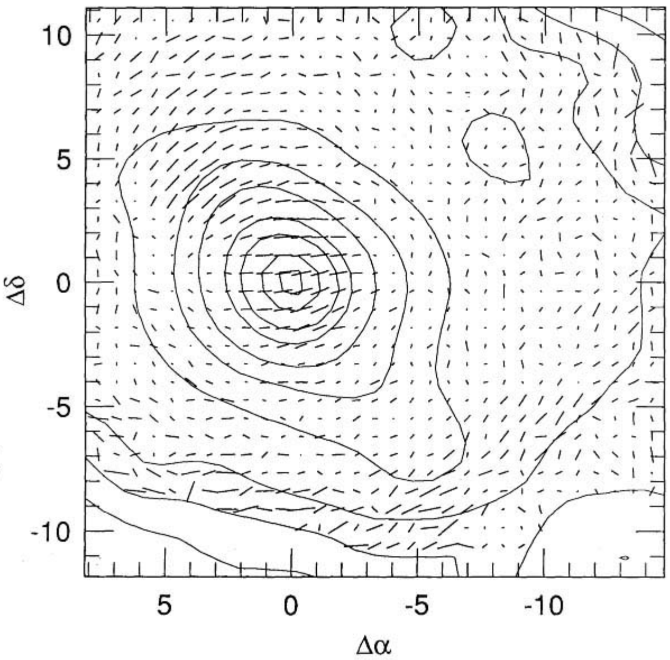


FIG. 1.—Imaging polarimetry of NGC 1068. The polarization vectors are superposed on a contour plot of the continuum intensity of the nuclear regions. Note the relatively high polarizations of the nucleus and northeast knot ($\Delta\alpha = 3''.5$, $\Delta\delta = 4''.0$) and the elongated distribution of significantly polarized light extending north and south of the nucleus.

図 5.19: NGC1068 の偏光イメージ (Miller et al. 1991)

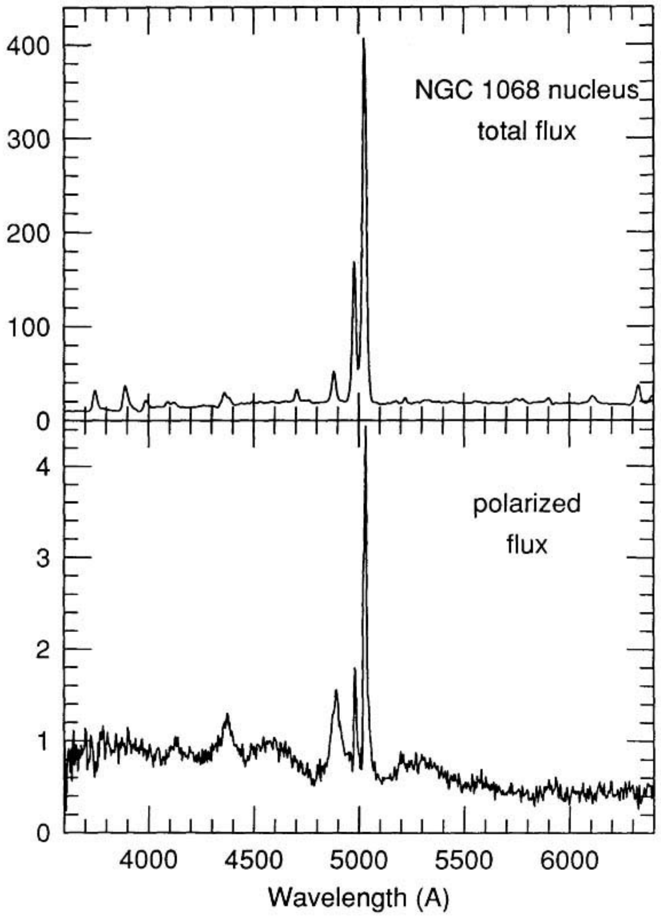


FIG. 6.—Same as Fig. 3, but for the nucleus. This was obtained with an 8″ slit to provide reliable photometric calibration with wavelength.

図 5.20: NGC1068 の偏光スペクトル (Miller et al. 1991)

5.10　磁気双極子と電波パルサー

5.10.1　ブレーキングインデックス

先ほど説明した電気双極子と全く同様に磁気双極子の場合も書ける。電波パルサーについて考えてみよう。ここでは記号が紛らわしいので、単位時間あたりのエネルギー発生量を P ではなく $\dot{E}$ と書き、P は周期として使うことにする。

電波パルサーを磁気双極子だと考え磁気双極子放射を考える。このエネルギー源はパルサーの回転エネルギーである。その量を E とし、$\dot{E}$ の符合も考えると

$$\frac{d\dot{E}}{d\Omega} = -\frac{\ddot{\vec{m}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\Theta \tag{5.104}$$

$$\dot{E} = -\frac{2\ddot{\vec{m}}^2}{3c^3} \tag{5.105}$$

が得られる。磁気双極子が ω で回転しており、磁気双極子モーメント m_0 の軸が自転軸から α だけずれて回転していたとすると、

$$m = m_0 \sin\alpha \sin\omega t \tag{5.106}$$

$$\ddot{m} = -m_0\omega^2 \sin\alpha \sin\omega t \tag{5.107}$$

なので、

$$< \dot{E} > = -\frac{m_0^2\omega^4\sin^2\alpha}{3c^3} \tag{5.108}$$

となる。一方、回転エネルギーは中性子星の慣性モーメントを I とすると

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{5.109}$$

$$\dot{E} = I\omega\dot{\omega} \tag{5.110}$$

となる。よって、

$$\dot{E} = I\omega\dot{\omega} = -\frac{m_0^2\omega^4\sin^2\alpha}{3c^3} \tag{5.111}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{m_0^2\sin^2\alpha}{3c^3 I}\omega^3 \tag{5.112}$$

となる。ここで

$$\dot{\omega} = -(\mathrm{constatnt})\cdot\omega^n \tag{5.113}$$

の n を特に Brakeing Index と呼び、以上で示した通り磁気双極子放射では $n = 3$ となる。もし、全てのパルサーの磁場、α の違いがファクター程度であり、年齢のみが桁で違いのであれば、$n = 3$ の線で一列に整列するはずである。しかし、図 5.21 の通り、実際には「ごちゃ」としていて、$\ddot{P}$ で 4 桁のスケールで散らばっている (左下はミリ秒パルサーであり別物)。

$\ddot{\omega}$ を観測できれば、単体の電波パルサーの Braking Index$n$ を求めることも可能である。

$$\dot{\omega} = -(\mathrm{constatnt})\cdot\omega^n \tag{5.114}$$

$$\ddot{\omega} = -n(\mathrm{constatnt})\cdot\dot{\omega}\omega^{n-1} \tag{5.115}$$

$$n = \frac{\ddot{\omega}\omega}{\dot{\omega}^2} \tag{5.116}$$

これまでに 4 つの電波パルサーについて n が求まっている。Crab: $n = 2.51$, B0540 $-$ 69(LMC の 50msec パルサー): $n = 2.24$, Vela Pulsar: $n = 1.4$, B1509 $-$ 58 (MSH15 $-$ 52: 河合さんの好きな奴): $n = 2.837$。$n = 3$ にならない理由は良く分かっていない。後で述べるパルサー風が重要な役割を果たしている可能性がある。

5.10.2　磁場の強さ

中性子星の大きさ、質量がそれぞれ半径10km、$1.4M_\odot$が分かっているものとして、パルサー周期Pとその時間変化$\dot{P}$と、先ほどの磁気双極子放射から磁場の強さを求める。簡単のために、自転軸と磁場の向きは垂直とする。先ほどの磁気双極子放射は

$$\dot{E} = 9.62\times 10^{30}[\mathrm{ergs/sec}]\left(\frac{B}{10^{12}\mathrm{G}}\right)^2\left(\frac{R}{10\mathrm{km}}\right)^6\left(\frac{P}{1\mathrm{sec}}\right)^{-4} \tag{5.117}$$

と書き換えられる。一方、

$$\dot{E} = I\omega\dot{\omega} = I\left(\frac{2\pi}{P}\right)\frac{d(2\pi/P)}{dt} = I\left(\frac{2\pi}{P}\right)\frac{dP}{dt}\frac{d(2\pi/P)}{dP} = 4\pi I\frac{\dot{P}}{P^3} \tag{5.118}$$

である。Iは中性子星の慣性モーメントで

$$I \sim 10^{33}\mathrm{g}\cdot 10\mathrm{km} \sim 10^{45}\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^2 \tag{5.119}$$

である。この2つから

$$\dot{P} = 2.44\times 10^{-16}[\mathrm{sec/sec}]\left(\frac{B}{10^{12}\mathrm{G}}\right)^2\left(\frac{R}{10\mathrm{km}}\right)^6\left(\frac{I}{10^{45}\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^2}\right)^{-1}\left(\frac{P}{1\mathrm{sec}}\right)^{-1} \tag{5.120}$$

(5.121)

となり、

$$B = 1.14\times 10^{13}[\mathrm{G}]\left(\frac{P}{1\mathrm{sec}}\right)\left(\frac{\dot{P}}{10^{-6}\mathrm{sec/yr}}\right)\left(\frac{I}{10^{45}\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^2}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{10\mathrm{km}}\right)^{-3} \tag{5.122}$$

$$= 3.6\times 10^{12}[\mathrm{G}]\left(\frac{P}{1\mathrm{sec}}\right)\left(\frac{\dot{P}}{10^{-14}\mathrm{sec/sec}}\right)\left(\frac{I}{10^{45}\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^2}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{10\mathrm{km}}\right)^{-3} \tag{5.123}$$

が得られる。

5.10.3　年齢

パルサーの自転の角周波数とその時間微分はブレーキングインデックスとしてnを用いて

$$\dot{\omega} = -(\mathrm{constant})\cdot\omega^n = -K\omega^n \tag{5.124}$$

と書いた。これを積分すると

$$\frac{1}{n-1}\left(\omega^{-(n-1)} - \omega_0^{-(n-1)}\right) = K\tau \tag{5.125}$$

と書ける。ω_0はパルサーが誕生した時の角周波数であり、τは年齢である。$n>1$であり、$\omega_0 \gg \omega$とすると、

$$\tau = \frac{\omega^{-(n-1)}}{K(n-1)} = -\frac{\omega}{(n-1)\dot{\omega}} = \frac{P}{(n-1)\dot{P}} \tag{5.126}$$

となる。よって、観測値であるPと$\dot{P}$から年齢を見積もることができる。

5.10.4　パルサーの放射メカニズム

5.10.5　パルサー風

未完。

5.10.6 スピンダウン光度と電磁波による光度 (高原「宇宙物理学」の丸写し)

さて、ここまで書いて話しをひっくり返すのも気が引けるが、観測される電波放射はパルサーが回転エネルギーを用いて放出しているはずのエネルギーのごくわずかで、1%以下に過ぎない。例えば、幾つかのパルサーでは可視光、X線、ガンマ線でもパルスが観測され、それらの光度は電波光度よりもはるかに大きいが、それでも回転エネルギーの現象に対して10%を越えることは稀である。Crab Nebulaの場合、電波からガンマ線までの電磁波の光度と、星雲の膨張速度に与えられている仕事率を加えたものは、中心のパルサーの回転エネルギーの減少率にほぼ等しい。

以上から、回転エネルギーの大部分はパルサーから吹き出されるパルサー風の運動エネルギーとして放出されていると考えられている。周囲の物質との相互作用などにより、その運動エネルギーが散逸されるとCrab NebulaのようなPulsar Nebulaを形成する。

しかし、このようなきれいな系は他にはなく、パルサー星雲の内部エネルギーとしてエネルギーを蓄えているものと考えられている。

5.10.7 電波パルサー、ミリ秒パルサー、X線パルサー、低質量X線連星 (LMXB)

Crabパルサーの場合は$P = 33\text{msec}$から得られる最大の大きさは10^4km。この様な大きさの天体は、白色矮星か中性子星しかない。光が33msecの間に進める距離は1×10^4kmに過ぎない (地球半径6000km程度)。これは連星ではみじか過ぎるし、重力波を放出してすぐに合体してしまう。白色矮星の自転だと速過ぎてバラバラになる。最後に残るのは中性子星の自転。

いずれも中性子星又は中性子星連星であるが、性質は全く違う。電波パルサーとミリ秒パルサーは (基本的には) 単独の中性子星だが、X線パルサーとLMXBは連星。

電波パルサーとX線パルサーは磁場が強く ($B \sim 10^{12}$G)、ディスクに分布する。X線パルサーの相手の星は多くの場合OB型星で、Be連星と言ったりもする。つまりシステムとしては若い、ということである。

ミリ秒パルサーとLMXBは磁場が弱く ($B \sim 10^{10}$G)、ディスクにも存在するが球状星団にも存在する。LMXBの相手の星はLow MassすなわちG型星など寿命の長い星である。ミリ秒パルサーの自転周期は$P < 10\text{msec}$である。

中性子星が超新星爆発で誕生した自転では、磁場が非常に強く速く自転していたが、スピンダウンを起こしてゆっくりになる。しかし、これだと年をとったミリ秒パルサーは説明できない。パルサーと言っても電波パルサーとは誕生の仕方が違うのだろう。

一つの可能性はリサイクル説。電波パルサーがまず誕生し、長い年月でスピンダウンをして自転がゆっくりになるとともに、磁場も弱くなる。そして、銀河中や球状星団の中をただよう内に軽い星にキャプチャーされ (これもパチンコとか色々難しい)、LMXBとなる。これは、LMXBの相手の星は軽いため超新星爆発を生き延びることができない、という考え方と矛盾しない。LMXBで質量降着を行なわれていく内に、中性子星はスピンアップしていく。中性子星は弱いとは言え、磁場はやっぱり10^{10}Gはあるので、(質量降着が終ると?) 今度はパルサー風で相手の星を融かし始める。完全に融かしてしまうと、単独のミリ秒パルサーが誕生する。

5.10.8 AXP/マグネター

一方で、スピンダウン光度よりも放射エネルギーが大きい奇妙なパルサーが最近X線で発見されており、Anomalous X-ray Pulsarと呼ばれている。Soft $\gamma -$ ray repeaterとしてガンマ線バーストを起こすものもある。磁場が非常に強い (10^{14}G) 一方で、スピン周期は$5 \sim 12$secと長い。電波は弱い。放射エネルギー源の候補として磁場のエネルギーを解放しているのであるという仮説がたてられMagnetorとも呼ばれている。

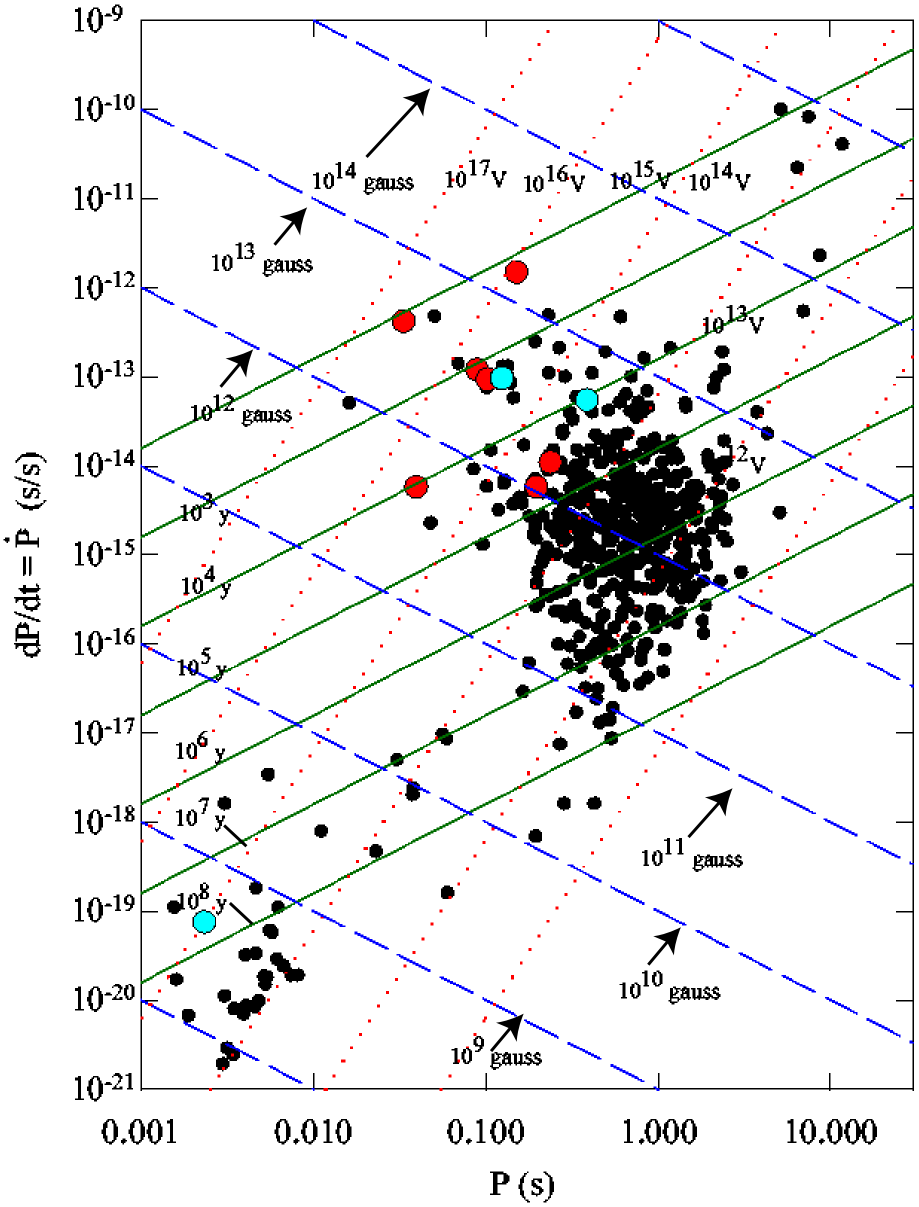


FIGURE 3. Period v. period derivative for a large sample of pulsars. Small dots: no gamma-ray emission. Large dark dots: seven high-confidence gamma-ray pulsars. Large light dots: three lower-confidence gamma-ray pulsars. Solid lines: timing age. Dotted line: open field line voltage. Dashed line: surface magnetic fields.

図 5.21: 電波パルサーの P-$\dot{P}$ 関係直線 (緑) は Age、点線 (赤) は Open Field Line Voltage、破線 (青) は磁場強度である。$\omega \propto \omega^3$ となる直線は、点線と同じである。

第6章　熱制動輻射と銀河、銀河団の高温プラズマ

6.1　制動輻射

Dipole 輻射は

$$\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i \tag{6.1}$$

$$P = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3} \tag{6.2}$$

と書けたが、同種粒子の 2 体散乱の場合

$$\vec{d} = \sum_{i=0,1} q_i \vec{r}_i = \mathrm{Const.} \tag{6.3}$$

$$P = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3} = 0 \tag{6.4}$$

となる。よって、同種粒子の 2 体散乱では Dipole 輻射を行なわない。そこで、ここでは電子とイオンの 2 体散乱による輻射を考える。

電子はイオンに比べて非常に軽いので、イオンは静止しており固定されたクーロン場を考えることにする。イオンを原点として電子の位置を $\vec{R}$ とすると、

$$\vec{d} = \vec{R} \tag{6.5}$$

$$\ddot{\vec{d}} = -e\ddot{\vec{R}} = -e\dot{\vec{v}} \tag{6.6}$$

となる。放射される電磁波のエネルギーの各周波数成分は

$$d(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\hat{d}(\omega)d\omega \tag{6.7}$$

$$\ddot{d}(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \hat{d}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{6.8}$$

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{c^3}\omega^4 |\hat{d}(\omega)|^2 \sin^2\Theta \tag{6.9}$$

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3}|\hat{d}(\omega)|^2 \tag{6.10}$$

なので、$\ddot{\vec{d}}$ から $\hat{d}(\omega)$ を次のように逆フーリエ変換して求めれば良い。

$$-\omega^2\hat{d}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\vec{d}} e^{i\omega t} dt \tag{6.11}$$

$$\hat{d}(\omega) = \frac{e}{2\pi\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{v}} e^{i\omega t} dt \tag{6.12}$$

これを真面目にやるのは大変なので、以下のように近似する。インパクトパラメータ b と v を比べた場合、衝突時間 τ は

$$\tau \equiv \frac{b}{v} \tag{6.13}$$

となる。もしも、τ に比べて考えている周波数 ω が非常に大きい場合は式 6.12 の積分の中の $e^{i\omega t}$ は何度も振動するので、式 6.12 の積分は 0 になる。別の言い方をすると、$\omega \sim 1/\tau$ 以上の周波数を持つ光は出ない、ということである。

一方、ω が小さい場合には $e^{i\omega t}$ は 1 になる。$\dot{\vec{v}}$ の時間積分はすなわち衝突前後の速度変化に等しく、それを $\Delta\vec{v}$ と書くと、

$$\hat{\vec{d}}(\omega) \sim \begin{cases} \frac{e}{2\pi\omega^2}\Delta\vec{v} & \omega\tau \ll 1 \\ 0 & \omega\tau \gg 1 \end{cases} \tag{6.14}$$

となる。衝突時間が短いと言う事は v が非常に速いということなので、電子はほとんど直線運動し、運動の垂直方向に少しだけ速度変化を受けると考えると、

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}}{m_{\rm e}} \tag{6.15}$$

$$= \frac{Ze^2}{m_{\rm e}}\frac{b}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}} \tag{6.16}$$

$$\Delta v = \frac{Ze^2}{m_{\rm e}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}}dt \tag{6.17}$$

$$= \frac{2Ze^2}{m_{\rm e}bv} \tag{6.18}$$

よって、

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3}|\hat{d}(\omega)|^2 \tag{6.19}$$

$$\frac{dW(b)}{d\omega} = \begin{cases} \frac{8Z^2e^6}{3\pi c^3 m_{\rm e}^2 v^2 b^2} & b \ll v/\omega \\ 0 & b \gg v/\omega \end{cases} \tag{6.20}$$

となる。これは一回の散乱であるが、電子密度、イオン密度を $n_{\rm e}$、$n_{\rm i}$ とすると、インパクトパラメータ b に対する単位時間辺りの衝突の回数は $n_{\rm e}n_{\rm i}v2\pi bdb$ なので、

$$\frac{dW}{d\omega dVdt} = n_{\rm e}n_{\rm i}2\pi v\int_{b_{\rm min}}^{b_{\rm max}}\frac{dW(b)}{d\omega}bdb \tag{6.21}$$

$$= \frac{16e^6}{3c^3m^2v}n_{\rm e}n_{\rm i}Z^2\int_{b_{\rm min}}^{b_{\rm max}}\frac{1}{b}db \tag{6.22}$$

$$= \frac{16e^6}{3c^3m^2v}n_{\rm e}n_{\rm i}Z^2\ln\left(\frac{b_{\rm max}}{b_{\rm min}}\right) \tag{6.23}$$

となる。$b_{\rm max}$ と $b_{\rm min}$ は以下のようにして決まる。

まず、$b_{\rm max}$ から。問題にしている ω に対しては $b \gg v/\omega$ の範囲は積分しても 0 になる。よって、

$$\omega\tau \ll 1, \omega\frac{b}{v} \ll 1 \tag{6.24}$$

$$b_{\rm max} = \frac{v}{\omega} \tag{6.25}$$

となる。

$b_{\rm min}$ には二つの条件がある。一つ目は $\Delta v \sim v$ となる条件 (1) で、

$$\Delta v \sim v \tag{6.26}$$

$$\Delta v = \frac{2Ze^2}{m_{\rm e}bv} = v \tag{6.27}$$

$$b_{\rm min}^{(1)} = \frac{2Ze^2}{m_{\rm e}v^2} \tag{6.28}$$

である。二つ目は量子論が問題になる条件 (2) で、

$$\Delta x\Delta p \sim \hbar, \quad \Delta x \sim b, \quad \Delta p \sim mv \tag{6.29}$$

$$b_{\rm min}^{(2)} = \frac{h}{m_{\rm e}v} \tag{6.30}$$

である。それぞれ、

$$b_{\rm min} = \begin{cases} b_{\rm min}^{(1)}, & \frac{1}{2}m_{\rm e}v^2 \ll Z^2Ry \\ b_{\rm min}^{(2)}, & \frac{1}{2}m_{\rm e}v^2 \gg Z^2Ry \end{cases} \tag{6.31}$$

$$Ry = \frac{m_{\rm e}e^4}{2\hbar^2} \tag{6.32}$$

となる。考えている物質がプラズマ状態だとすると、条件 (2) が一般的といえる。その場合には、

$$\frac{dW}{d\omega dVdt} = \frac{16e^6}{3c^3m^2v}n_{\rm e}n_{\rm i}Z^2\ln\left(\frac{m_2v^2}{h\omega}\right) \tag{6.33}$$

となる。このスペクトル log − log で書くと図 6.1 となる。

一般的には色々なことを考えてややこしい部分を Gaunt Factor $g_{ff}(v,\omega)$ に押し込める。

$$\frac{dW}{d\omega dVdt} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3m^2v}n_{\rm e}n_{\rm i}Z^2g_{ff}(v,\omega) \tag{6.34}$$

$$g_{ff}(v,\omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\left(\frac{b_{\rm max}}{b_{\rm min}}\right) \tag{6.35}$$

g_{ff} の計算としては、Karzas and Latter (1961) などが有名である。

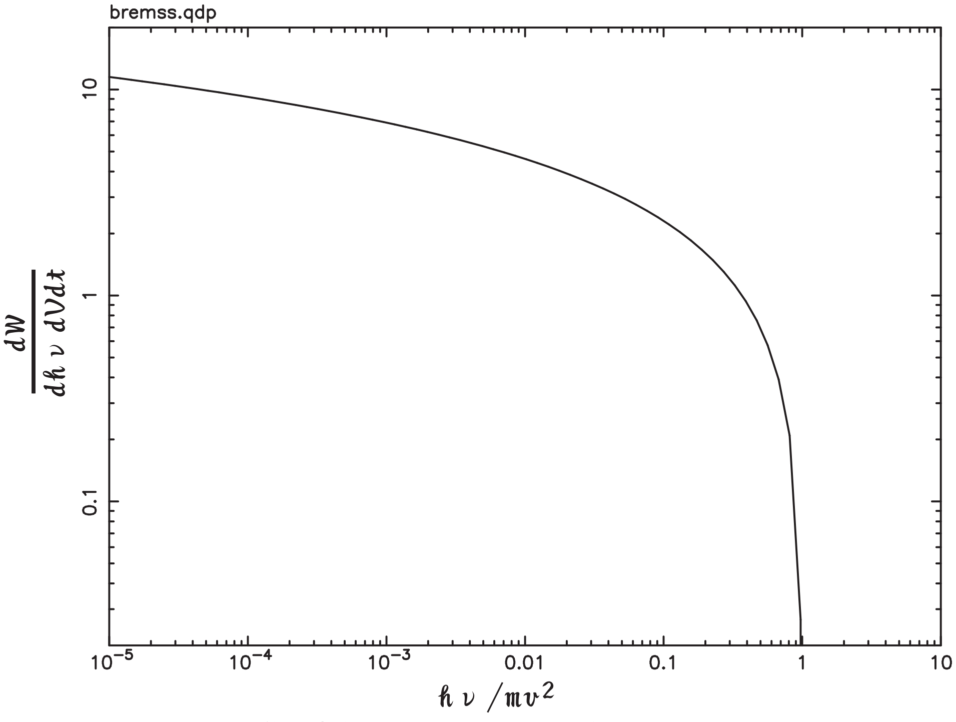


図 6.1: 単一速度の電子による制動輻射のスペクトル。

6.2　熱制動輻射

6.2.1　熱制動輻射

電子が熱的な分布を取っていた場合、速度分布関数は

$$
\begin{align}
dP &\propto \exp\left(-\frac{m_{\rm e}v^2}{2kT}\right)d^3\vec{v} \tag{6.36}\\
dP(v) &\propto 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{m_{\rm e}v^2}{2kT}\right)dv \tag{6.37}
\end{align}
$$

となる。この重みをつけて積分してやれば良い。よって、

$$
\begin{align}
\frac{dW(T,\omega)}{dV\,dt\,d\omega} &= \frac{\int_{v_{\rm min}}^{\infty}\frac{dW(v,\omega)}{d\omega dV dt}v^2\exp(-m_{\rm e}v^2/2kT)dv}{\int_0^{\infty}v^2\exp(-m_{\rm e}v^2/2kT)dv} \tag{6.38}\\
h\nu &= \frac{1}{2}m_{\rm e}v_{\rm min}^2 \tag{6.39}
\end{align}
$$

となる。量子論的に $h\nu$ の光子を作るために必要な電子エネルギーを考え、$v_{\rm min}$ を導入してある。これを例によって、ややこしい所を $\bar{g}_{ff}$ という Velocity Averaged Gaunt Factor というパラメータに押し込め、

$$
\begin{align}
\varepsilon_{\nu}^{ff} &= \frac{dW(T,h\nu)}{dV\,dt\,d\nu} = \frac{2^5\pi e^6}{3m_{\rm e}c^3}\left(\frac{2\pi}{3km_{\rm e}}\right)^{1/2}T^{-1/2}Z^2n_{\rm e}n_{\rm i}e^{-h\nu/kT}\bar{g}_{ff} \tag{6.40}\\
&= 6.8\times10^{-38}Z^2T^{-1/2}Z^2n_{\rm e}n_{\rm i}e^{-h\nu/kT}\bar{g}_{ff}\ \ ({\rm ergs\ s^{-1}\ cm^{-3}\ Hz^{-1}}) \tag{6.41}
\end{align}
$$

となる (図 6.2)。X 線領域での普通の熱的プラズマは、

$$
\begin{align}
g_{ff} &= \left(\frac{3}{\pi}\frac{kT}{h\nu}\right)^{1/2} \tag{6.42}\\
\varepsilon_{\nu}^{ff} &\propto (h\nu)^{-0.4}e^{-h\nu/kT} \tag{6.43}
\end{align}
$$

となる。つまり、$h\nu < kT$ ではエネルギーインデックスで -0.4 のベキ関数型、$h\nu > kT$ では、Exponential 的に落ちる。

全周波数を積分し、単位時間あたりのエネルギー放射量を

$$
\begin{align}
\varepsilon^{ff} &= \frac{dW}{dt\,dV} = \left(\frac{2\pi kT}{3m_{\rm e}}\right)^{1/2}\frac{2^5\pi e^6}{3hm_{\rm e}c^3}Z^2n_{\rm e}n_{\rm i}\bar{g}_B \tag{6.44}\\
&= 1.4\times10^{-27}T^{1/2}Z^2n_{\rm e}n_{\rm i}\bar{g}_B\ \ ({\rm ergs\ s^{-1}\ cm^{-3}}) \tag{6.45}\\
\bar{g}_B &\simeq 1.2 \tag{6.46}
\end{align}
$$

となる。$\propto n^2\sqrt{T}$ であることは覚えておくこと。n^2 になるのは、電子とイオンの 2 体相互作用のため。さらに、宇宙組成を仮定した場合の値は以下の通り (Sarazin 1988)。

$$
\begin{align}
\varepsilon^{ff} &= \sum_{\rm i}1.4\times10^{-27}T^{1/2}Z_{\rm i}^2n_{\rm e}n_{\rm i}\bar{g}_B\ \ ({\rm ergs\ s^{-1}\ cm^{-3}}) \tag{6.47}\\
&= 3.0\times10^{-27}T^{1/2}n_{\rm H}^2\ \ ({\rm ergs\ s^{-1}\ cm^{-3}}) \tag{6.48}
\end{align}
$$

実際の宇宙組成を持つ高温のプラズマの場合、$T > 3\times10^7$ では熱制動輻射が支配的であるが、$T < 3\times10^7$ では下の章で示すように輝線による放射が支配的となる。非常に粗い近似として下の式が与えられている (McKee and Cowie 1977)。

$$
\varepsilon = 6.2\times10^{-19}T^{-0.6}n_{\rm H}^2\ \ ({\rm ergs\ s^{-1}\ cm^{-3}})\ \ ({\rm at}\ 10^5{\rm K} < T < 4\times10^7{\rm K}) \tag{6.49}
$$

また、Gaetz and Salpeter (1983) では、

$$
\varepsilon = \left(1.6\times10^{-18}T^{-0.7}+2.3\times10^{-27}T^{0.5}\right)n_{\rm e}n_{\rm H}\ \ ({\rm ergs\ s^{-1}\ cm^{-3}})\ \ ({\rm at}\ T > 10^5{\rm K}) \tag{6.50}
$$

が与えられている (正しいはずだが使う時は確認すること)。この式の第 2 項は熱制動輻射であるが、上で与えられた係数と違っている。これは、主に Emission Integral を $n_{\rm e}n_{\rm H}$ で与えるか、$n_{\rm H}^2$ で与えるかの違いである。微妙な話しをする場合は、十分に気をつける必要がある。

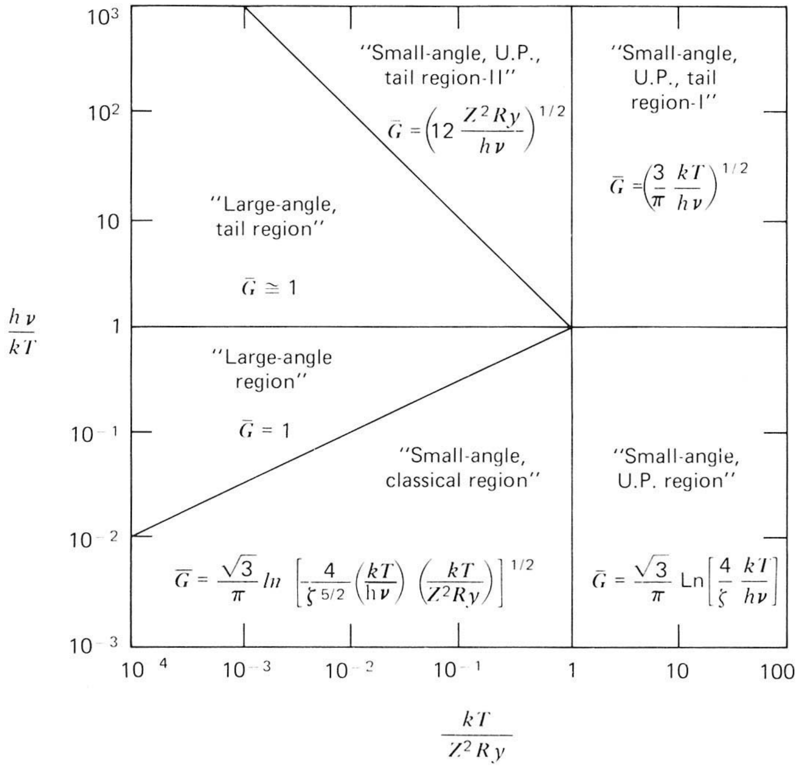


Figure 5.2 Approximate analytic formulae for the gaunt factor $\bar{g}_{ff}(\nu, T)$ for thermal bremsstrahlung. Here $\bar{g}_{ff}$ is denoted by $\bar{G}$ and the energy unit $Ry = 13.6$ eV. (Taken from Novikov, I. D. and Thorne, K. S. 1973 in Black Holes, Les Houches, Eds. C. DeWitt and B. DeWitt, Gordon and Breach, New York.)

図 6.2: 熱制動輻射の Gaunt Factor $\bar{g}_{ff}(\nu, T)$。右上の領域が、X 線プラズマを X 線で見た場合の領域。

6.2.2 熱制動吸収

放射があれば逆過程の吸収もあるというのは前述の通りであり、両者の関係は Kirchhoff の法則より

$$j_\nu^{ff} = \alpha_\nu^{ff} B_\nu(T) = \frac{1}{4\pi}\frac{dW}{dtdVd\nu} \tag{6.51}$$

$$\frac{dW}{dtdVd\nu} = \varepsilon_\nu^{ff} \tag{6.52}$$

$$\alpha_\nu^{ff} = \frac{1}{4\pi}\frac{\varepsilon_\nu^{ff}}{B_\nu(T)} \tag{6.53}$$

となる。

$$B_\nu(T)d\nu = I_\nu = u_\nu c = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T) - 1} d\nu \tag{6.54}$$

であったから、6.40 より、

$$\alpha_\nu^{ff} = \frac{4e^6}{3m_{\mathrm{e}}hc}\left(\frac{2\pi}{3km_{\mathrm{e}}}\right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 n_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{i}} \nu^{-3}\left(1 - e^{-h\nu/kT}\right)\bar{g}_{ff} \tag{6.55}$$

$$= 3.7 \times 10^8 T^{-1/2} Z^2 n_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{i}} \nu^{-3}\left(1 - e^{-h\nu/kT}\right)\bar{g}_{ff} \quad (\mathrm{cm}^{-1}) \tag{6.56}$$

となる。$h\nu \ll kT$(Wein 側) と $h\nu \gg kT$(Rayleigh-Jeans 側) の極限を書くと

$$h\nu \ll kT \quad \rightarrow \tag{6.57}$$

$$\alpha_\nu^{ff} = \frac{4e^6}{3m_\mathrm{e}hc}\left(\frac{2\pi}{3km_\mathrm{e}}\right)^{1/2} T^{-1/2}Z^2 n_\mathrm{e} n_\mathrm{i} \nu^{-3}\bar{g}_{ff} \tag{6.58}$$

$$= 3.7 \times 10^8 T^{-1/2} Z^2 n_\mathrm{e} n_\mathrm{i} \nu^{-3} \bar{g}_{ff} \quad (\mathrm{cm}^{-1}) \tag{6.59}$$

$$h\nu \gg kT \quad \rightarrow \tag{6.60}$$

$$\alpha_\nu^{ff} = \frac{4e^6}{3m_\mathrm{e}hc}\left(\frac{2\pi}{3km_\mathrm{e}}\right)^{1/2} T^{-3/2}Z^2 n_\mathrm{e} n_\mathrm{i} \nu^{-2}\bar{g}_{ff} \tag{6.61}$$

$$= 0.018 T^{-3/2} Z^2 n_\mathrm{e} n_\mathrm{i} \nu^{-2} \bar{g}_{ff} \quad (\mathrm{cm}^{-1}) \tag{6.62}$$

となる。低エネルギー側ほど吸収を受けやすい。熱制動輻射に対し、熱制動吸収の光学的厚みが小さい時には、吸収は効かない。しかし、光学的厚みが大きくなるにつれ、低エネルギー側から先に落ち始め、最終的に黒体輻射になる。

また、この講義では触れなかったが周波数平均 (Rosseland mean) をした吸収係数 α_R^{ff} は

$$\alpha_R^{ff} = 1.7 \times 10^{-25} T^{-7/2} Z^2 n_\mathrm{e} n_\mathrm{i} \nu^{-2} \bar{g}_R \tag{6.63}$$

となる。$B_\nu(T) \propto T^4$ であり、この $\alpha_R^{ff} \propto T^{-7/2}$ であることを考えると、

$$\varepsilon_R^{ff}(T) \propto \alpha_R^{ff}(T) \times B_\nu(T) \tag{6.64}$$

$$\propto T^{-7/2} \times T^4 \tag{6.65}$$

$$\propto T^{1/2} \tag{6.66}$$

が理解できる。

6.2.3　冷却時間

光学的に薄いプラズマの場合、放射によって冷却する時間を見積もる。体積 V、プラズマ密度 $n = n_\mathrm{e} = n_\mathrm{i}$、温度 T、プラズマの熱エネルギー E、光度 L とすると冷却時間 τ は、

$$E = \frac{3}{2}(n_\mathrm{e} + n_\mathrm{i})kT \cdot V = 3nkTV \tag{6.67}$$

$$L \propto n_\mathrm{e} n_\mathrm{i} \sqrt{T} \cdot V \propto n^2 \sqrt{T} V \tag{6.68}$$

$$\tau = \frac{E}{L} \propto \frac{\sqrt{T}}{n} \tag{6.69}$$

と求められる。

具体的には、

$$\tau = 8.5 \times 10^9 \left(\frac{n_\mathrm{H}}{0.01\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{-1} \left(\frac{T}{10^8\mathrm{K}}\right)^{1/2} \quad (\mathrm{yr}) \tag{6.70}$$

と表せる (Sarazin 1988)。$n = 0.005\mathrm{cm}^{-3}$ でだいたい宇宙年齢と考えておけば間違いはない。

6.3　銀河団と β モデル

銀河団は、$10^2 \sim 10^4$ 個の銀河の集団であり、$\sim$Mpc の大きさを持つ宇宙で重力的に束縛された最も大きなシステムである。

6.3.1　銀河団の光学観測

King Model

図 6.3 は、銀河団中の銀河の個数表面密度分布である。これは、重力的に束縛された等温の無衝突粒子で良く説明できる。実は、自己重力系というのは簡単で極めて難しいシステムである。そもそも、等温とはいえエネルギーの高い粒子は必ず存在する訳で、その様な粒子は必ずシステムから逃げてしまう。

とにかく等温の無衝突という最も単純なシステムも、密度分布などを解析的に正確に表現することはできないが、幸いにも King (1962) により簡単な近似式が求められている。個数密度を $n_{\rm grav}(r)$、プロジェクトした表面密度を $\Sigma_{\rm grav}(r)$ とすると、力学的にリラックスした系は

$$n_{\rm grav}(r) = n_{\rm grav}(0)\left[1+\left(\frac{r}{r_{\rm core}}\right)^2\right]^{-3/2} \tag{6.71}$$

$$\Sigma_{\rm grav}(r) = \Sigma_{\rm grav}(0)\left[1+\left(\frac{r}{r_{\rm core}}\right)^2\right]^{-1} \tag{6.72}$$

$$\phi(r) = -4\pi G m_{\rm grav} n_{\rm grav}(0) r_{\rm core}^2 \frac{\ln\left[(r/r_{\rm core})+\sqrt{1+(r/r_{\rm core})^2}\right]}{r/r_{\rm core}} \tag{6.73}$$

と書ける。先ほどの、銀河団の観測結果はこれで良く表現できる。これは何も銀河団のみならず、球対称の自己重力系である、楕円銀河、球状星団もこれで表現できる。$r_{\rm core}$ は ~ 100kpc 程度である。

ビルアル質量

前に示した通り、銀河団は自己重力系でありビルアル定理が適用できる。力学エネルギーを K、重力エネルギーを U とすると、

$$2K+U = 0 \tag{6.74}$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2, \tag{6.75}$$

$$U = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{6.76}$$

となる。重力半径 R_G、(3 次元的な) 速度分散を $\sigma_{\rm grav}^2$、重力質量を $M_{\rm grav}$ を以下のように定義すると、

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} = G\frac{M_{\rm grav}^2}{R_G}, \qquad R_G \equiv \frac{2M_{\rm grav}^2}{\sum_{i\neq j}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}} \tag{6.77}$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M_{\rm grav}\sigma_{\rm grav}^2, \qquad \sigma_{\rm grav}^2 \equiv \frac{\sum_i m_i v_i^2}{M_{\rm grav}} \tag{6.78}$$

$$M_{\rm grav} \equiv \sum_i m_i \tag{6.79}$$

となる。以上を使うと

$$\frac{R_G \sigma_{\rm grav}^2}{G} = \frac{M_{\rm grav}^2}{-U}\frac{2K}{M_{\rm grav}} = M_{\rm grav} \tag{6.80}$$

が得られる。$\sigma_{\rm grav}$ は 3 次元的な速度分散であるが、球対称を仮定すると、観測可能な 1 次元的な速度分散 σ_r とは

$$\sigma_{\rm grav}^2 = 3\sigma_r^2 \tag{6.81}$$

という式で得られる。この式で、$M_{\rm grav}$ と実際に観測されている銀河の総質量 $M_{\rm gal}$ を比較すると、

$$M_{\rm grav} = 10^{14} \sim 10^{15} M_\odot \gg M_{\rm gal} = 10^{13} \sim 10^{14} M_\odot \tag{6.82}$$

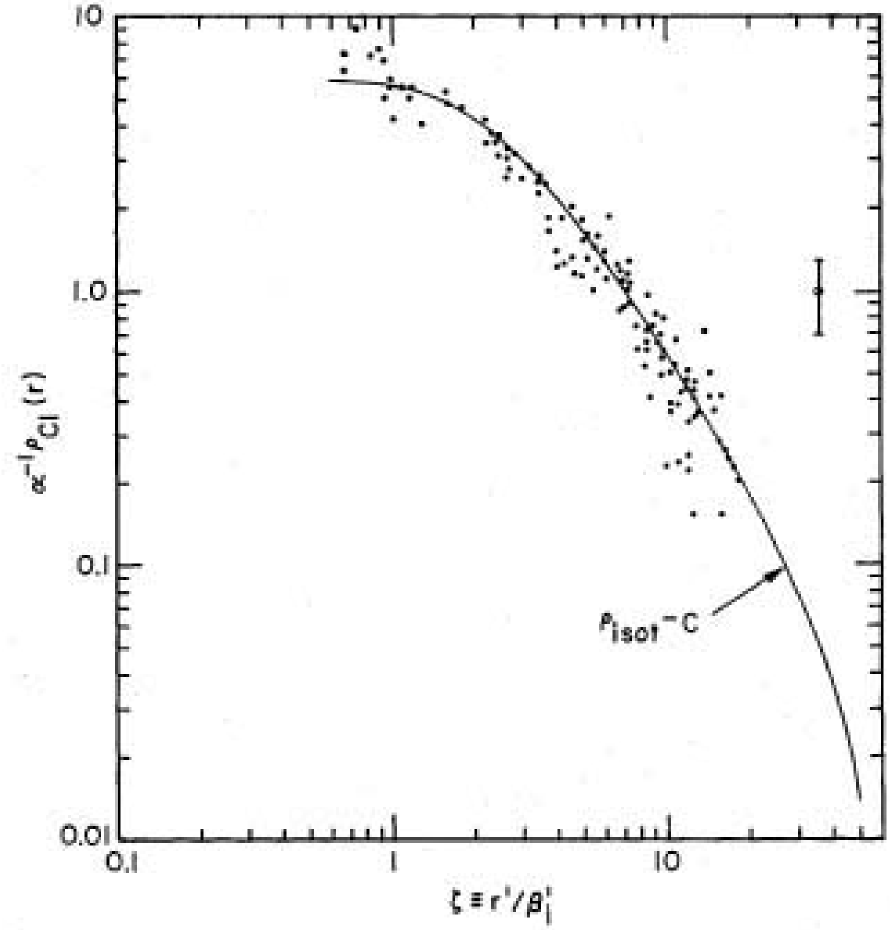


FIG. 1.—The projected galaxy distributions in all the 15 studied clusters plotted as a function of distance from the clusters' centers. All distributions are normalized with their best-fitted parameters α (normalization in density) and β (scaling in distance). The solid line is the projected Emden isothermal gas sphere model, with a cutoff $C = 0.1$. A typical error bar (corresponding to the square root of the number of counts) is shown at the right.

図 6.3: 銀河団における銀河の個数表面密度分布 (Bahcall 1975)

となる。見えていない質量が存在することなり、これを Missing Mass と呼び、Dark Matter の最も重要な観測的証拠の一つとされている。

6.3.2　銀河団の X 線観測

ICM の発見

$\sigma_{\rm grav} = 300 \sim 2000{\rm km\ s^{-1}}$ であり、これはちょうど $10^7 \sim 10^8$K の X 線プラズマの音速に匹敵する。この Missing Mass 問題を解決するために考えられたのは、光学観測ではとらえることのできない X 線で光るプラズマであった。

そこで、X 線衛星で実際に観測した所、まさに銀河団全体に拡がる光学的に薄くプラズマが発見され、”Intra Cluster Medium (ICM)” と名づけられた。調べてみた所、その質量は銀河の総質量よりも大きく、宇宙のほとんどのバリオンは実は X 線プラズマであることが判明した (図??)。これは、文句なしに X 線天文学最大の発見 (の一つ) と言える。X 線

放射は熱制動輻射であり、その温度とX線光度はざっと、

$$
\begin{aligned}
kT\mathrm{gas} &= 1 \sim 20\mathrm{keV} \qquad (6.83)\\
L_{\mathrm{X}} &= 10^{43} \sim 10^{45}\mathrm{ergs\ s}^{-1} \qquad (6.84)
\end{aligned}
$$

であり、図6.5の関係がある。

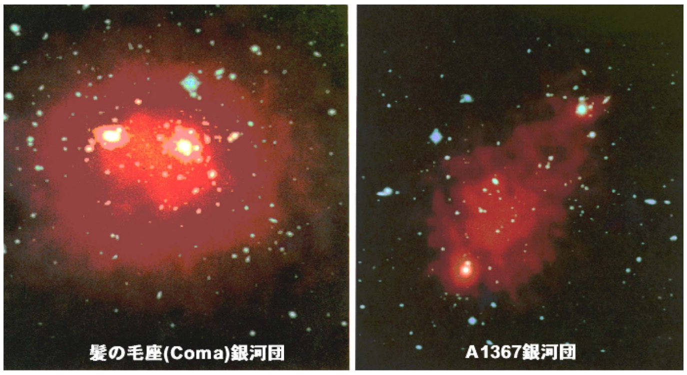


図 6.4: かみのけ座銀河団 (Coma Cluster) と A1367。光学写真にX線イメージを重ねている。

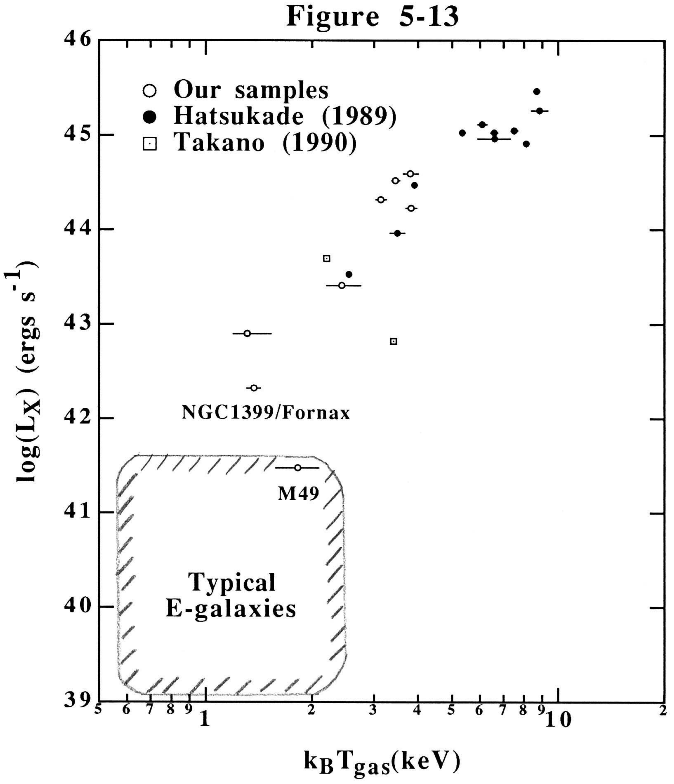


図 6.5: ICMの温度とX線光度の関係 (Tsuru 1992)

β Model

プラズマが理想気体であり、静水圧平衡にある場合、圧力勾配と重力が等しくなるので

$$P_{\mathrm{gas}} = \rho_{\mathrm{gas}} \frac{kT_{\mathrm{gas}}}{\mu m_{\mathrm{H}}} \tag{6.85}$$

$$\frac{dP_{\mathrm{gas}}(r)}{dr} = -\rho_{\mathrm{gas}}(r) \frac{d\phi(r)}{dr} \tag{6.86}$$

となる。これを、前述の King Model で表される自己重力系 ($\phi(r)$ が与えられている) に置くとガス密度 n_{gas} は、

$$n_{\mathrm{gas}}(r) = n_{\mathrm{gas}}(0) \left[1 + \left(\frac{r}{r_{\mathrm{core}}} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}\beta_{\mathrm{fit}}} \tag{6.87}$$

$$\Sigma_{\mathrm{X}}(r) = \Sigma_{\mathrm{X}}(0) \left[1 + \left(\frac{r}{r_{\mathrm{core}}} \right)^2 \right]^{-3\beta_{\mathrm{fit}}+\frac{1}{2}} \tag{6.88}$$

と書ける (Cavaliere and Fusco-Femiano 1976)。β は

$$\beta = \frac{\mu m_{\mathrm{H}} \sigma_{\mathrm{grav}}^2}{3kT_{\mathrm{gas}}} = \frac{\mu m_{\mathrm{H}} \sigma_{\mathrm{r}}^2}{kT_{\mathrm{gas}}} \tag{6.89}$$

$$= \frac{(1/2)\sigma_{\mathrm{grav}}^2}{(3/2)kT/\mu m_{\mathrm{H}}} \tag{6.90}$$

である。すなわち、自己重力系を作るシステムが持つ単位質量あたりの運動エネルギー $(1/2)\sigma_{\mathrm{grav}}^2$ と、プラズマが持つ単位質量あたりの熱エネルギー $\frac{(3/2)kT}{\mu m_{\mathrm{H}}}$ の比である ($\beta < 1$ だと熱エネルギーの方が大きい)。

β_{fit} は *Einstein*、*ROSAT*、*ASCA* など X 線のイメージング観測から図 6.6

$$\beta_{\mathrm{fit}} = 0.5 \sim 0.65 \tag{6.91}$$

と得られている (Jones and Forman 1984)。

一方、kT は X 線のスペクトルから得られ、光学観測から得られる速度分散 $\sigma\mathrm{r}$ との比から

$$\beta_{\mathrm{spec}} = \frac{\mu m_{\mathrm{H}} \sigma_{\mathrm{r}}^2}{kT_{\mathrm{gas}}} \tag{6.92}$$

を求めることができる。HEAO-1 で β_{spec} を調べた所、図 6.7 が得られた。両者は相関することが判明したものの

$$\beta_{\mathrm{spec}} = 1.0 \sim 1.2 \tag{6.93}$$

となった (Mushotzky 1984)。

β_{fit} と β_{spec} は本来一致して欲しいが、

$$\beta_{\mathrm{spec}} \sim 2 \times \beta_{\mathrm{fit}} \tag{6.94}$$

となっている。これを β Problem と呼ばれている。

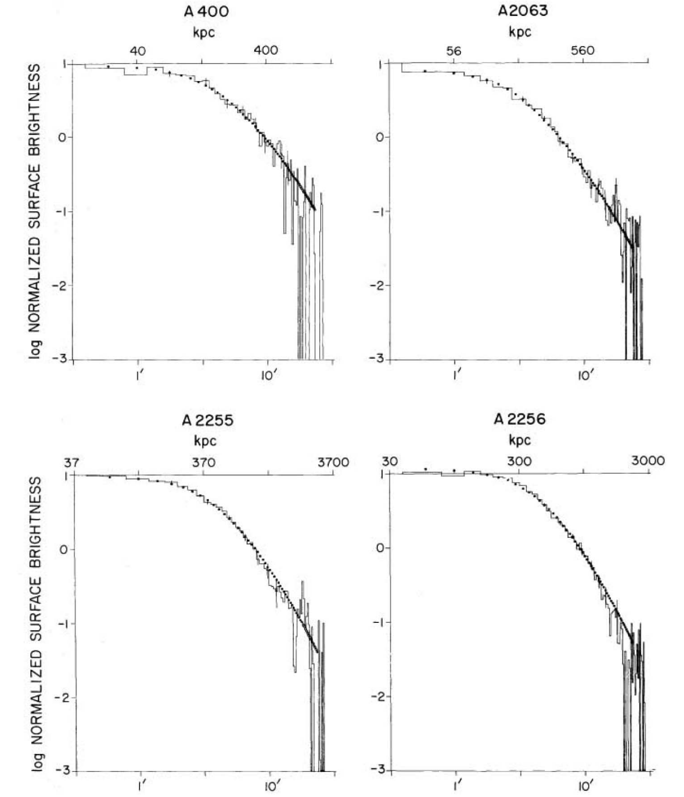


FIG. 1.—The radial surface brightness profiles of A400, A2063, A2255, and A2256 are shown for the 0.5–3.0 keV energy band. Error bars (1 σ) are shown every fourth data point. The best fitting isothermal-hydrostatic model is shown as symbols. The reduced χ^2 for the four clusters A400, A2063, A2255, d A2256 are 0.8, 1.2, 0.6, and 1.5 for 44, 51, 45, and 59 data points, respectively.

図 6.6: *Einstein* で得られた、クーリングフロー無しの銀河団の輝度分布を β モデルでフィットしたもの (Jones and Forman 1984)。

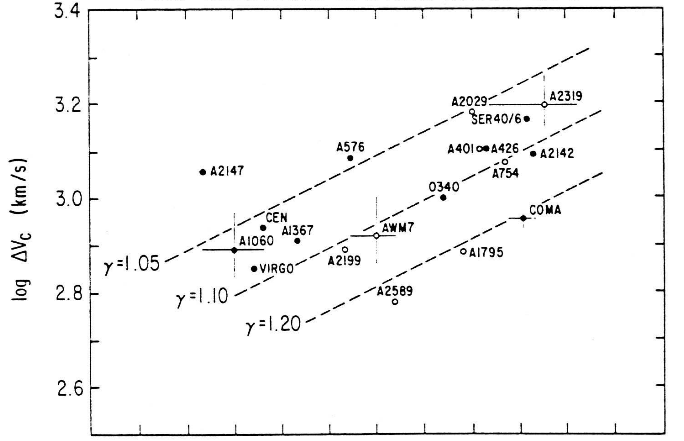


図 6.7: HEAO-1 で得られた、ICM の温度と速度分散の相関 (Mushotzky 1984)。

ICM、銀河、重力、それぞれの質量とその空間分布

ICM の質量は $n_{\rm gas}(r)$ を積分すれば良い。銀河の総質量は光学観測から得られる。重力質量は、ICM により、先に述べたビルアル定理よりも以下のように正確に求めることができる。静水圧平衡を仮定すると、

$$\frac{kT_{\rm gas}}{\mu m_{\rm H}}\frac{d\rho_{\rm gas}}{dr}+\frac{\rho_{\rm gas}k}{\mu m_{\rm H}}\frac{dT_{\rm gas}}{dr}=-\rho_{\rm gas}G\frac{M_{\rm grav}(<r)}{r^2} \tag{6.95}$$

となるので、

$$M_{\rm grav}(<r)=-\frac{kT_{\rm gas}(r)}{\mu m_{\rm H}G}\left(\frac{d\ln\rho_{\rm gas}(r)}{d\ln r}+\frac{d\ln T_{\rm gas}(r)}{d\ln r}\right)r \tag{6.96}$$

となる。ICM が等温であり、β モデルを仮定すると、

$$M_{\rm grav}(<r)=3\beta_{\rm fit}\frac{kT_{\rm gas}}{\mu m_{\rm H}G}\frac{r^2}{r_{\rm core}^2+r^2}r \tag{6.97}$$

となる。それぞれの相関を取ると以下の通りになる (Tsuru 1992)。さらに *ASCA* 衛星のように温度とイメージの両方を同時に求めることができる衛星を用いれば、積分量のみならず分布も正確に求めることができる (Ikebe 1996) 6.11。(Ikebe etal 以外の例も載せる)

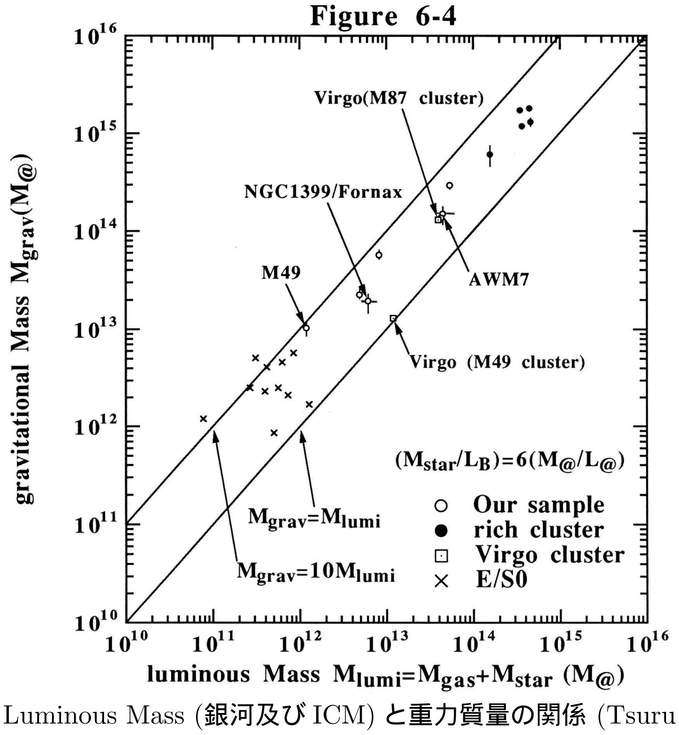


図 6.8: Luminous Mass (銀河及び ICM) と重力質量の関係 (Tsuru 1992)。

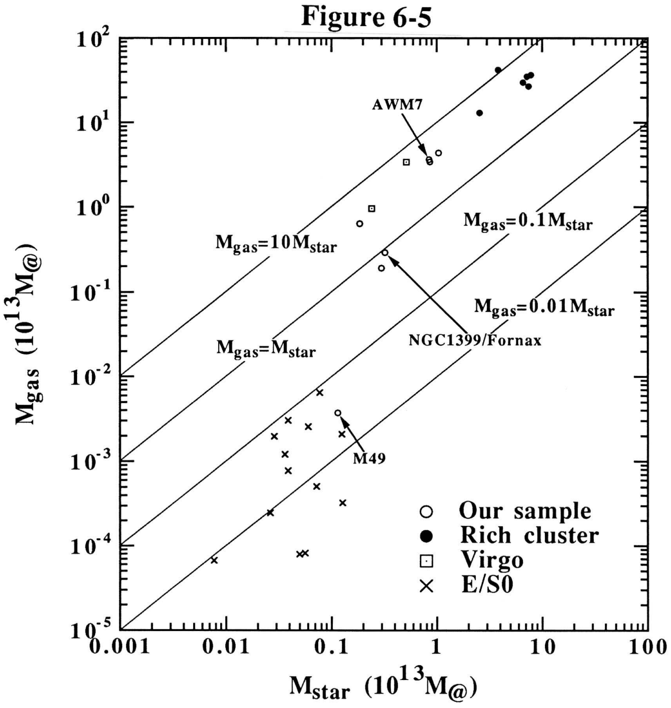


図 6.9: 銀河の総質量と ICM 質量の関係 (Tsuru 1992)。

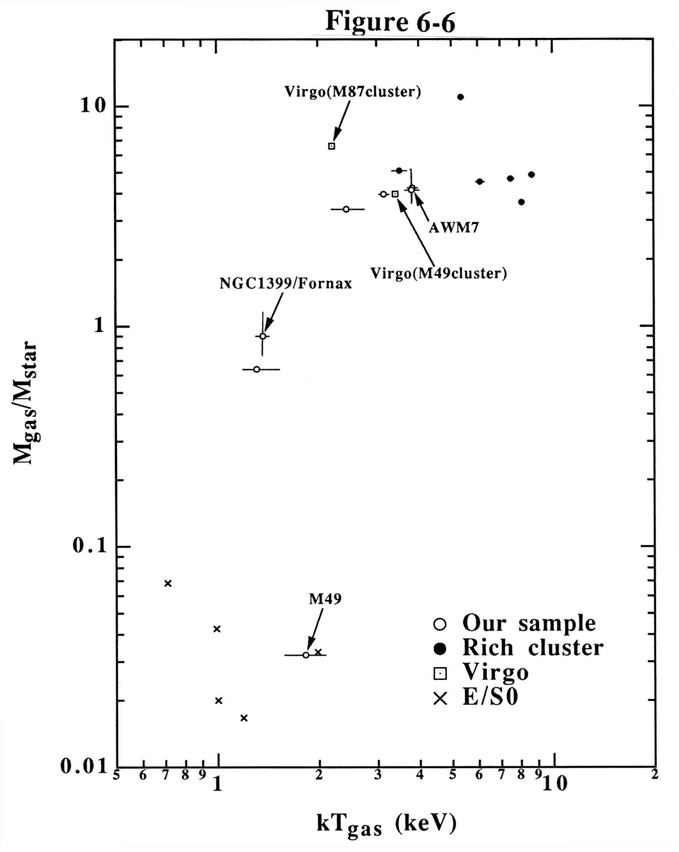


図 6.10: ICM の温度と ICM と銀河の質量比の関係 (Tsuru 1992)。

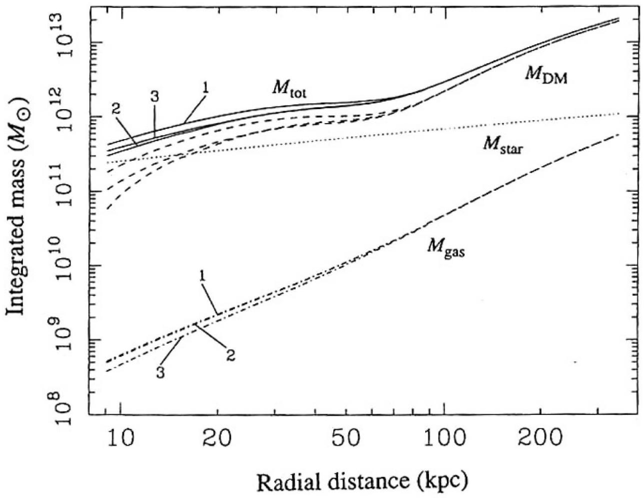


FIG. 2 Integrated mass profiles of total gravitating matter ($M_{\rm tot}$, solid lines), dark matter ($M_{\rm DM}$, dashed lines) and X-ray emitting plasma ($M_{\rm gas}$, dot-dashed lines). Three curves for each component, specified by numbers (1–3), correspond to the three models for the plasma temperature and abundance distribution (see text for detail); model 1 is isothermal; model 2 has a central temperature decrease; model 3 has a central abundance increase. The profile of light-emitting matter ($M_{\rm star}$; dotted line) was derived from ref. 12 assuming a mass-to-light ratio of 8. The integration radius is measured from NGC1399, assuming a source distance of 20 Mpc.

図 6.11: 「あすか」によって得られた重力質量分布 (Ikebe 1996)。

冷却時間とクーリングフロー

銀河団全体では、冷却時間は宇宙年齢よりも長い (図 6.12)。しかし、前述のように冷却時間は密度に反比例するので、密度の高い中心部分の冷却時間は宇宙年齢よりも短くなる。その結果、中心の光度は β モデルが予測するよりも上がり、中心圧力が下がることにより、中心に落ち込むガスの流れが予想される。これを Cooling Flow と呼ぶ。*Einstein* の観測から、中心に cD 銀河が存在し。中心プラズマ密度が高い銀河団では、中心集中がみられる (図 6.13)。

クーリングフローは、cD 銀河の起源、AGN の活動性などと関連し、非常に興味深い現象であり、*ASCA* 以前は少なくともこの存在を疑う人は少なかった。しかし、*ASCA* の観測によって、現在状況は変化している。

もしも本当にクーリングフローが存在するのであれば、低温成分の存在し、しかも連続的な温度分布が得られるはずである。しかし、*ASCA* 衛星の結果によると、輝度分布の中心集中があるにも関わらず低温成分が存在しないもの、連続的な温度分布と言うよりも、2 温度成分であり、しかもきれいに高温成分と分かれるのではなく、中心でもは両者のミックスになっている、低温成分の温度は cD 銀河の ISM と考えるとちょうど合うもの、などが観測された。また、クーリングフローであれば疑問に思われる重元素アバンダンスの勾配などが見つかっている。この結果、クーリングフローの存在には現在疑問が持たれており、結局どうなっているのか決着はついていない。

(XMM の松下さんの結果や、中心領域の NonThermal 現象などについて示す。Boeringer の結果や Young CXO M87, McNamara CXO のレビューなど)

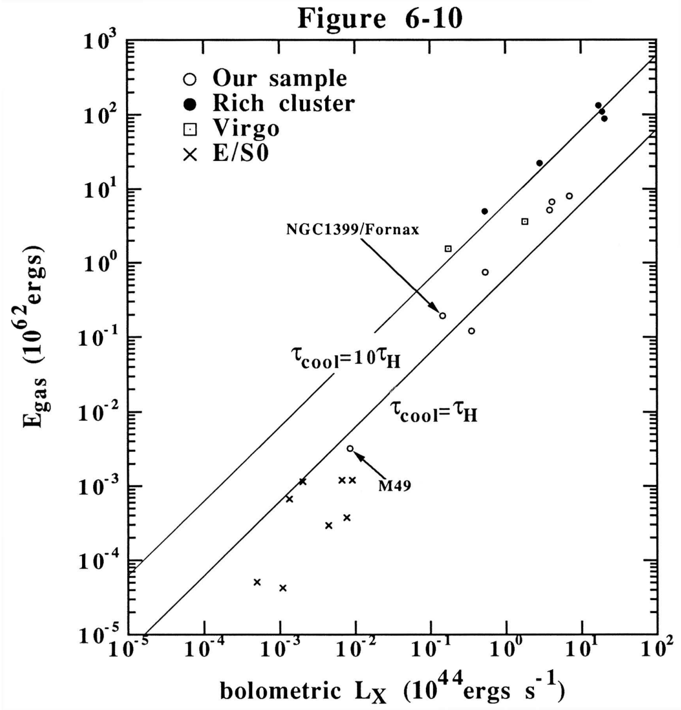


図 6.12: ICM の光度とプラズマ熱エネルギーの関係 (Tsuru 1992)。

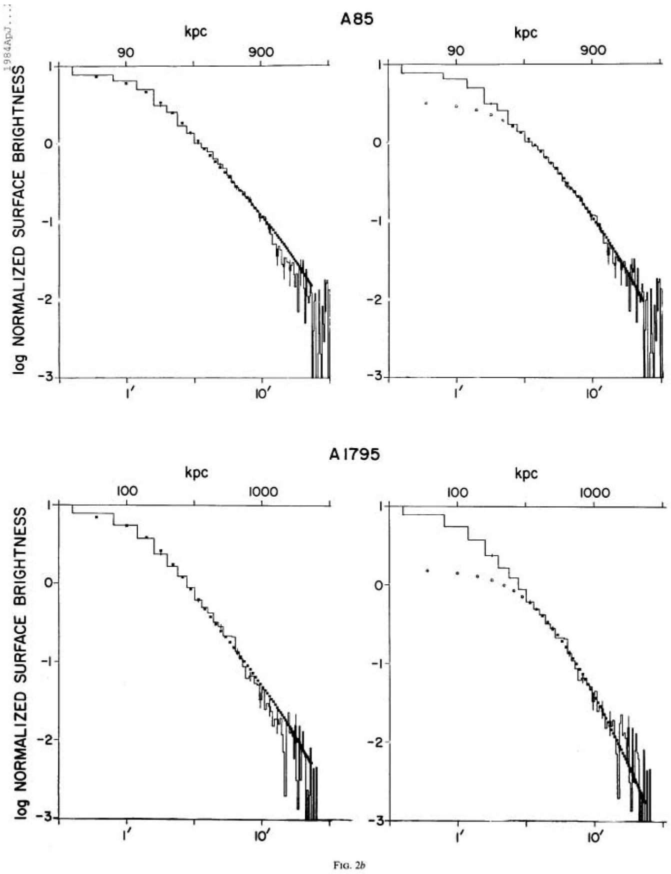


Fig. 2*b*

図 6.13: 表面輝度の中心集中が見られる銀河団 (Jones and Forman 1984)。左は Single β でフィットしたもので、フィットが良くない。中心にポイントソース (*Einstein* の空間分解能で) を入れると、フィットが改善される。このポイントソースをクーリングフローだと考えている

第7章　原子による輻射と吸収

7.1　光学的に薄いプラズマでの電離平衡と放射冷却

ここでは、光学的に薄いプラズマでの電離平衡と輝線放射を説明し、熱制動輻射も含めた放射冷却について議論する。主に Cox and Tucker (1969) を参照。

ここで扱うプラズマは、

1) プラズマは熱的であり、その温度は $10^3 - 10^8$K。
2) 光学的に薄く、Photo Ionization は無視できる。
3) 電離平衡を仮定。イオンに電子が衝突することによる電離と、再結合 (Radiation Recombination、Dielectronic Recombination) が釣り合う。
4) 密度が薄い極限 (コロナ近似とも言う)。励起されたイオンは、次の衝突が起こるよりも速く輝線放出により、Ground State に落ちる。
5) 電子温度 $T \gg 10^4/Z^2$K では、禁制線は無視できる。

7.1.1　Ionization Equilibrium

原子番号 Z で、電子が z 個残っている状態を考える ($Z - z$ 価のイオン)。

$$C_{Z,z} = \text{Ionization Rate Coefficient } [\mathrm{cm^3 sec^{-1}}] \tag{7.1}$$

$$\alpha^{\mathrm{rad}}_{Z,z} = \text{Radiative Recomibination Rate Coefficient } [\mathrm{cm^3 sec^{-1}}] \tag{7.2}$$

$$\alpha^{\mathrm{di}}_{Z,z} = \text{Dielectronic Recomibination Rate Coefficient } [\mathrm{cm^3 sec^{-1}}] \tag{7.3}$$

それぞれ、単位時間、単位体積あたりで、単位密度の電子、単位密度のイオンに対して起こるレートである。よって、単位は $\mathrm{cm^3 sec^{-1}}$。

$$\frac{dN_{(Z,z\to z+1)}}{dV dt}[\mathrm{cm^{-3} sec^{-1}}] = n_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{Z,z}} C_{Z,z} \tag{7.4}$$

$$\frac{dN_{(Z,z\to z-1)}}{dV dt}[\mathrm{cm^{-3} sec^{-1}}] = n_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{Z,z}} \alpha^{\mathrm{rad}}_{Z,z} \tag{7.5}$$

$$\frac{dN_{(Z,z\to z-1)}}{dV dt}[\mathrm{cm^{-3} sec^{-1}}] = n_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{Z,z}} \alpha^{\mathrm{di}}_{Z,z} \tag{7.6}$$

原子番号 Z、$+z$ 価のイオンの密度を $n_{Z,z}$ と書くと、$n_{Z,z-1}$ との間で、

$$\frac{n_{Z,z-1}}{n_{Z,z}} = \frac{\alpha^{\mathrm{rad}}_{Z,z} + \alpha^{\mathrm{di}}_{Z,z}}{C_{Z,z}} \tag{7.7}$$

の関係がある。

Collisional Ionization

この Z, z のイオンに対する、電子の電離の衝突断面積を $Q_{Z,z}$ と書くと、Ionization-Rate 係数 $C_{Z,z}$ は次のように書ける。

$$C_{Z,z} = < Q_{Z,z} v_{\rm e} > \tag{7.8}$$

$$C_{Z,z} = 1.3 \times 10^{-8} \sqrt{T} \xi' F(Z,z) I'^{-2}_{\rm eV} \exp\left(-I'_{Z,z}/kT\right)\ [{\rm cm}^3 {\rm sec}^{-1}] \tag{7.9}$$

ここで、

T: Electron Temperature (K)

ξ': Effective number of outershell electrons

$I'_{Z,z}$: effective ionization potential (ergs)

$I'_{\rm eV}$: effective ionization potential (eV)

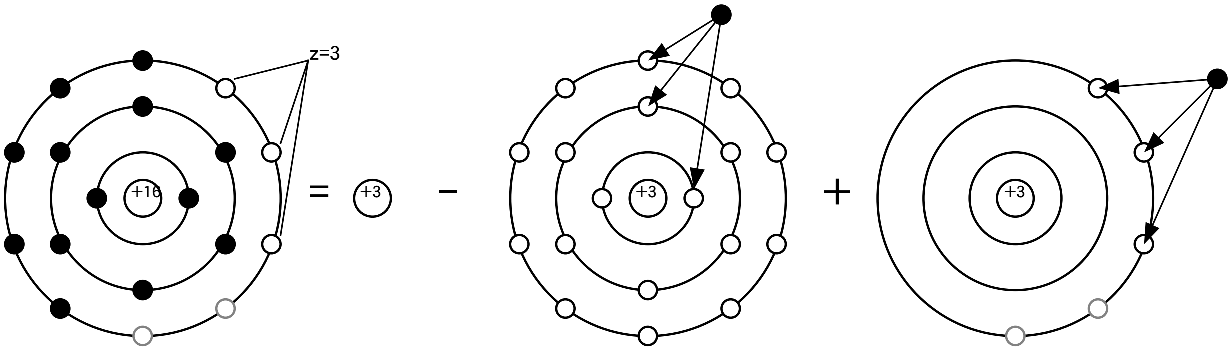
$F(Z,z)$: Focusing Factor, Ion の Wave Function の歪みを考えた factor。0.1 ((Ne$_{\rm I}$) $\sim$ 2.0 (C$_{\rm IV}$)。多くの場合、1.8 の Constant で十分良い近似だが、特別なケースでは factor 2 か、それ以上に Overestimate である。

Radiative Recombination

Radiative Recombination Rate $\alpha^{\rm rad}_{Z,z}$ は図 7.1 の様に考え、

$$\alpha^{\rm rad}_{Z,z} = (1) - (2) + (3) \tag{7.10}$$

と書ける。



(1) (2) (3)

Z=16, z=3のイオンに電子が落ちる確率。

Z=3の裸のイオンに電子が、n=1〜∞のいずれかの殻に落ちる確率。

Z=3の裸のイオンに電子が、n=1,2,3のいずれかの殻に落ちる確率。

n=3の空いている所に落ちる確率。

図 7.1: Radiative Recombination Rate $\alpha^{\rm rad}_{Z,z}$ の計算方法。

(1) 原子番号 Z の Hydrogenic Ion (つまり、電子が全く残っていない状態) の場合の Radiative Recombination Rate は次のように書ける (“Radiative Proccess in Astrophysics” の式 (10.65a))。電子が Free-Bound で落ちる先の Shell は、全ての Shell を足している。

$$\alpha^{\rm rad}_z = \sum_n < v\sigma_{fb} > \tag{7.11}$$

$$\alpha^{\rm rad}_z = 2.07 \times 10^{-11} z^2 T^{-\frac{1}{2}} (0.4288 + \frac{1}{2} \ln\beta + 0.4698\beta^{-\frac{1}{3}}) \tag{7.12}$$

$$\beta = z^2 I_{\rm H}/kT \tag{7.13}$$

$$I_{\rm H} \equiv 13.6[{\rm eV}]\ \text{：水素の IonizationPotential} \tag{7.14}$$

これは、Ground State に近いイオンの場合はあまり良くないが、Exited State になればなるほど、この Hydrogenic Ion に近くなる。(1) は以下のように書ける。

$$(1) = \alpha^{\rm rad}_z \tag{7.15}$$

(2) Non-Hydrogenic Ion の場合は、Purely Hydrogenic Ion に対して、イオン中に既に存在している電子による補正をしなければならない。そこで、Hydrogenic Ion での Radiative Recombination Rate から、Electron Filled Shell と

Valence Shell (価電子を持つ Shell) への Recombination Rate を引いた。Total Recombination Rate は Purly Hydrogenic の場合の値の 0.35 ∼ 1.75 となった。Seaton (1959) によれば、shell n への Recombination Rate は、

$$\alpha_n^{\mathrm{rad}} = 5.197 \times 10^{-14} z(\beta/n^2)^{\frac{3}{2}} S_n(\beta) \tag{7.16}$$

$$f(a,x) \equiv e^x x^{-a} \Gamma(a,x) \tag{7.17}$$

$$S_n(\beta) = f(0,\beta/n^2) + 0.1728 n^{-\frac{2}{3}} \left[(1+3\beta/n^2) f(1/3,\beta/n^2) - 3\right] \tag{7.18}$$

$$-0.0496 n^{-\frac{4}{3}} \left[(1+2\beta/n^2 + \frac{3}{2}\beta^2/n^4) f(2/3,\beta/n^2) - \frac{3}{2}(1+\beta/n^2)\right] \tag{7.19}$$

となる。よって、

$$(2) = \sum_{n=1}^{n_v} \alpha_n^{\mathrm{rad}} \tag{7.20}$$

(3) まだ埋まっていない Valence Shell に落ちる Recombination は、$Z = 3$ の原子の主量子数 n_v^* の Shell へ落ちる確率として扱える。n_v^* は以下のように示せる。

$$I_{\mathrm{H}} = Ry \tag{7.21}$$

$$I_{Z,z-1} = z^2 Ry \frac{1}{n_v^*} \tag{7.22}$$

$$n_v^* = z \left(\frac{I_{\mathrm{H}}}{I_{Z,z-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.23}$$

α_n^{rad} には Shell n の縮退分 $2n_v^2$ が入っている (うーん、これは、n までの全ての Shell の縮退数を数えたも Shell n だけでの縮退を考えるとこうではないはずだが...)。よって、軌道 1 つあたりに落ちる確率は、

$$\frac{1}{2(n_v^*)^2} \alpha_{n_v^*}^{\mathrm{rad}} \tag{7.24}$$

となる。空いている軌道の実効的な数を $N(Z-z)$ と書くと、結局まだ埋まっていない Valence Shell に落ちる Recombination は、

$$(3) = N(Z-z) \frac{\alpha_{n_v^*}^{\mathrm{rad}}}{2(n_v^*)^2} \tag{7.25}$$

最終的に、Radiative Recombination Rate は

$$\alpha_{Z,z}^{\mathrm{rad}} = (1) - (2) + (3) \tag{7.26}$$

$$= \alpha_z^{\mathrm{rad}} - \sum_{n=1}^{n_v} \alpha_n^{\mathrm{rad}} + N(Z-z) \frac{\alpha_{n_v^*}^{\mathrm{rad}}}{2(n_v^*)^2} \tag{7.27}$$

となる。

Dielectronic Recombination: 2 電子再結合

Tucker and Gould (1966) によると、図 7.2 の Dielectronic Recombination: 2 電子再結合は無視できない。

しかし、実際にはこのうまくは行かず、"Auger" electron を放出して逆過程する場合が多い。この場合 Photon は放出されない。しかし、ある温度では時々Photon を放出して再結合する。電子 A が Shell n' に励起され、Recomobination する Rate$\alpha_{Z,z,n'}^{\mathrm{di}}$ と、全ての n' を足し合わせた、Dielectronic Recombination Rate $\alpha_{Z,z}^{\mathrm{di}}$ は次のように書ける。

$$\alpha_{Z,z,n'}^{\mathrm{di}} = T^{-\frac{3}{2}} C_{n'} \exp\left(-\Delta E_{n'}/kT\right) \tag{7.28}$$

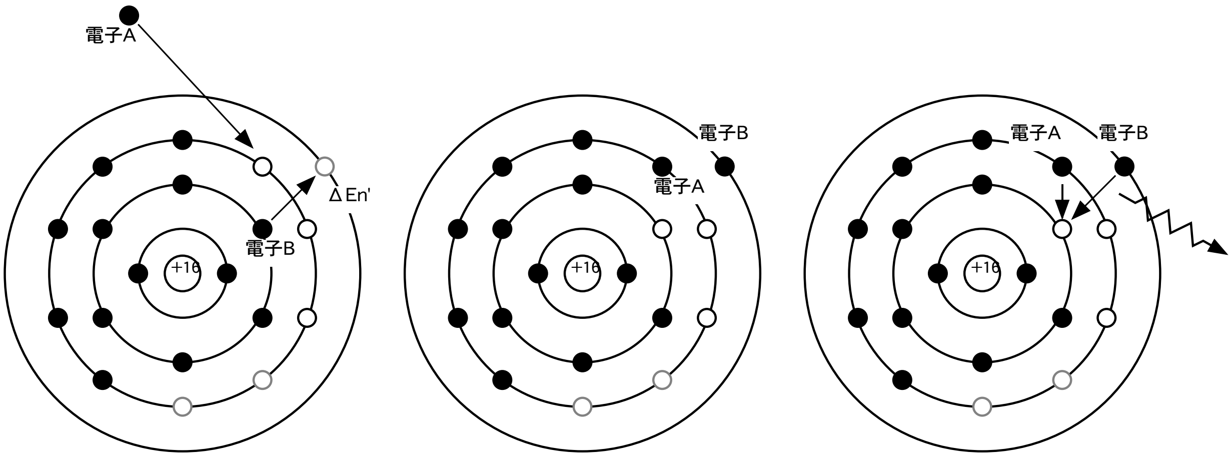
$$\alpha_{Z,z}^{\mathrm{di}} = T^{-\frac{3}{2}} \sum_{n'} C_{n'} \exp\left(-\Delta E_{n'}/kT\right) \tag{7.29}$$

ここで、

n': Ion z の励起レベル n'

$\Delta E_{n'}$: Ground State と n' のエネルギー差。

$C_{n'}$: 0.04 ∼ 0.75 の定数。イオンによって違う。



電子Aが別の励起軌道に再結合する。そのエネルギーでイオンをexiteし、電子Bを高い軌道に上げる、内殻軌道を空ける。

元々電子Aが持っていたエネルギーは全てこのDoublly Exited Stateに保存される。

空いた内殻軌道に電子A又はBが落ちる。電子Aが落ちた場合は、Bもいずれ落ちる。

図 7.2: Dielectronic Recombination

7.1.2 Radiative Cooling Rate

前の章で、与えられた温度でのイオンの平衡状態が解けたので、電子、プロトン、イオンの全ての状態が知ることができた。次に、このプラズマからの放射を計算する。考えなければならない素過程は次の 3 つ。

free-free Bremsstrahlung (制動輻射)
free-bound Recombination (再結合)
bound-bound Line Emission (輝線)

Bremsstrahlung

以前やったように、z 価のイオンに対する温度 T のマックスウェル分布の電子が放射する熱制動輻射量は、

$$\frac{dE_\mathrm{B}}{dtdV} = 1.42 \times 16^{-27} T^{\frac{1}{2}} n_e n_z z^2 g_\mathrm{B}(\beta) \quad (\mathrm{ergs\ sec^{-1}\ cm^{-3}}) \tag{7.30}$$

$$\beta = z^2 I_\mathrm{H}/kT \tag{7.31}$$

と書ける。ここで、

g_B: 速度、周波数平均した Gaunt Factor。$1.2 \pm 1.2 \times 0.2$。

である。先ほどの式は z イオンのみなので、

$$S = \sum_z n_e n_z z^2 g_\mathrm{B}(\beta) \tag{7.32}$$

として色々なイオンの寄与を考える。熱制動輻射が重要になるような温度では (つまり $T > 10^7$K の X 線)、宇宙組成で完全電離した水素とヘリウムが最も効き、

$$S = 1.61 n_e n_\mathrm{H} \tag{7.33}$$

となる。よって、

$$\frac{dE_\mathrm{B}}{dtdV} = 2.29 \times 16^{-27} T^{\frac{1}{2}} n_e n_\mathrm{H} \quad (\mathrm{ergs\ sec^{-1}\ cm^{-3}}) \tag{7.34}$$

となる。

Recombination Radiation

電子が Recombination Radiation により Shell n に落ちた場合、

$$h\nu = E_e + I_{Z,z-1,n} \tag{7.35}$$

のエネルギーを持つ Photon が放出される。

電子密度が十分薄い場合は、電子とイオンの衝突頻度が低いので、Shell n から再び $+z \to +(z-1)$ に再びイオン化されたり、励起されるより速くカスケードにより Ground State に落ちる。そこで、n はやめて、Ground State まで勘定しても良い。それを $I_{Z,z-1}$ と書く。カスケードのパスによりスペクトルは違うが、合計のエネルギーは同じ。

このエネルギーに電子が元々持っていた運動エネルギーを $(\alpha^{\mathrm{rad}}_{Z,z}$ に足す形で) 足すと、単位時間あたり単位体積からのエネルギー放射量は

$$\frac{dE_{\mathrm{RR},Z,z}}{dtdV} = n_e n_{\mathrm{Z,z}} \left[\alpha^{\mathrm{rad}}_{Z,z} + 2AvX(I_{Z,z}/kT)\right] \tag{7.36}$$

$$A = 2.11 \times 10^{-22} \quad (\mathrm{cm}^2) \tag{7.37}$$

$$v = (2kT/\pi m)^{\frac{1}{2}} \tag{7.38}$$

$$X(y) = X^1(y) - \sum_{n=1}^{n_v} p(y,n) + N(Z-z)p(y,n_v^*)/2(n_v^*)^2 \tag{7.39}$$

$$X^1 = \sum_{n=1}^{\infty} p(y,n) \tag{7.40}$$

$$p(y,n) = y\left[1 - ye^{y/n^2}E_1(y/n^2)/n\right]/n^3 \tag{7.41}$$

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\nu}}{\nu} d\nu \tag{7.42}$$

(7.43)

と書ける。近似としては、

$$X^1(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(0.735 + \ln y + \frac{1}{3y}\right) & : y > 0.5 \\ 1.2y + (0.55 + 1.04\ln y)y^2 + (1.01\ln y - 0.43)y^3 & : y < 0.5 \end{cases} \tag{7.44}$$

となる。

Dielectronic Recombination の方は、

$$\frac{dE_{\mathrm{DRR},Z,z}}{dtdV} = n_e n_{Z,z} \sum_{n'} (\Delta E_{n'} + I_{Z,z-1}) \alpha^{\mathrm{di}}_{Z,z,n'} \tag{7.45}$$

となる。$\Delta E_{n'}$ は Dielectronic Recombination によって exite された Bound electron の exitation enerygy であり、元々電子が持っていたエネルギーは

$$E_e = \Delta E_{n'} \tag{7.46}$$

となる。

Line Emission

スペクトル的に Line Emission である内、Recombination と Dielectronic Recombination のカスケードに付随する Line Emission は既に勘定に入っている。残りは、電子がイオンに衝突することによってイオンが励起され、それが再び Ground State に落ちる時の Line Emission である。

ここでは、プラズマ密度は薄い極限を考えている。これはつまり、励起状態から Ground State に落ちる時間に比べ、平均的な衝突頻度が低いと言うことである。すなわち、衝突したらすぐに輝線が放出され、元の Ground State に落ちると考えれば良い。つまり、輝線の放射レートは衝突レートと等しい。よって、

$$\frac{dE_{\mathrm{L},Z,z,nn'}}{dtdV} = n_e n_{Z,z,n} \Delta E_{nn'} < \sigma_{Z,z,nn'} v > \tag{7.47}$$

$$\sigma_{Z,z,nn'} = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \frac{I_{\mathrm{H}}^2}{E_e \Delta E_{nn'}} f_{nn'} \bar{g}_{nn'} \pi a_0^2 \tag{7.48}$$

$$I_{\mathrm{H}} = e^2/2a_0 \tag{7.49}$$

となり、

$$\frac{dE_{\mathrm{L},Z,z,nn'}}{dtdV} = 8\pi^2 e^4 \frac{1}{(6\pi m_e kT)^{\frac{1}{2}}} n_{Z,z,n} n_e f_{nn'} g_{nn'} e^{-\Delta E_{nn'}/kT} \tag{7.50}$$

$$8\pi^2 e^4 \frac{1}{(6\pi m_e kT)^{\frac{1}{2}}} = 2.71 \times 10^{-15}/\sqrt{T} \tag{7.51}$$

となる。ここで、

$f_{nn'}$: Dipole Oscillator Strength

$g_{nn'}$: Effective Gaount Factor で、$E_e/\Delta E_{nn'}$ の関数。考えている領域では、定数と考えて良い。$kT = 1.5\Delta E_{nn'}$ では、$g_{nn'} \sim 0.25$ 程度。

である。

7.1.3　まとめと結果

まず、イオン温度を決定する。

$$\frac{n_{Z,z-1}}{n_{Z,z}} = \frac{\alpha^{\mathrm{rad}}_{Z,z} + \alpha^{\mathrm{di}}_{Z,z}}{C_{Z,z-1}} \tag{7.52}$$

$n_{Z,z}$: 原子番号 Z の $+z$ 価イオンの密度。
$C_{Z,z}$: 原子番号 Z の $z \to z+1$ への Collisional Ionization Rate
$\alpha^{\mathrm{rad}}_{Z,z}$: 原子番号 Z の $z \to z-1$ への Radiative Recombination Rate
$\alpha^{\mathrm{di}}_{Z,z}$: 原子番号 Z の $z \to z-1$ への Dielectronic Recombination Rate

この式を時、各原子番号 Z について $\frac{n_{Z,z}}{n_{\mathrm{H}}}$ を解く。

次に、これで得られる $n_{Z,z}$ と次の式から、Cooling Rate を求める。

$$\frac{dE}{dtdV} = \frac{dE_{\mathrm{B}}}{dtdV} + \sum_{Z,z}\left(\frac{dE_{\mathrm{RR,Z,z}}}{dtdV} + \frac{dE_{\mathrm{DR,Z,z}}}{dtdV} + \sum_{nn'}\frac{dE_{\mathrm{L,Z,z,nn'}}}{dtdV}\right) \tag{7.53}$$

$fracdE_{\mathrm{B}}dtdV$: Thermal Bremss. $10^7 < T(\mathrm{K})$ で Dominate。
$\frac{dE_{\mathrm{RR,Z,z}}}{dtdV}$: Radiative Recombination。 ほとんど効かない。
$\frac{dE_{\mathrm{DR,Z,z}}}{dtdV}$: Dielectronic Recomonbination。 ほとんど効かない。
$\frac{dE_{\mathrm{L,Z,z,nn'}}}{dtdV}$: Line Emiossion
    Permitted: $10^4 < T < 10^7$K で Dominate。
    Forbidden: $T < 10^4$K で Dominate。
    Semi-Forbidden: あまり効かない。

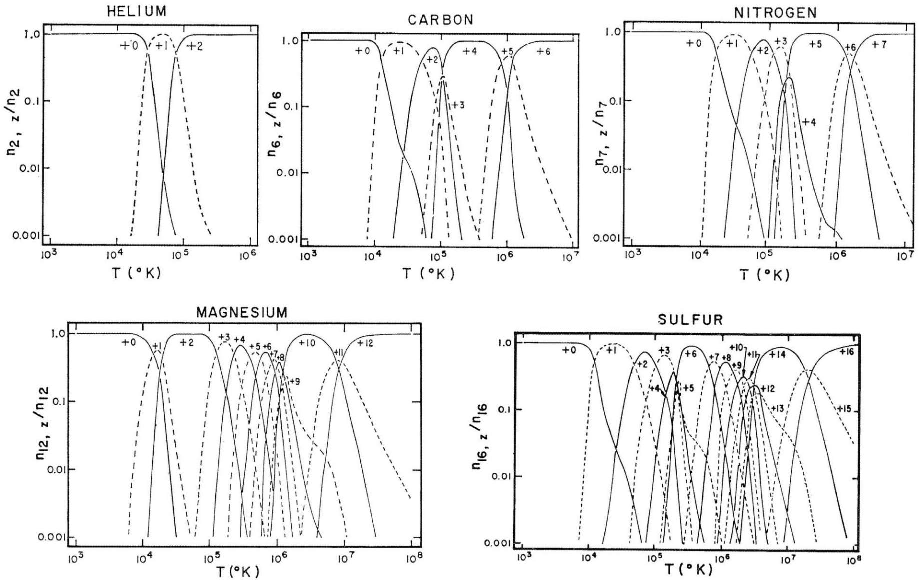


Fig. 1.—Relative ion concentrations for He, C, N, Mg, and S, respectively. The processes of collisional ionization, radiative recombination, and dielectronic recombination are included.

図 7.3: 温度とイオン化度の関係 (Cox and Tucker 1969)。

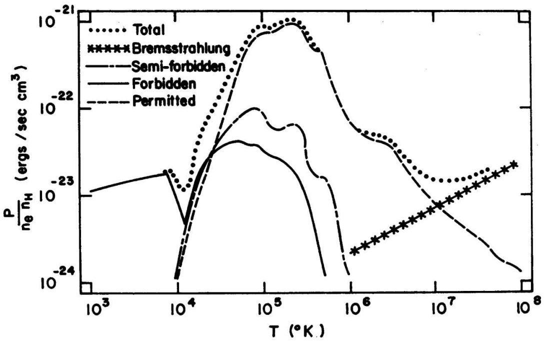


図 7.4: Cooling 係数 (Cox and Daltabuit 1971)。

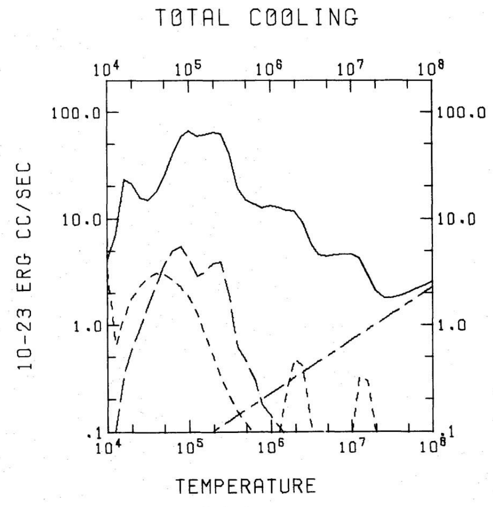


Fig. 1.—Total cooling coefficient (————), forbidden line cooling (– – – – – –), semiforbidden line cooling (— — —), and bremsstrahlung (— – — – —).

図 7.5: Ca, Fe, Ni を含めた Cooling 係数 (Raymond *et al.*1976)。

7.1.4 Thermal Instability

$T > 10^7$K では温度が上がるにつれ、Cooling 係数が上昇する。しかし、$T < 10^7$K では逆に温度が下がるにつれ Cooling 係数が上昇する。よって、温度が下がるほどより冷却時間が短くなる。プラズマの一部が温度が下がった場合、その部分の冷却がより進むことになる。また、圧力平衡を仮定すると密度も上昇するため、さらに急激に冷却が進む。よって、Perturbation が成長し温度の高い部分と低い部分の分離が進む。これを Thermal Instability と呼ぶ。また、$T \sim 10^5$ で最も Cooling 係数が高いため、この温度を持つプラズマは存在しにくい。その一方、Cooling 係数の低い $T < 10^4$ と $T \sim 10^7$ のプラズマは比較的存在しやすいことになる。

7.1.5 メタルアバンダンスの求め方

ThBr の形から電子温度を決定する。強度から $EI = n_e n_p V$ が決まる。

次に輝線強度を測定する。電子温度が分かっているので、イオン化状態や Line Emissivity もわかっているので、$n_e n_{Z,z} V$ が決まり、同じ原子におけるそのイオンの割合も分かっているので $n_e n_Z V$ が計算できる。

$EI = n_e n_p V$ と $n_e n_Z V$ から $A_Z = n_Z / n_p$ が求まる。

7.1.6 等価幅

輝線の強度 counts/sec を、連続成分の強度 counts/sec/keV で割ったものを等価幅と呼ぶ。これは検出器のエネルギー分解能によらず一定の値を取る。

7.2 電子-陽子間が熱平衡に達する時間と電離平衡に達する時間

前の章では、平衡に達した状態について議論した。しかし、実際の宇宙では平衡状態に達していないプラズマも多々観測される。

7.2.1 電子-陽子間が熱平衡に達する時間

導出をやっていると大変なので、詳しくは Spitzer (1962) を読んでもらうとして、答だけ書くことにする。

クーロン散乱による拡散

テスト粒子を静止している散乱体に対して一定の速度である方向から入射させると、クーロン散乱により、徐々にテスト粒子の入射方向の速度は減少すると共に速度分散が大きくなる。一方、入射と 90 度方向の速度が生じその速度分散も大きくなる。やがて速度分散はマックスウェル分布に落ち着き、平衡状態に達する。

w: テスト粒子の速度
m: テスト粒子の質量
m_f: 散乱体粒子の質量
$\Delta w_\parallel$: テスト粒子の入射方向の速度成分の変化量
$< (\Delta w_\parallel)^2 >$: テスト粒子の入射方向の速度成分の分散
$\Delta w_\perp$: テスト粒子の速度の入射 90 度方向の変化量
$< (\Delta w_\perp)^2 >$: テスト粒子の速度の入射 90 度方向の分散

とすると、単位時間あたりの、速度変化は以下の通りである。

$$<\Delta w_{\parallel}> \;=\; -A_D l_f^2\left(1+\frac{m}{m_f}G(l_f w)\right) \tag{7.54}$$

$$<(\Delta w_{\parallel})^2> \;=\; \frac{A_D}{w}G(l_f w) \tag{7.55}$$

$$<(\Delta w_{\perp})^2> \;=\; \frac{A_D}{w}\left[\Phi(l_f w)-G(l_f w)\right] \tag{7.56}$$

ここで、

$$A_D \;=\; \frac{8\pi e^4 n_f Z^2 Z_f^2 \ln\Lambda}{m^2} \quad :\text{拡散定数} \tag{7.57}$$

$$l_f^2 \;=\; \frac{m_f}{2kT_f} \tag{7.58}$$

$$\Phi \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy \tag{7.59}$$

$$G(x) \;=\; \frac{\Phi(x)-x\Phi'(x)}{2x^2}=\begin{cases}\frac{2}{3\sqrt{\pi}}x & :(x\to 0)\\ \frac{1}{2x^2} & :(x\to\infty)\end{cases} \tag{7.60}$$

である。

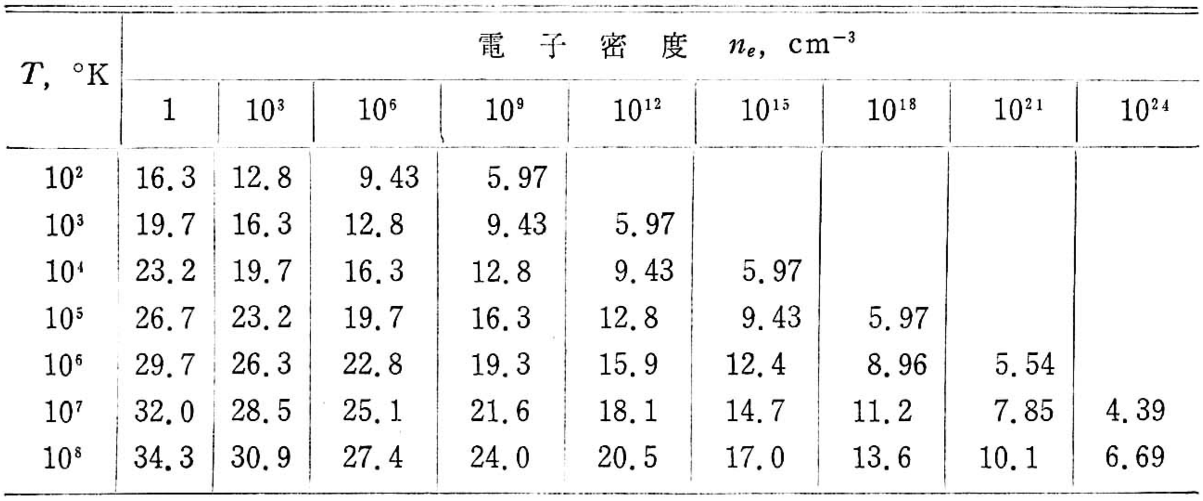
p_0 を、テスト粒子が散乱体粒子に 90 度曲がる時のインパクトパラメータをとして次のように定義する。

$$p_0 \;\equiv\; \frac{ZZ_f e^2}{mw^2} \tag{7.61}$$

クーロン散乱は無限遠まで効いてしまうが、プラズマ中ではデバイ遮蔽により実際にはある距離までで遮断される。テスト粒子 (というか軽い粒子である電子) のデバイ長さを h とし、デバイ長を p_0 で割った全てのテスト粒子に対する平均値を Λ と定義する。すなわち

$$\Lambda \;\equiv\; h/\bar{p}_0=\frac{3}{2ZZ_f e^3}\left(\frac{k^3T^3}{\pi n_e}\right)^{1/2} \tag{7.62}$$

となる。実際には、4×10^5(K) を越えると量子効果が効く。しかし、実際には $\ln\Lambda$ が問題になるのであり、次の表の通りその値は $5\sim35$ の値に入る。



T, °K	電子密度 n_e, cm^{-3}								
	1	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
10^2	16.3	12.8	9.43	5.97					
10^3	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97				
10^4	23.2	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97			
10^5	26.7	23.2	19.7	16.3	12.8	9.43	5.97		
10^6	29.7	26.3	22.8	19.3	15.9	12.4	8.96	5.54	
10^7	32.0	28.5	25.1	21.6	18.1	14.7	11.2	7.85	4.39
10^8	34.3	30.9	27.4	24.0	20.5	17.0	13.6	10.1	6.69

図 7.6: 電子-陽子の場合の $\ln\Lambda$

同種粒子の **Relaxation Time**

Rlaxation Time t_D を以下のように定義する。

$$<(\Delta w_{\perp})^2> t_D \;=\; w^2 \tag{7.63}$$

これは、テスト粒子が 90 度曲がる時間とも考えられる。前の章で示した $<(\Delta w_\perp)^2>$ の式から

$$t_D = \frac{w^3}{A_D\left[\Phi(l_f w) - G(l_f w)\right]} \tag{7.64}$$

$$= \frac{1}{8\pi n_f w p_0^2 (\Phi - G)\ln\Lambda} \tag{7.65}$$

となる。

異種粒子の **Relaxation Time**

既に 2 種類の粒子はそれぞれ別々に熱平衡に達しているとし、それぞれの温度を T と T_f とすると、緩和に要する時間 t_{eq} は、次の方程式を解くことで得られる。

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_f - T}{t_{eq}} \tag{7.66}$$

$$t_{eq} = \frac{3mm_f k^{3/2}}{8(2\pi)^{1/2} n_f Z^2 Z_f^2 e^4 \ln\Lambda} \tag{7.67}$$

$$= 5.87\frac{AA_f}{n_f Z^2 N_f^2 \ln\Lambda}\left(\frac{T}{A} + \frac{T_f}{A_f}\right)^{3/2} \tag{7.68}$$

ここで、A は原子質量単位で割った質量 (A_p, A_f, A_e, A_i も同様)。また、t_{eq} は変数 T と T_f によって決まる係数であり、t_{eq} は T と T_f が近くなった時に長くなることに注意しておく。

平衡へのシナリオ

電子と陽子のみからなるプラズマを考える。

(7.69) t_{ee} = 電子-電子が平衡に達するのに要する時間

(7.70) t_{pp} = 陽子-陽子が平衡に達するのに要する時間

(7.71) t_{ep} = t_{eq} = 電子-陽子が平衡に達するのに要する時間

とする。

(1) 電子と陽子がそれぞれほぼ同じ運動エネルギーを持っている場合、

$$t_{ee} = \frac{11.4A_e^{1/2}T^{3/2}}{nZ^4\ln\Lambda} \tag{7.72}$$

$$t_{pp} = \frac{11.4A_p^{1/2}T^{3/2}}{nZ^4\ln\Lambda} \tag{7.73}$$

$$t_{ep} = \frac{5.87A_pA_e^{-1/2}T^{3/2}}{nZ^4\ln\Lambda} \tag{7.74}$$

となり、

$$t_{ee} : t_{pp} : t_{ep} = 1 : 43 : 1836 \tag{7.75}$$

となる。

(2) 電子と陽子がほぼ同じ速度を持っていた場合 ($w_e = w_p$)。

$$T_p = \frac{A_p}{A_e} T_e \tag{7.76}$$

$$t_{ee} = \frac{11.4 A_e^{1/2} T^{3/2}}{n Z^4 \ln \Lambda} \tag{7.77}$$

$$t_{pp} = \frac{11.4 A_p^{1/2} T^{3/2}}{n Z^4 \ln \Lambda} \tag{7.78}$$

$$t_{ep} = \frac{5.87 A_p A_e^{-1/2} T_p^{3/2}}{n Z^4 \ln \Lambda} \tag{7.79}$$

となり、

$$t_{ee} : t_{pp} : t_{qp} = 1 : 1836^2 : 1836^{5/2} \tag{7.80}$$

となる。

いずれの場合も、電子-電子、陽子-陽子、電子-陽子の順番に平衡に到達していく。

電子-電子と電子-イオンの簡単な表式は Masai (1984) で与えられているので、ここに書いておく。

$$t_{ee} = 4.8 \times 10^5 T_e^{3/2} (n_e \ln \Lambda)^{-1} \tag{7.81}$$

$$t_{ei} = 3.1 \times 10^8 < A_i >< z >^{-2} T_e^{3/2} (n_e \ln \Lambda)^{-1} \tag{7.82}$$

ただし、T_e は (eV)、n_e は (cm^{-3}) を単位とする。$< A_i >$ と $< z >$ はそれぞれ質量数を単位とする平均イオン質量と、Average Ion Charge である。また、X 線を放出するプラズマ温度では

$$\ln \Lambda = 24.8 + \ln(T_e n_e^{-1/2}) \tag{7.83}$$

と近似できる。

7.2.2 イオン化に要する時間

最初電子が既に十分な温度に到達しているが、原子の方は中性であると仮定する。電子の衝突電離により原子はイオン化して行く場合に、イオン化平衡に達する時間 t_{ion} は次のように表せる。

$$t_{\mathrm{ion}} = \sum_{z=Z}^{z_0} (n_e C_{Z,z})^{-1} \tag{7.84}$$

$$n_e t_{\mathrm{ion}} = \sum_{z=Z}^{z_0} (C_{Z,z})^{-1} \tag{7.85}$$

X 線領域で輝線として観測される C, N, O, Ne, Mg, Si, S, Ca, Fe について具体的に計算すると、

$$n_e t_{\mathrm{ion}} = \sum_{z=Z}^{z_0} (C_{Z,z})^{-1} \sim 10^{12} \quad (\mathrm{sec\ cm}^{-3}) \tag{7.86}$$

となる。

電子-電子、電子-イオン、イオン化、それぞれの平衡に達するまでの時間を比較すると、

$$t_{ee} \ll t_{ei} < t_{\mathrm{ion}} \tag{7.87}$$

となる。

各 $n_e t_{\mathrm{ion}}$ に対するイオン化の時間変化の様子を図に示す。

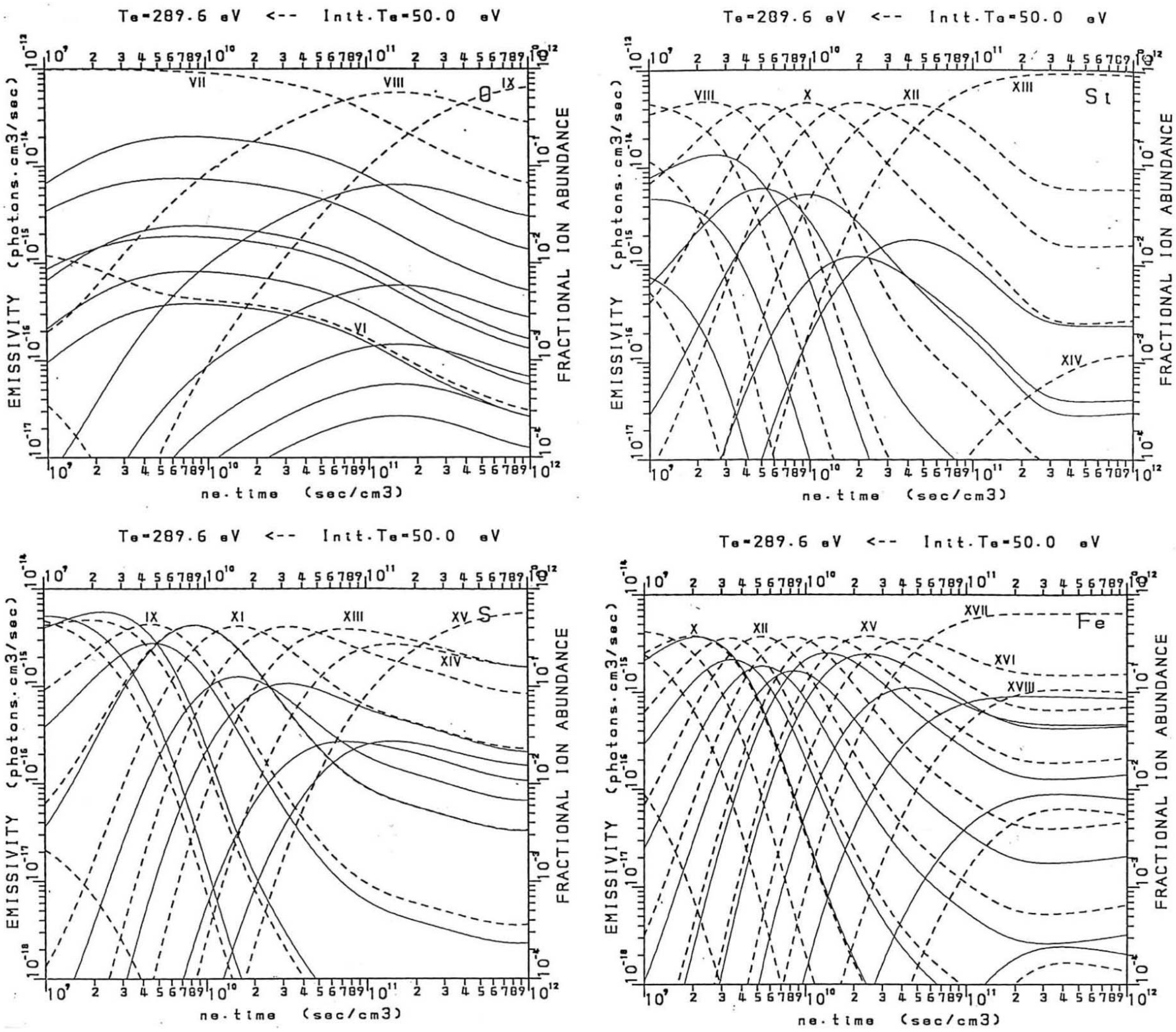


図 7.7: O, Si, S, Fe の $n_e t_{\rm ion}$ に対するイオン化の時間変化 (Masai 1984)。実線は Emissivity, 破線はイオンアバンダンス

7.2.3 超新星残骸におけるイオン化非平衡

若い超新星残骸である Cas A や Tycho SNR の *Einstein* SSS の観測結果をイオン化平衡を解析した所、得られたメタルアバンダンスが超新星での重元素合成の理論予想よりも大きく問題であった。しかし、若い超新星残骸ではイオン化非平衡である可能性が指摘されていた。そこで、「てんま」衛星を使って観測した (Tsunemi *et al.*1986)。その結果、輝線の中心エネルギーがイオン化平衡とずれから、それぞれの元素でのイオン化パラメータを決めた所、いずれも一致した。さらに、イオン化非平衡での Emissivity を仮定し、アバンダンスを求め直した所、超新星の重元素合成モデルと大体一致した。

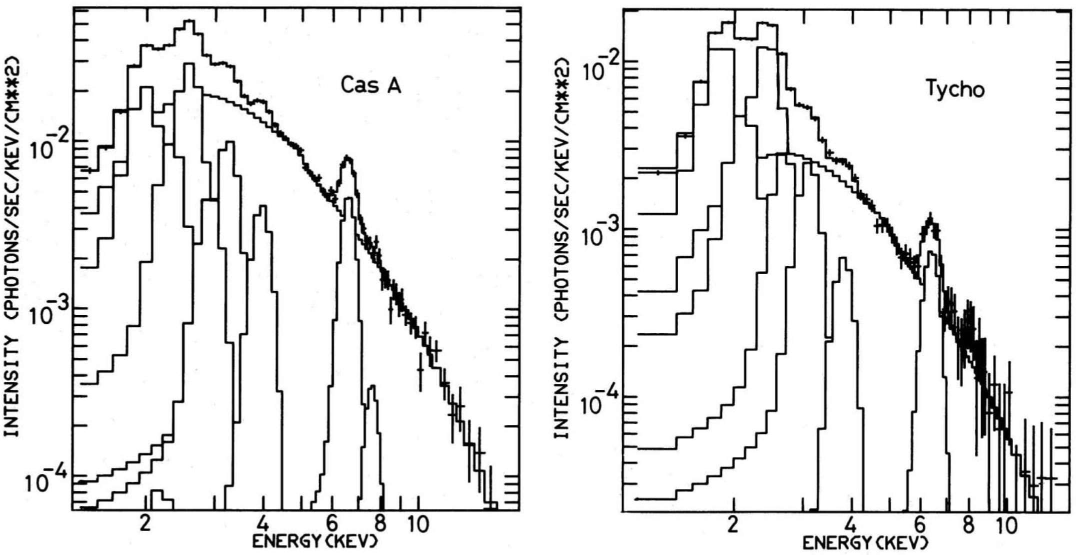


FIG. 1*a* FIG. 1*b*

FIG. 1.—The X-ray spectra for (*a*) Cas A and (*b*) Tycho. The crosses show the pulse height spectra with ± 1 σ statistical error bars obtained with GSPCs on board *Tenma*. Superposed on the data points is the best-fit model spectra folded by the detector response. Each of the best-fit model spectra contains one continuum spectrum and eight emission lines, as also shown by solid histograms for individual components.

図 7.8: 「てんま」によって得られた Cas A と Tycho のスペクトル (Tsunemi etal 1987)

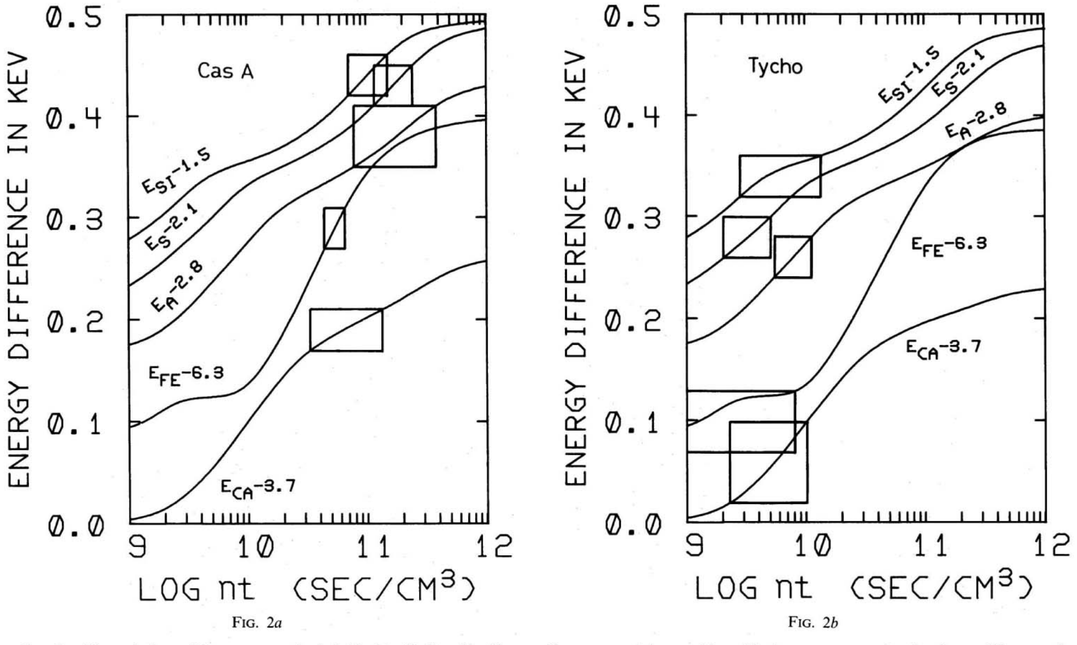


FIG. 2*a* FIG. 2*b*

FIG. 2.—The variations of the mean energies in keV of the Kα lines for silicon, sulfur, argon, calcium, and iron. The boxes correspond to the observed line energies with a confidence level of 90%. The ordinate represents the line energy minus an energy value indicated for each element in the figure. (*a*) Cas A is for T = 3760 eV, and (*b*) Tycho is for T = 2900 eV.

図 7.9: Cas A と Tycho の各元素の輝線中心のイオン化平衡からのずれと、$n_{\rm e}T$ の関係 (Tsunemi etal 1987)

7.3　禁制線を用いてプラズマ密度を求める方法

許容線では、衝突による励起状態から基底状態へ光子の自然放出により落ちる時間が非常に速いので、輝線強度は衝突励起の確率によって決まる。禁制線では励起状態から基底状態へ落ちる時間が長い。

ある原子が、光子を自然放出する確率は、電子密度によらず一定であるのに対し、衝突する確率 (単位時間に衝突する回数) は電子密度に比例する。よって、電子密度が高い場合は電子による衝突する確率が、自然放出を上回る。励起した状態で電子が衝突すると、衝突により基底状態に落ちる。

以上の関係を用いると、許容線と禁制線強度を比較することにより、電子温度のみならず電子密度を求めることができる。

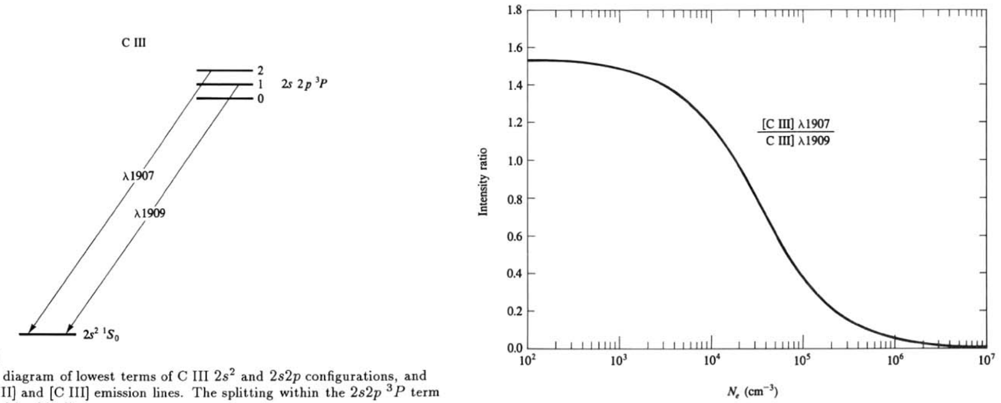


FIGURE 5.4
Energy-level diagram of lowest terms of C III $2s^2$ and $2s2p$ configurations, and resulting C III] and [C III] emission lines. The splitting within the $2s2p\ {}^3P$ term is exaggerated in this diagram.

FIGURE 5.5
Calculated variation of [C III] $\lambda1907$/C III] $\lambda1909$ intensity ratio as function of electron density N_e at $T = 10,000°$ K.

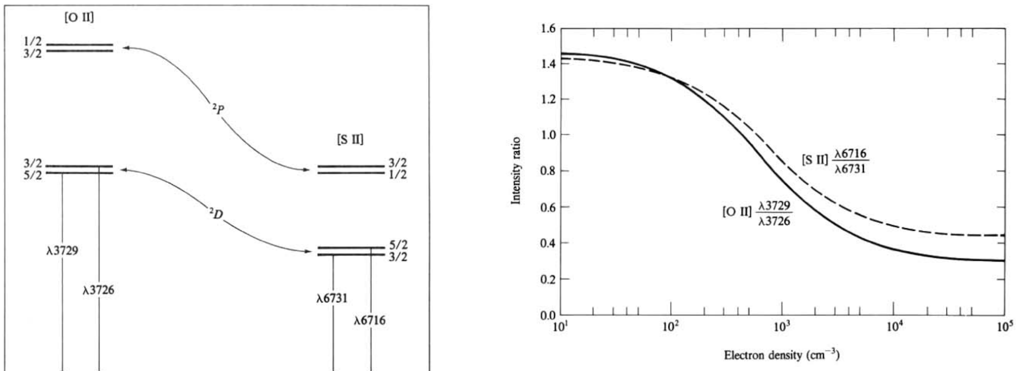


FIGURE 5.2
Energy-level diagrams of the $2p^3$ ground configuration of [O II] and $3p^3$ ground configuration of [S II].

FIGURE 5.3
Calculated variation of [O II] (*solid line*) and [S II] (*dashed line*) intensity ratios as function of N_e at $T = 10,000°$ K. At other temperatures the plotted curves are very nearly correct if the horizontal scale is taken to be $N_e(10^4/T)^{1/2}$.

図 7.10: 禁制線を用いた電子密度の決定 (Osterbrock 1989)

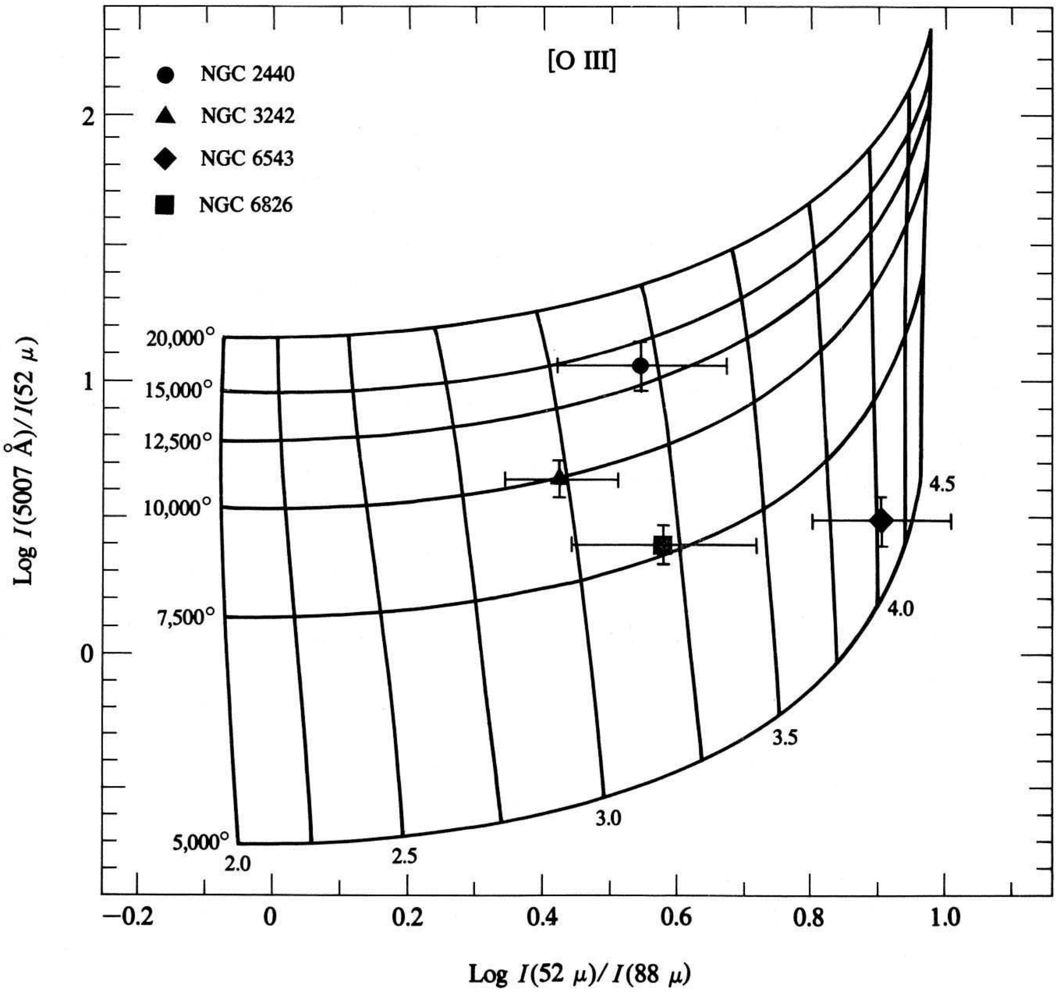


FIGURE 5.6
Calculated variation of [O III] forbidden-line relative-intensity ratios as functions of T(5000° to 20,000° K) and N_e. Observed planetary-nebula ratios plotted with indication of probable errors.

図 7.11: 禁制線を用いた電子密度 (恐らく $\log n_{\rm e}$) と温度の決定 (Osterbrock 1989)。

7.4　光電吸収

光電吸収のエネルギー依存性と、原子番号の依存性を示す。詳しい計算は Rybicki and Lightman (1979), Karzas and Latter (1961) を参照。

$$\sigma_{bf} = \frac{512\pi^7 m_{\mathrm{e}} e^{10} Z^4}{3\sqrt{3} c h^6 n^5} \frac{g(\omega, n, l, Z)}{\omega^3} \tag{7.88}$$

Z は元素番号、ω は吸収される光子の角周波数、n は bound-free する電子の最初の state。l は???。g は bound-free Gaunt factor で、Edge 付近では 20%程度の誤差で 1 である。入射 X 線エネルギーに対して E_{X}^{-3}、元素番号に対して Z^4 の依存性を持つことを覚えておく。

宇宙組成をした冷たいガスに対する吸収断面積が図 7.12 によって与えられている。

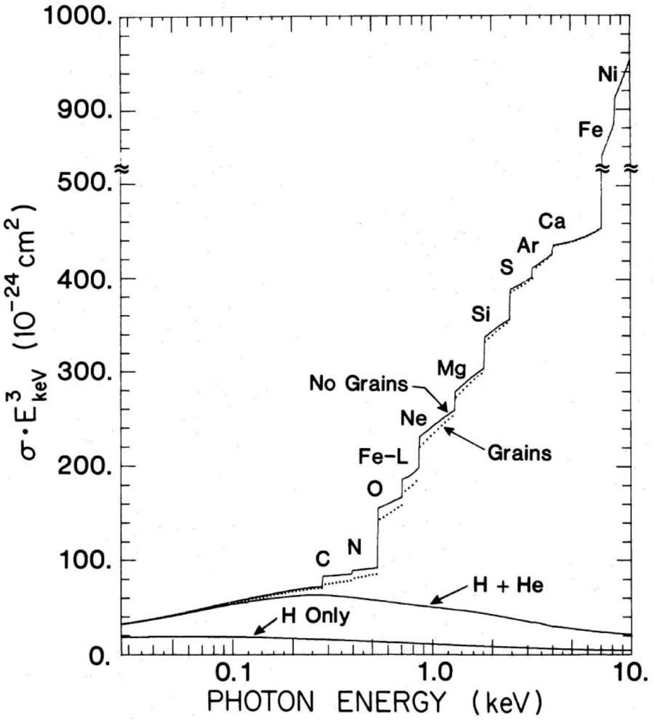


FIG. 1.—Net photoelectric absorption cross section per hydrogen atom as a function of energy, scaled by $(E/1\ \mathrm{keV})^3$ for clarity of presentation. The solid line is for relative abundances given in Table 1, with all elements in the gas phase and in neutral atomic form. The dotted line shows the effect of condensing the fraction of each element indicated in Table 1 into 0.3 μm grains. The contributions of hydrogen and hydrogen plus helium to the total cross section are also shown.

図 7.12: 宇宙組成の場合の吸収係数 (Morison and MaCammon 1983)。

第8章　衝撃波と超新星残骸

8.1　一次元衝撃波

理想気体における一次元の強い衝撃波は、ランダウ=リフシッツ「流体力学 2」§85 で解説されている。また、坂下、池内「宇宙流体力学」では、もっと詳しく解説している (たぶん、坂下、池内「宇宙流体力学」を読むのが一番良いと思う)。

衝撃波が通過する前の物質 (ISM) には添字 1 を、通過した後 (SNR) には添字 2 をつける。衝撃波が通過する前の物質は停止しており、通過すると運動を開始する。しかし、それだと扱いにくいので、衝撃波の静止系で物事を考える。その場合衝撃波面に対し、ISM が衝撃波の伝わる速度で衝撃波面に衝突し、衝撃波面を通過後に速度が遅くなる。

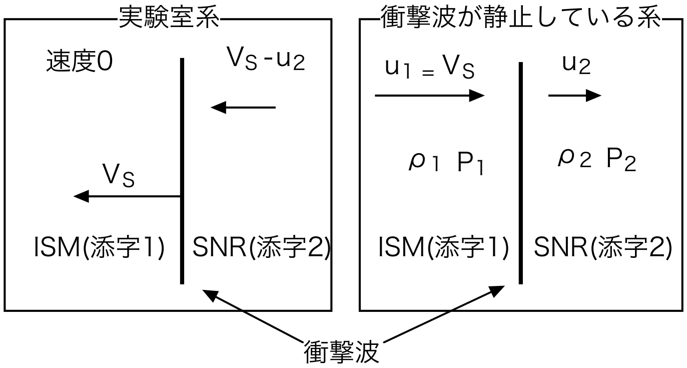


図 8.1: 衝撃波の模式図

衝撃波面の前面での速度 (すなわち衝撃波の伝わる速度)、密度、圧力、温度を u_1、ρ_1、P_1、T_1 とし、後面での速度、密度、圧力、温度を u_2、ρ_2、P_2、T_2 とする。衝撃波面前後の単位質量当たりのエンタルピーを w_1、w_2 とし、断熱指数を γ とする。すると、次の 3 つの保存則が成り立つ。

(8.1) $$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad \text{:質量保存}$$

(8.2) $$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2 \quad \text{:運動量保存}$$

(8.3) $$w_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = w_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \quad \text{:エネルギー保存}$$

さらに、理想気体なので、

(8.4) $$\varepsilon = \frac{P}{\rho}\frac{1}{\gamma - 1}$$

(8.5) $$w = \gamma\varepsilon$$

(8.6) $$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}$$

(8.7)

である。以上の 3 つの式を Rankin=Hugoniot の関係式と呼ぶ。γ は断熱指数で

(8.8) $$\gamma = \left(\frac{d \ln P}{d \ln n}\right)_S = C_P/C_V$$

(8.9) $$= 5/3 \quad \text{(非相対論的理想気体)}$$

(8.10) $$= 4/3 \quad \text{(相対論的理想気体、光子気体)}$$

である。また。$P \propto E$ の場合には

(8.11) $$P = (\gamma - 1)E$$

である。

　よって、エネルギー保存は

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1}{\rho_1}+\frac{1}{2}u_1^2 \quad = \quad \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_2}{\rho_2}+\frac{1}{2}u_2^2 \tag{8.12}$$

となる。この式と、質量保存、運動量保存を合わせると

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \quad = \quad \frac{(\gamma+1)P_1+(\gamma-1)P_2}{(\gamma-1)P_1+(\gamma+1)P_2} \tag{8.13}$$

となる。ここで、強い衝撃波という仮定

$$P_2 \quad \gg \quad P_1 \quad \text{すなわち} \quad T_2 \gg T_1 \tag{8.14}$$

$$P_2 \quad \gg \quad \frac{\gamma+1}{\gamma-1}P_1 \tag{8.15}$$

をつけ、マッハ数 M を

$$M_1 \equiv \frac{u_1}{c_1} \tag{8.16}$$

と定義すると、以上の式から次の関係が得られる (ランダウ=リフシッツ)。

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \quad = \quad \frac{u_1}{u_2}=\frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2} \tag{8.17}$$

$$\frac{P_2}{P_1} \quad = \quad \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma+1}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{8.18}$$

$$\frac{T_2}{T_1} \quad = \quad \frac{\left(2\gamma M_1^2-(\gamma-1)\right)\left((\gamma-1)M_1^2+2\right)}{(\gamma+1)^2 M_1} \tag{8.19}$$

$$M_2^2 \quad = \quad \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)} \tag{8.20}$$

銀河団では、重力エネルギー以外に、銀河風や cD 銀河での AGN からのバブルによる衝撃波で加熱が行なわれたどうかを考えるのに、エントロピーを用いたスタディが使われる。衝撃波が通ることによるエントロピー発生については、坂下、池内「宇宙流体力学」p43、Binney et al. (2002) (Astro-ph/0207111) の Appendix などを参照 (いずれ追記する)。

　さらに、衝撃波の速度が ISM の音速よりも非常に速いという仮定、

$$M_1 = \frac{u_1}{c_1} \quad \gg \quad 1 \tag{8.21}$$

をつけると、次の様に書ける。

$$\rho_2 \quad = \quad \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1 \tag{8.22}$$

$$u_1^2 \quad = \quad \frac{1}{2}(\gamma+1)\frac{P_2}{\rho_1} \tag{8.23}$$

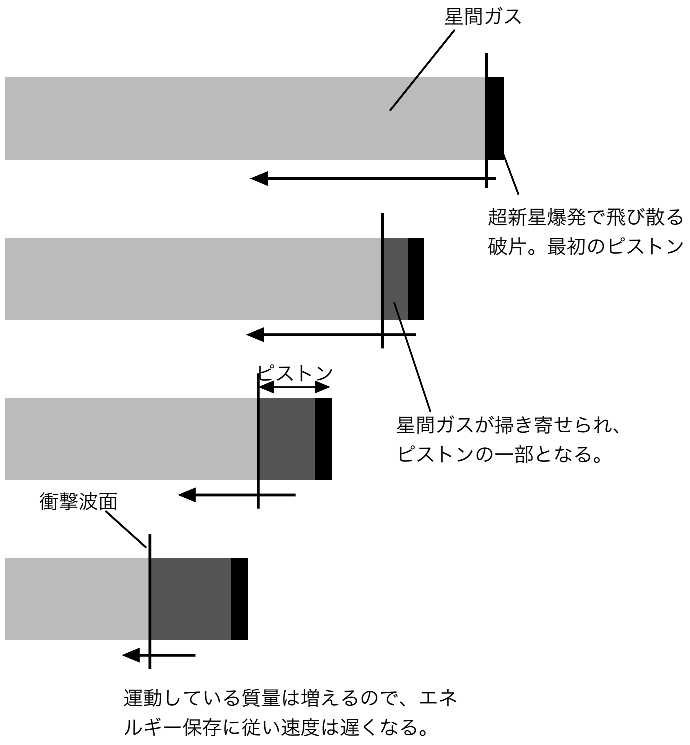
$$u_2^2 \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma+1}\frac{P_2}{\rho_1} \tag{8.24}$$

$$u_2 \quad = \quad \frac{\gamma-1}{\gamma+1}u_1 \tag{8.25}$$

$$P_2 \quad = \quad \frac{2\rho_1 u_1^2}{\gamma+1} \tag{8.26}$$

$$T_2 \quad = \quad \frac{m}{k}\frac{P_2}{\rho_2}=\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\frac{m}{k}u_1^2 \tag{8.27}$$

m は平均分子質量なので、衝撃波により温度が上昇し冷たい物質がプラズマ化した場合には注意すること。$\gamma = 5/3$ の場合、密度は衝撃波通過後に 4 倍になり、衝撃波面に対する相対速度は $1/4$ となる。ISM が静止した系では、衝撃波通過後に、物質は衝撃波の速度の $3/4$ 倍の速度で衝撃波の進む方向に動き始める。


星間ガス
超新星爆発で飛び散る
破片。最初のピストン
ピストン
星間ガスが掃き寄せられ、
ピストンの一部となる。
衝撃波面
運動している質量は増えるので、エネ
ルギー保存に従い速度は遅くなる。

星間ガスが掃き寄せられ一体となり、ピストンを形成していく。

図 8.2: 衝撃波の成長

8.2 球対称衝撃波

8.2.1 一次元衝撃波と爆発によって生ずる球対称衝撃波の違い

一次元衝撃波と爆発によって生ずる球対称衝撃波の違いは、基本的には定常状態か、成長する衝撃波面かどうかの違いである。具体的には、

1) 爆発によって生ずる球対称衝撃波はだんだん遅くなる。
2) 衝撃波内側の圧力は無視できない。遅くなっていった場合に、後ろの圧力がシェルを押し、加速を行う。

はっきりいって厳密解をそのまま直観的に理解するのは容易ではない。そこでここではいつもとは逆に、まず厳密解を示し、次に簡単なモデルを示すことで厳密解がどういう物理を反映しているかを見ることにする。

8.2.2 厳密解 (Sedov 解、Sedov-Taylor 解)

厳密な解は、Sedov, Taylor, Neumamnn の3人がそれぞれ独立に求めたので、Sedov 解又は、Sedov-Taylor 解と呼ばれる。

厳密解は

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P = 0 \ : \text{運動方程式} \tag{8.28}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho\cdot\vec{v}\right) = 0 \ : \text{連続の式} \tag{8.29}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\nabla\right)s = 0, \quad \frac{\partial}{\partial}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right) + \vec{v}\cdot\nabla\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right) \ : \text{エネルギーの式} \tag{8.30}$$

を球対称を仮定し極座標系に書き換えた

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \ : \text{運動方程式} \tag{8.31}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0 \ : \text{連続の式} \tag{8.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right) + v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho^{\gamma}}\right) = 0 \ : \text{エネルギーの式} \tag{8.33}$$

と、全エネルギー E_0 が保存されるという条件から解かれる。上記の偏微分方程式は

$$\xi = \left(\frac{\rho_0}{E_0}\right)^{1/5}\frac{r}{t^{2/5}} \tag{8.34}$$

というただ一つの無次元の変数で記述することができる。よって、この偏微分方程式は常微分方程式に変換することができる。この変換を相似変換と呼び、その解は相似解と呼ばれる。すなわち、任意の時刻における衝撃波面の半径 $R(t)$ は、ξ のある定数 ξ_0 によって次のように与えられると考えることができる。ξ_0 は、前の章でやったと同じく全エネルギーが保存されるという条件により後で決まる。

この相似変換を解くことで衝撃波面の半径と衝撃波の速度が次のように得られる。

$$R(t) = \xi_0\left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5} \tag{8.35}$$

$$V_{\mathrm{s}}(t) = \frac{2}{5}\xi_0\left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5}\frac{R(t)}{t} \tag{8.36}$$

さらに、$\xi = \xi_0$ が衝撃波面を表し、その比である λ が SNR の内側の構造を決定する。

$$\lambda = \frac{\xi}{\xi_0} = \frac{r}{R} \tag{8.37}$$

$$= \frac{1}{\xi_0}\left(\frac{\rho_0}{E_0}\right)^{1/5} r t^{-2/5} \tag{8.38}$$

λ を変数とする無次元の関数を使うと、SNR の内部構造 $v(r,t)$、$\rho(r,t)$、$P(r,t)$ が完全に解ける。

$$v(r,t) = \frac{r}{t}V(\lambda) \tag{8.39}$$

$$\rho(r,t) = \rho_0\Omega(\lambda) \tag{8.40}$$

$$P(r,t) = \rho_0\frac{r^2}{t^2}\Pi(\lambda) \tag{8.41}$$

以上により、$\lambda = 1$ での各値が決まったときに、それより内側の任意の場所の値が計算できる。ここまでは $\lambda = 1$ が衝撃波面であろうが無かろうが関係なく成立する。

一方 $\lambda = 1$ が衝撃波面だと思うと、一次元衝撃波の理論から $\lambda = 1$ での各値を星間物質の値と関係づけることができる。すなわち Rankin=Hugoniot の関係から

$$V(1) = \frac{2}{\gamma+1}\delta \tag{8.42}$$

$$\Omega(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tag{8.43}$$

$$\Pi(1) = \frac{2}{\gamma+1}\delta^2 \tag{8.44}$$

$$\delta = \frac{2}{5} \tag{8.45}$$

と (外から) 決めることができる。$\gamma = 5/3$ の場合、衝撃波面での密度は星間物質の 4 倍になっている。ξ_0 などを表に、$\lambda = 1$ での値で規格化した、超新星残骸内部の速度、密度、圧力分布を図 8.4 に与える。

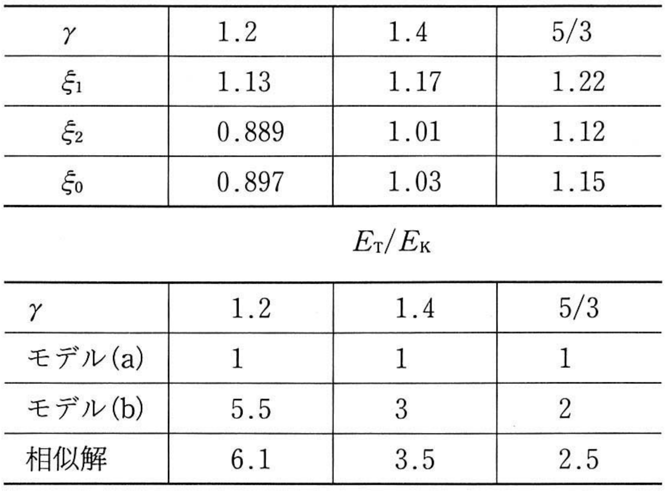
さらに、衝撃波面の後ろの圧力 $P_1(R,t)$、温度 $T_1(R,t)$ は以下のように与えられる。

$$P_1(R,t) = \frac{8}{25}\frac{\rho_0}{\gamma+1}\xi_0^2\left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{2/5}t^{-6/5} \tag{8.46}$$

$$T_1(R,t) = \left(\frac{\mu m_{\mathrm{H}}}{k}\right)\frac{8}{25}\frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^2}\xi_0^2\left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{2/5}t^{-6/5} \tag{8.47}$$

ある時刻 t のある半径 r での物理パラメータを知る具体的手順は次の通り。まず衝撃波面のすぐ後ろの値を求める。次に、求めたい場所 r と衝撃波面の半径 R の比である $\lambda = r/R$ を求め、図 8.4 と、衝撃波面 R における各パラメータの値と、求めたい場所での値の比を知る。最終的にその比を用いて、求めたい場所の値を求める。

上では一様な ISM 中での超新星爆発を考えたが、超新星になる前の星が進化する時に様々な形で放出する物質の中を衝撃波が伝わると考えられている。よって、CSM は $\rho \propto r^{-n}$ の物質分布をしているはずである。これの解は Chevalier (1982) に与えられている。

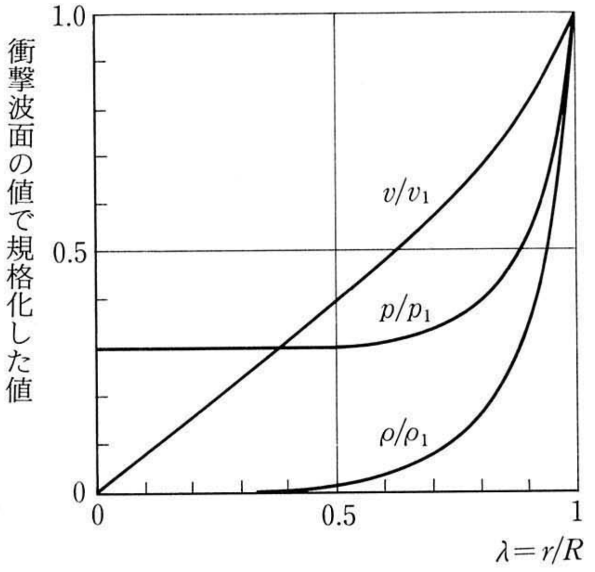


γ	1.2	1.4	5/3
ξ_1	1.13	1.17	1.22
ξ_2	0.889	1.01	1.12
ξ_0	0.897	1.03	1.15

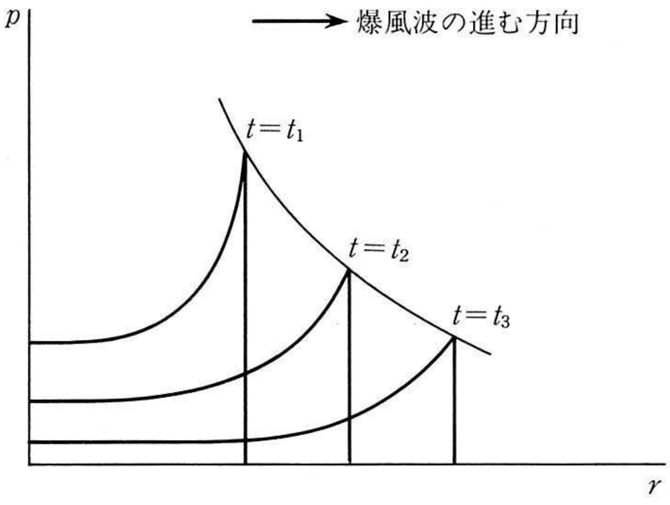
$E_{\mathrm{T}}/E_{\mathrm{K}}$

γ	1.2	1.4	5/3
モデル(a)	1	1	1
モデル(b)	5.5	3	2
相似解	6.1	3.5	2.5

図 8.3: ξ、エネルギー配分



相似解による爆風波内部の構造



圧力分布の時間発展

図 8.4: Sedov 解での、$\lambda = 1$ での値で規格化した速度、密度、圧力の超新星残骸内部構造 (上) 圧力分布の時間発展 (下)。

セドフ解をもう少し使いやすくした式を下に与える。

$$R(t) = 12.5 \left(\frac{t}{10^4 \mathrm{yr}}\right)^{2/5} \left(\frac{E}{10^{51} \mathrm{ergs}}\right)^{1/5} \left(\frac{n_0}{1 \mathrm{cm}^{-3}}\right)^{-1/5} [\mathrm{pc}] \tag{8.48}$$

$$V_{\mathrm{s}}(t) = 490 \left(\frac{t}{10^4 \mathrm{yr}}\right)^{-3/5} \left(\frac{E}{10^{51} \mathrm{ergs}}\right)^{1/5} \left(\frac{n_0}{1 \mathrm{cm}^{-3}}\right)^{-1/5} [\mathrm{km\ sec}^{-1}] \tag{8.49}$$

$$T_1(t) = 3.34 \times 10^6 \left(\frac{t}{10^4 \mathrm{yr}}\right)^{-6/5} \left(\frac{E}{10^{51} \mathrm{ergs}}\right)^{2/5} \left(\frac{n_0}{1 \mathrm{cm}^{-3}}\right)^{-2/5} [\mathrm{K}] \tag{8.50}$$

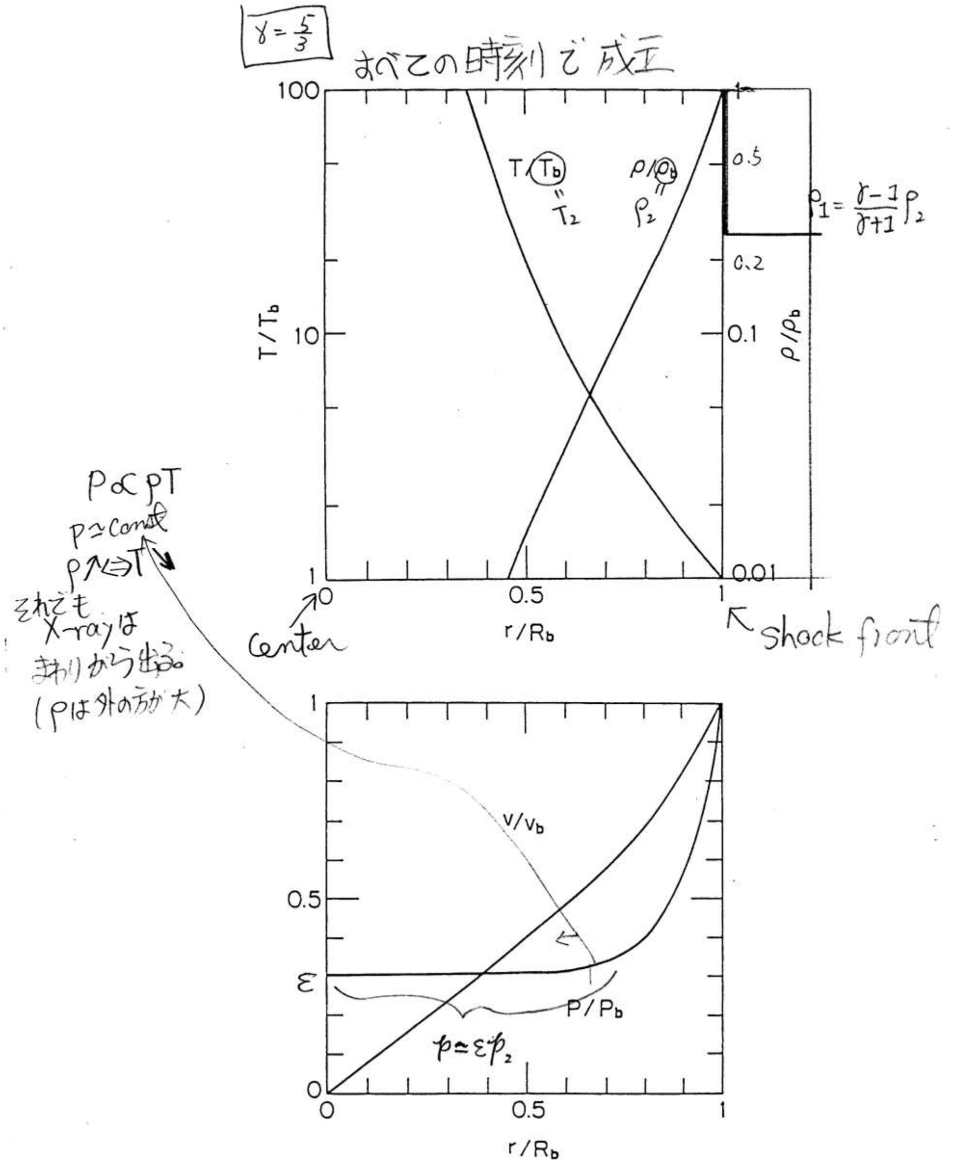


図 8.5: Sedov 解での、$\lambda = 1$ での値で規格化した各パラメータの SNR の内部構造 (篠田君の井上ゼミにあった図だが、出展が不明)。

8.2.3　簡単なモデル

坂下=池内「宇宙流体力学」p105の点源爆発の簡単なモデル(b)を紹介する。
全エネルギーE_0の爆発により生じた衝撃波が、密度ρ_0、圧力P_0のISMを伝わることを考える。衝撃波の速度をV_s、衝撃波面の半径をRとし衝撃波により掃き与せられたシェルの厚みをΔrとし、その中では密度は一定であり(これは厳密には正しくない)ρ_1とする。シェルの質量をM、速度をv_1、圧力をP_1とする。さらにシェルの内側領域の圧力をP_Eとする。

得られる全ての物理量は時刻t、ISMの密度と圧力ρ、P_0と爆発のエネルギーE_0の4つのみで決まる。3つの式であるRankin=Hugoniotでは不十分で、さらに4つ目の式である全エネルギー保存、という条件を使うことになる。これはSedov解の場合も全く同じ。

Rankin=Hugoniotの関係は次のように書き換えられる。

$$\rho_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0 \tag{8.51}$$

$$P_1 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 V_\mathrm{s}^2 \tag{8.52}$$

$$v_1 = \frac{2}{\gamma+1}V_\mathrm{s} \tag{8.53}$$

衝撃波により半径Rに元々あったISMが掃き与せられ、シェルを形成するので

$$\frac{4\pi}{3}R^3\rho_0 = 4\pi R^2\Delta r\rho_1 \tag{8.54}$$

$$\Delta r = \frac{R(\gamma-1)}{3(\gamma+1)} \tag{8.55}$$

となる。$\gamma = 5/3$では、$\Delta r/R = 1/12$でありRに対して十分薄い。

衝撃波自体はエネルギーを持たない(面であり物質ではないので当たり前)。衝撃波は、最初、爆発物質が超高温プラズマとなり、これの持つ非常に高い圧力が、その外側の物質を後ろから押すことにより生ずる。また、ISMの温度は非常に低く、圧力は無視できるとすると、シェルに関する運動方程式

$$\frac{d}{dt}(Mv_1) = 4\pi R^2 P_\mathrm{E} = 4\pi R^2\alpha P_1 \tag{8.56}$$

(8.57)

が得られる。αは$P_\mathrm{E} = \alpha P_1$の定数であり、実際の値は後で決まる。Rankin=Hugoniotの関係を使い、v_1、P_1をρ_0、V_sで表し、$M = (4\pi/3)R^3\rho_0$であることに注意すると、

$$\frac{d}{dt}(R^3V_\mathrm{s}) = 3\alpha R^2V_\mathrm{s}^2 \tag{8.58}$$

となる。$V_\mathrm{s} = dR/dt$なので、

$$V_\mathrm{s} = AR^{-3(1-\alpha)} \tag{8.59}$$

となる。Aは積分定数であり、後で決まる。

αとAは、エネルギー保存則により決まる。シェルの運動エネルギーと内部エネルギーをそれぞれE_K、E_Tとすると、

$$E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}Mv_1^2 \tag{8.60}$$

$$E_\mathrm{T} = \frac{\alpha P_1}{\gamma-1}\frac{4\pi}{3}R^3 \tag{8.61}$$

となる。よって、全エネルギーE_0は

$$E_0 = E_\mathrm{K} + E_\mathrm{T} \tag{8.62}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\rho_0 A^2\left[\frac{2\alpha}{\gamma^2-1} + \frac{2}{(\gamma+1)^2}\right]R^{3(2\alpha-1)} \tag{8.63}$$

となる。これはコンスタントにならなければならないので、その結果 α と A が次のように決まる。

$$\alpha = 1/2 \tag{8.64}$$

$$A = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{(3\gamma-1)}\right)^{1/2}\left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{1/2} \tag{8.65}$$

その結果、以下のように V_s、R の時間発展が決まる。また、上に示した書き直した Rankin=Hugoniot の関係に代入することで、圧力 P_1、v_1 も決まる。

$$V_\mathrm{s} = AR^{-3/2} \tag{8.66}$$

$$R = \xi_2\left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5} \tag{8.67}$$

$$\xi_2 = \left(\frac{75(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{16\pi(3\gamma-1)}\right)^{1/5} \tag{8.68}$$

全エネルギーの分配は

$$E_\mathrm{T}/E_\mathrm{K} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\alpha \tag{8.69}$$

$$= 2 \quad (\leftarrow \alpha = 1/2, \gamma = 5/3) \tag{8.70}$$

となる。

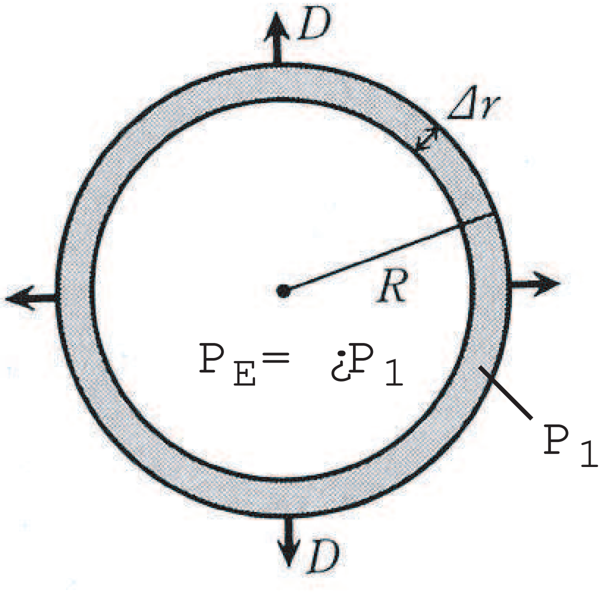


図 8.6: シェルの厚みを考慮した SNR の簡単なモデル

8.2.4 Reverse Shock

まだ未完成: McKee ApJ 188, 335, (1974) を読む。

8.3 超新星残骸の進化

超新星残骸は 1) 自由膨張段階、2) Sedov 段階、3) 放射冷却段階、4) 圧力駆動雪かき段階、5) 運動量保存雪かき段階、を経る。

1) 自由膨張段階

超新星を起こした星の ejecta 質量 $M_{\rm ejecta}$ と、はき寄せられた ISM の質量 $M_{\rm swept}$ を比較し、$M_{\rm ejecta} > M_{\rm swept}$ である期間。密度 n_0 で爆発した超新星残骸が、次の Sedov 段階に入る時刻と半径を t_F、R_F とすると、$V_{ej} = 10^4{\rm km/s}$ の場合

$$t_F = 2 \times 10^2 \left(\frac{M_{ej}}{M_\odot}\right)^{1/3} \left(\frac{n_0}{1{\rm cm}^{-3}}\right)^{-1/3} {\rm yr} \tag{8.71}$$

$$R_F = 2 \left(\frac{M_{ej}}{M_\odot}\right)^{1/3} \left(\frac{n_0}{1{\rm cm}^{-3}}\right)^{-1/3} {\rm pc} \tag{8.72}$$

となる。つまり $\sim 10^2{\rm yr}$ 程度で次の段階へはいる。

2) Sedov 段階

$M_{\rm ejecta} < M_{\rm swept}$ の期間。

$$t_r = 2.7 \times 10^4 \left(\frac{E_{51}}{n_0}\right)^{15/14} n_0^{-5/14} {\rm yr} \tag{8.73}$$

で次の段階へはいる。

3) 放射冷却段階

密度の高いシェルの温度の断熱膨張による減少よりも、放射による冷却が効く時代。膨張速度が ISM の固有運動である $\sim 10{\rm km/s}$ に近付くと次の段階に入る。

4) 圧力駆動雪かき段階

放射により密度の高いシェルは既に冷えているが、より内部の密度が低い領域は、まだ温度が高く圧力が高い。よって、その圧力により外側を押しながら膨張する段階。

5) 運動量保存雪かき段階

シェルに残った運動量により膨張する段階。

8.3.1 セドフフェーズ超新星残骸のパラメータを観測で決める

距離が分かっている場合、E_0 を仮定する場合、n_eT_e を観測で決める場合、n_0 を仮定する場合など、それぞれの時で、観測により超新星残骸のパラメータがどう決められるかをまとめる。

セドフ解は爆発エネルギー E、爆発時の ISM の密度 n_0 を決めれば、時刻 t での状態が全て決まる。つまり、未知数は 3 つである。

一方、SNR までの距離が分かっている場合、スペクトル、イメージング観測から直接求まるのは、SNR の半径 R、温度 T_1、Emission Measure $n_1^2 V$ である。n_1 は、超新星残骸の中での密度であり、ISM の密度 n_0 とは違うことに注意。Emission Measure から密度を知るためには光っている領域の体積が必要で、精密なイメージング観測が可能であれば体積を求めるのは不可能ではないが、ここではそこまでは無理だと考える。また、温度も全体が決まっているだけとする。

その場合、セドフの厳密解と簡単なモデルの両方をミックスした形でパラメータを求める。

まず、セドフの厳密解から、

$$R = 12.5\left(\frac{t}{10^4\mathrm{yr}}\right)^{2/5}\left(\frac{E}{10^{51}\mathrm{ergs}}\right)^{1/5}\left(\frac{n_0}{1\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{-1/5}[\mathrm{pc}] \tag{8.74}$$

$$T_1 = 3.34\times 10^6\left(\frac{t}{10^4\mathrm{yr}}\right)^{-6/5}\left(\frac{E}{10^{51}\mathrm{ergs}}\right)^{2/5}\left(\frac{n_0}{1\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{-2/5}[\mathrm{K}] \tag{8.75}$$

次に簡単なモデルから、球殻の厚みが $\gamma = 5/3$ では、$\Delta r/R = 1/12$ であることを利用し、

$$EM = (n_1^2 V) = n_1^2\left(4\pi R^2\frac{R}{12}\right) \tag{8.76}$$

を得る。さらに、強い衝撃波であるから

$$n_1 = 4n_0 \tag{8.77}$$

である。この内、観測的に決められるのが EM、R、T である。一方、未知数は n_0、n_1、t、E であり、式は 4 つなので完全に求めることができる。

距離が不定の場合は、超新星爆発のエネルギーは 10^{51}(ergs) と仮定して、距離 D を含む他のパラメータを求めることが良く行なわれる。

観測的にもう一つ、輝線の中心エネルギーからイオン化パラメータ nt を決めることができるが、他の観測値に比べてイオン化パラメータの観測エラーは大きいので参考に使う程度であるのが一般的である。そもそもイオン化パラメータ nt の t は光っている領域が加熱されてからの時刻であり、超新星爆発からの経過時間とは必ずしも一致しないので、使って良いかどうかも怪しい。

8.3.2 現実に観測される超新星残骸

Cas A を例に、X 線、電波、光の絵を示す。

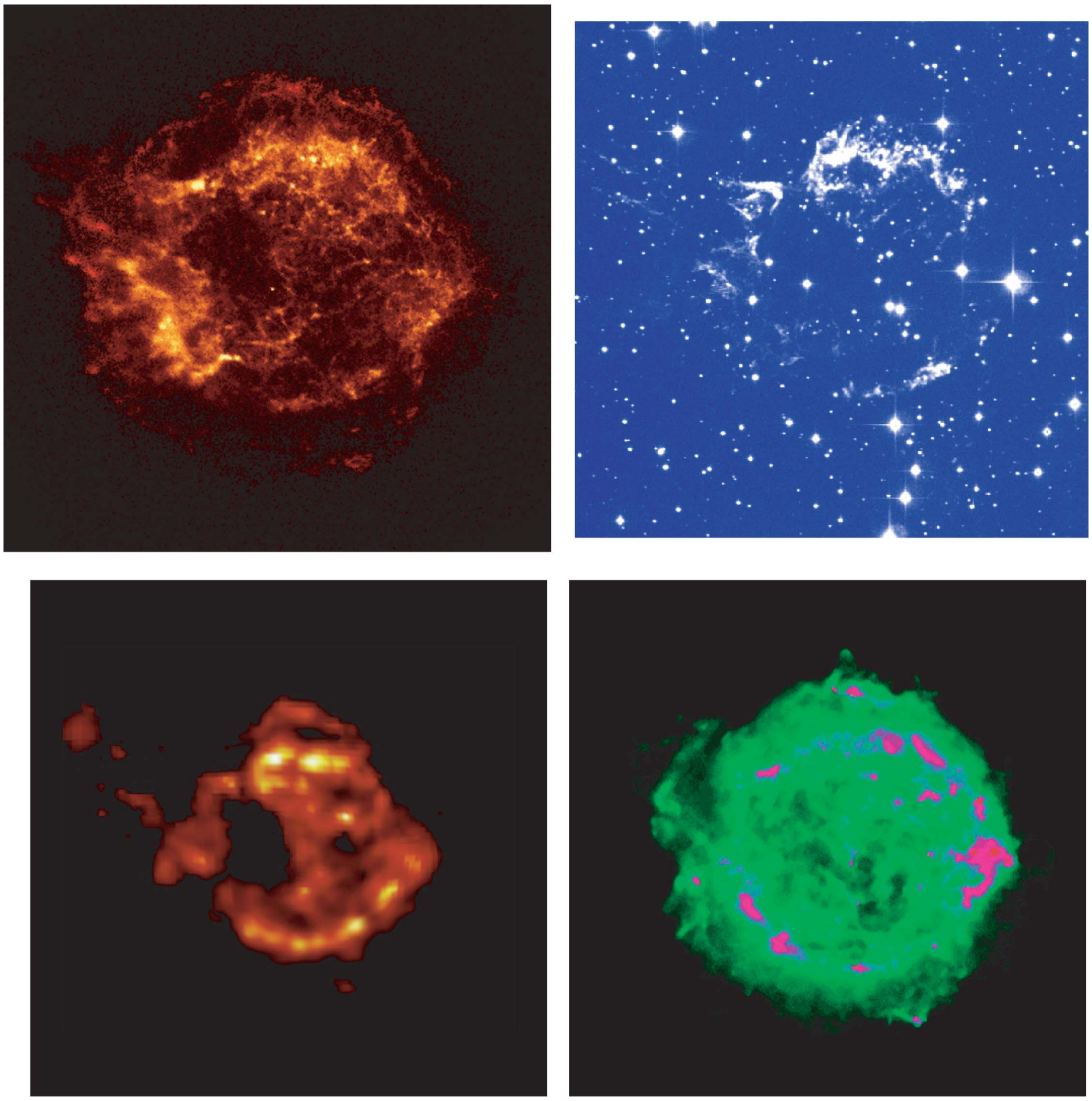


図 8.7: X 線 (左上、Chandra)、光学 (右上、MDM)、赤外 (左下、ISO)、電波 (右下、VLA) での Cas A のイメージ。

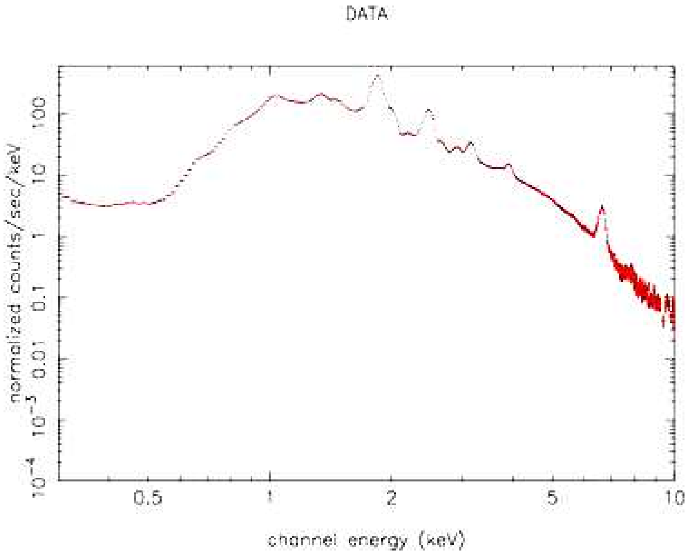


図 8.8: Cas A 全体の X 線スペクトル (Chandra)

第9章　非熱的宇宙 – The Extreme Universe – の発見

X線などの高エネルギー観測により高温プラズマが発見され、従来の冷たい宇宙観は書き換えられた。これを”The Hot Universe” と呼ぼう。これは、基本的には重力によって得られたエネルギーが準静的な平衡状態に落ちた時の状態である。重力がエネルギー源である以上、粒子エネルギーは重力で得られるエネルギーを越えることはできない。

最大のエネルギーを得られる重力系はもちろんブラックホールであり、その最大エネルギーは静止質量の1/2であった。すなわち、

$$E\mathrm{p} \quad < \quad \frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}c^2 = \frac{1}{2}938\mathrm{MeV} \tag{9.1}$$

である。つまり、”Hot Universe” では$kT \sim 500\mathrm{MeV}$を越えることはないのである。

しかし実際には、超新星残骸でのシンクロトロンX線やコンプトンガンマ線、高速回転するブラックホールから放射される鋭く絞られた宇宙ジェット、そして宇宙線の観測からそれをはるかに越える超高エネルギー粒子を持つ粒子が次々発見された。これは重力では説明できない。

これは、大多数の粒子が持つエネルギーを少数の粒子に集中させることによる。そのメカニズムは磁場と運動による加速メカニズムが働いているものと考えられる。これを我々は、21世紀の宇宙観”The Extreme Universe” と呼びたい。

これより以下の章では、その非熱的宇宙 – The Extreme Universe – を述べて行こう。

(地上の加速器の種類や効率の紹介、宇宙の加速器としてのパルサー、SNR、BLAZARなどの紹介と可能なら種類分けを書く)

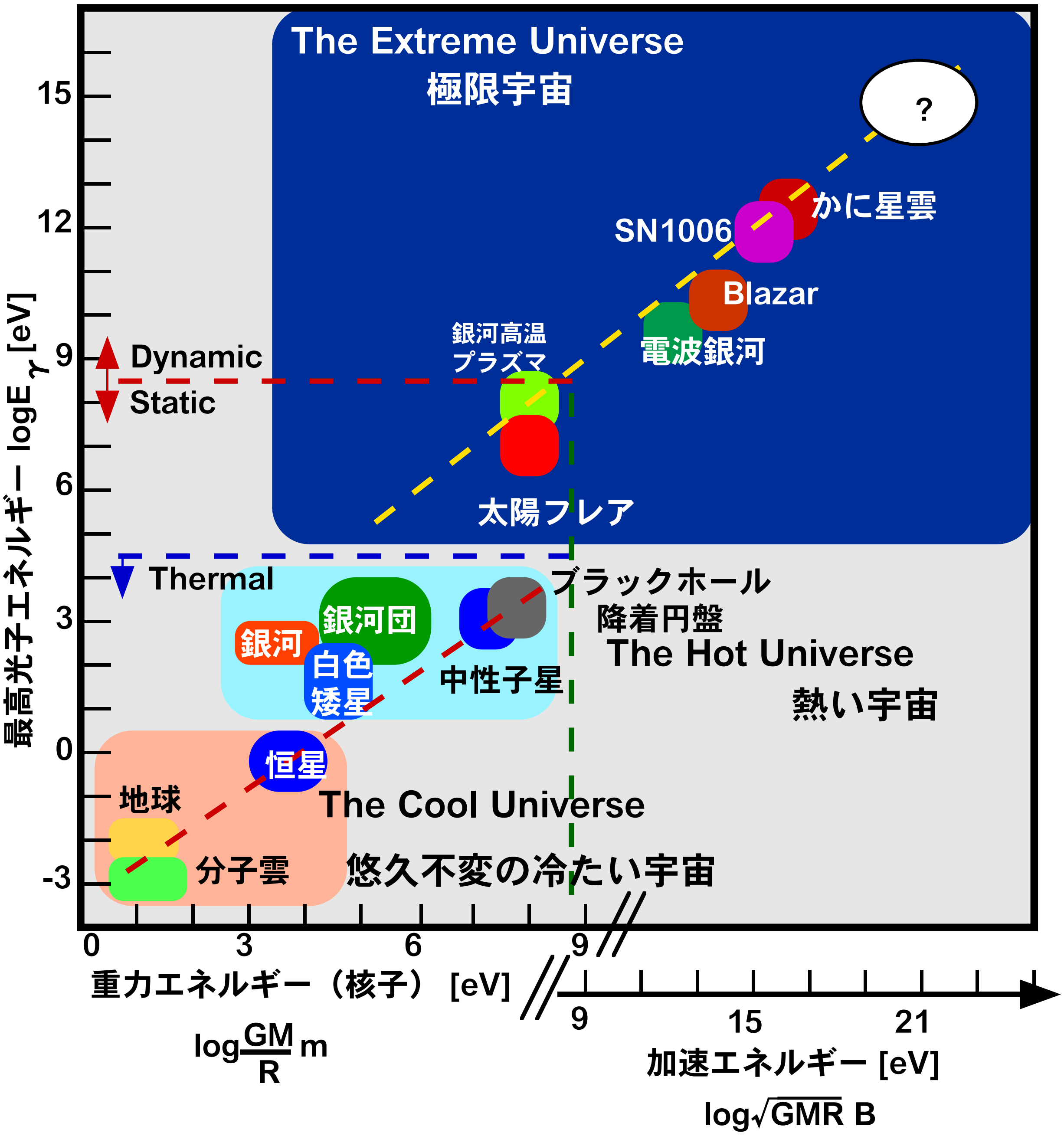
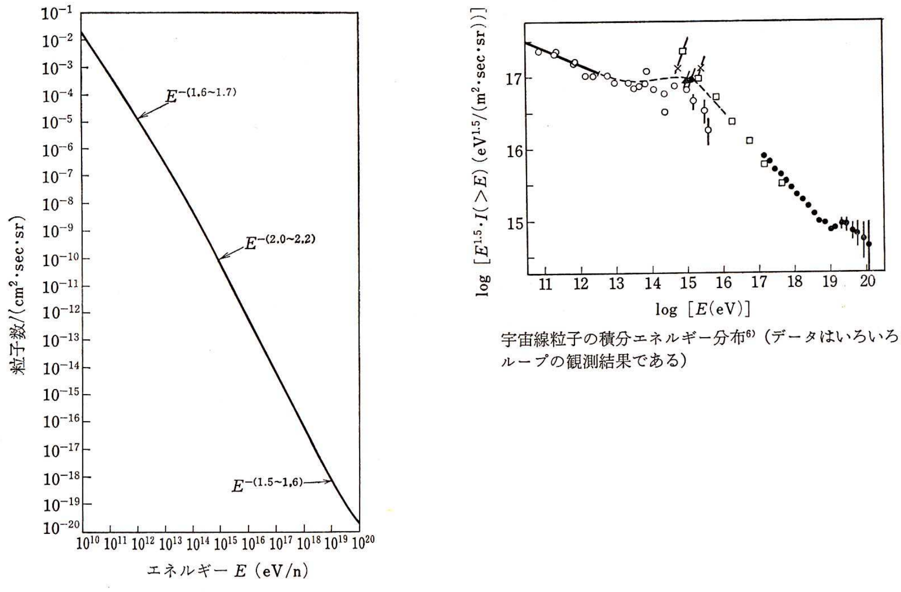


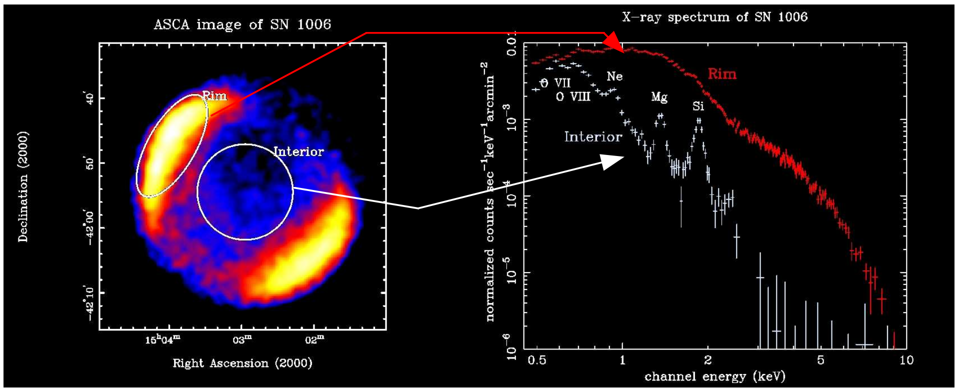
図 9.1: 熱的宇宙と非熱的宇宙



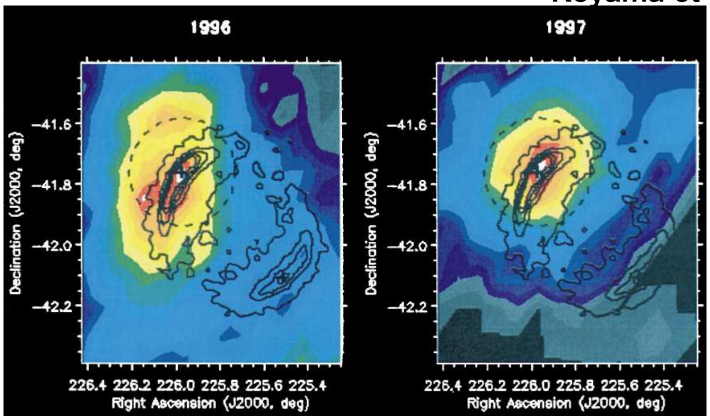
宇宙線粒子全成分の積分エネルギー分布

宇宙線粒子の積分エネルギー分布6) (データはいろいろなグループの観測結果である)

図 9.2: 宇宙線の積分スペクトル。スペクトルは I(> E) の形で書いてある。



Koyama et al. (1995)



1996
1997
-41.6
-41.8
-42.0
-42.2
Declination (J2000, deg)
226.4 226.2 226.0 225.8 225.6 225.4
Right Ascension (J2000, deg)

Tanimori et al. (1998)

図 9.3: SN1006 の X 線観測と TeV ガンマ線観測

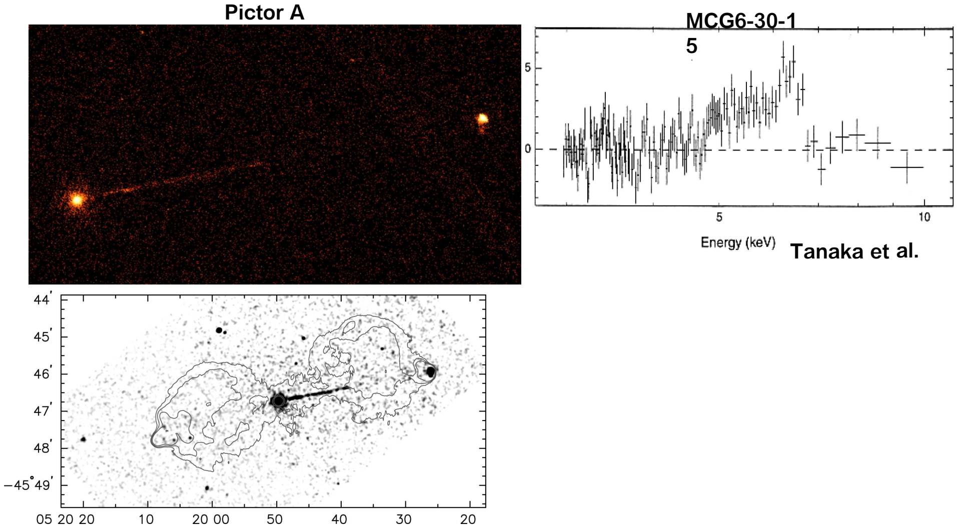


図 9.4: スピンするブラックホールと宇宙ジェット

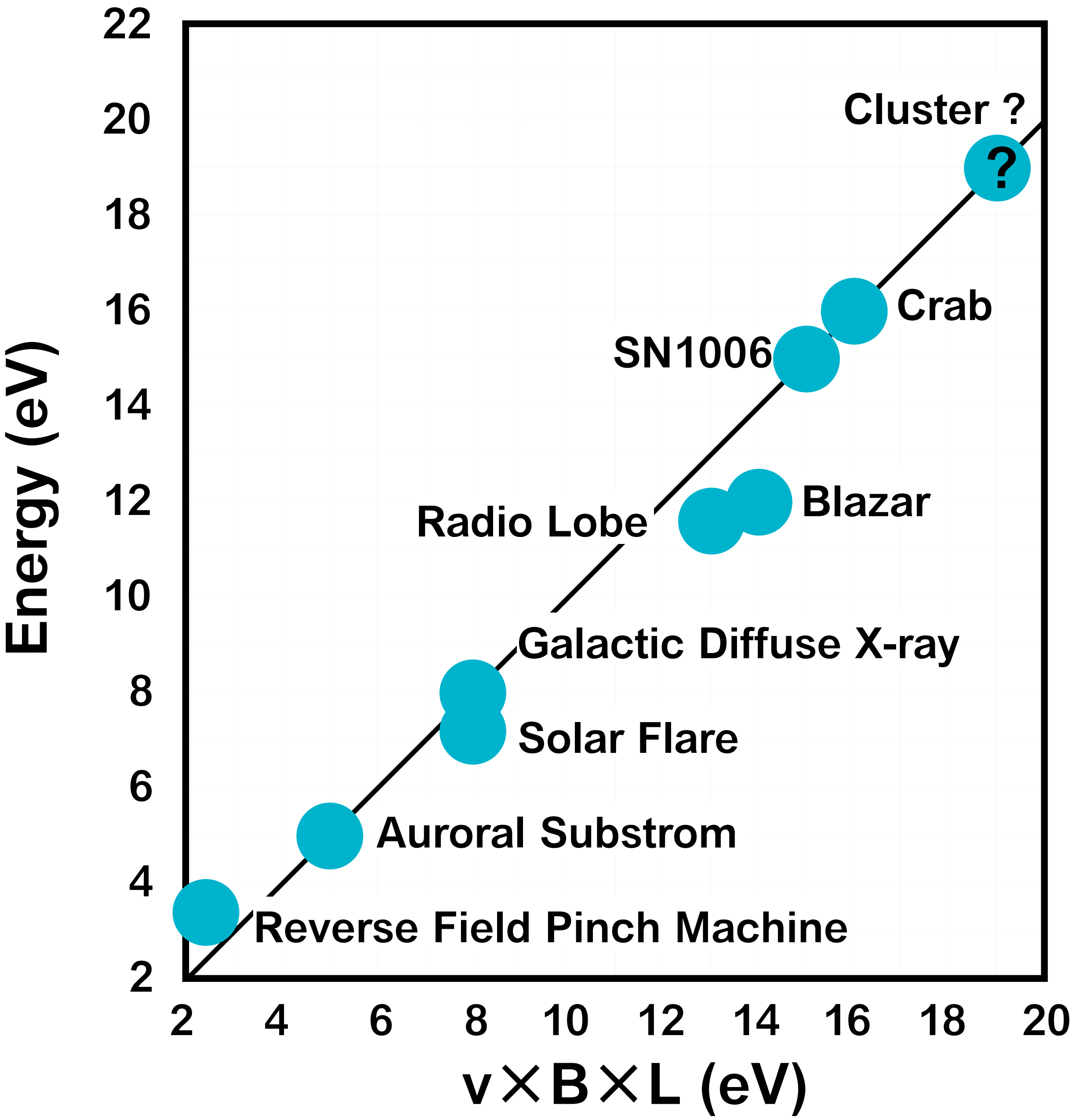


図 9.5: 誘導起電力と観測されている粒子エネルギー

第10章　ビーミング

10.1　特殊相対論の復習

(渡邉、「素粒子物理入門」)

(まだ不十分なので、追記)

4元ベクトルの定義(確認する必要あり)。

$$a \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a}) \tag{10.1}$$

$$a^\mu \equiv (a^0, \vec{a}) \tag{10.2}$$

$$a_\mu \equiv (a_0, -\vec{a}), \quad a_0 = a^0 \tag{10.3}$$

$$a_\mu \equiv (a^0, -\vec{a}) \tag{10.4}$$

4元座標の定義。

$$x \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \vec{x}) \tag{10.5}$$

4元ベクトル a、b の内積はスカラー量なので、どの系から見ても同じ量を持つ(ローレンツ不変量)。4元ベクトルの内積(確認する必要あり)。

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu \equiv a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \tag{10.6}$$

粒子の4元運動量を次のように定義する。

$$p \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv (E/c, p_x, p_y, p_z) \equiv (E/c, \vec{p}) \tag{10.7}$$

自身の内積はローレンツ不変量なので、

$$p \cdot p = p^2 = (E/c)^2 - \vec{p}^2 \equiv m^2 c^2 \tag{10.8}$$

m を静止質量と呼ぶ。

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \tag{10.9}$$

$$K = E - mc^2 \tag{10.10}$$

$$E \simeq mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (\mathrm{at}\ |\vec{p}| \ll mc) \tag{10.11}$$

$$E \simeq |\vec{p}|c \quad (\mathrm{at}\ |\vec{p}| \gg mc) \tag{10.12}$$

$$\beta \equiv v/c, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{10.13}$$

$$E = \gamma mc^2, \quad |\vec{p}| = \gamma \beta mc \tag{10.14}$$

$$\beta = \frac{|p|c}{E}, \quad \beta\gamma = \frac{|p|}{mc}, \quad \gamma = \frac{E}{mc^2} \tag{10.15}$$

粒子と θ をなす方向を V で進む系が見るこの粒子の全エネルギーは E' は、次のように書ける。

$$\beta = V/c, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \tag{10.16}$$

$$E'/c = \gamma(E/c - \beta p \cos\theta) \tag{10.17}$$

ただしここでは β、γ は、粒子ではなく座標系の方で定義されていることに注意。

10.2　ビーミング

速度 $V = \beta c$ で進む物体を進行方向と θ をなす角度から観測する場合を考える (図 10.1)。放射源の固有系で測定した周波数を $\nu_{\rm s}$、観測者の系で測定した周波数を $\nu_{\rm obs}$、ローレンツ変換より

$$\nu_{\rm s} = \gamma(\nu_{\rm obs} - \beta\nu_{\rm obs}\cos\theta) \tag{10.18}$$

$$\delta \equiv \frac{1}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} \tag{10.19}$$

$$\nu_{\rm obs} = \nu_{\rm s}\delta \tag{10.20}$$

と書ける。δ はビーミング因子と呼ばれるものである。δ はビーミングする物体固有の値であるのに対し、δ は見掛けの値である。一方、時間は周波数の逆数なので、放射源での時間間隔 $\Delta t_{\rm s}$ と観測者での時間間隔 $\Delta t_{\rm obs}$ は

$$\Delta t_{\rm obs} = \Delta t_{\rm s}/\delta \tag{10.21}$$

となる。つまり、放射が放射源で 1 秒間続いたとすると、観測者では $1/\delta$ 秒間に圧縮されて観測されることになる。

δ は θ の関数である。よって、同じ放射源を観測しても真正面および後方から観測した場合はそれぞれ

$$\delta({\rm head-on}) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{10.22}$$

$$\delta({\rm tail-on}) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{10.23}$$

となる。同じ放射源からの光子を見ても、見る方向によって見え方が違うと言うことである。

さらに、放射源の固有系で放射される光子の方向 $\theta_{\rm s}$ と、観測者の方向 θ には次の関係がある。

$$\cos\theta_{\rm s} = \frac{\cos\theta_{\rm obs} - \beta}{1-\beta\cos\theta_{\rm obs}} \tag{10.24}$$

その結果、放射源での立体角 $\Delta\Omega_{\rm s} = 2\pi\Delta\cos\theta_{\rm s}$ の範囲で放射された光は、

$$\Delta\Omega_{\rm obs} = \Omega_{\rm s}/\delta^2 \tag{10.25}$$

の狭い範囲に集中することになる。

つまり、放射源では等方に放出していても、観測者の系では放射源の進行方向に集中することとなる。集中する角度を求める。

$$\cos\theta_{\rm obs} = \frac{\cos\theta_{\rm s} + \beta}{1+\beta\cos\theta_{\rm s}} \tag{10.26}$$

なので、

$$\theta_{\rm s} = \frac{\pi}{2} \tag{10.27}$$

ならば、

$$\cos\theta_{\rm obs} = \beta \tag{10.28}$$

である。よって、

$$\sin\theta_{\rm obs} = \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} \tag{10.29}$$

となる。つまりおおっざっぱに言って光子は $\theta_{\rm obs} < 1/\gamma$ に集中すると考えて良い。これをビーミングと呼ぶ。

放射源でも観測者でも光子数は保存される。放射源は、放射源の系で等方に単一周波数 $\nu_{\rm s}$ で光度 $L_{\rm s}$ を $\delta t_{\rm s}$ 間放射した光子数と、観測者での光子数を比較すると、観測者と放射源の距離を D とし、観測者の受けるエネルギーフラックスと光子の周波数を $F_{\rm obs}$、$\nu_{\rm obs}$ とすると

$$\frac{L_{\rm s}}{\nu_{\rm s}}\Delta t_{\rm s}\frac{\Delta\Omega_{\rm s}}{4\pi} = \frac{F}{\nu_{\rm obs}}D^2\Delta\Omega_{\rm obs}\Delta t_{\rm obs} \tag{10.30}$$

$$F_{\rm obs} = \delta^4\frac{L_{\rm s}}{4\pi D^2} \tag{10.31}$$

となる。つまり、ビーミング因子 δ の 4 乗に比例する。内訳は、上で示した通り光子の周波数が δ 倍、立体角が δ^2 倍、さらに時間の圧縮により光子が一度に δ 倍に来る。一方で、例えばフレアの持続時間は $1/\delta$ に短くなるので、フレアなどのイベントを時間積分した総エネルギーの場合には δ の 3 乗となる。

上は、δ 関数的なスペクトルを仮定した。つまり、全スペクトルを積分した光度での比較と考えられる。一般的にはスペクトルには幅がある。スペクトルの中心値がビーミングにより高い周波数に移ると同時に、その幅は δ ほど広がる。よって、単位立体角、単位周波数当たりの Specific Intensity で比較する場合は、周波数幅のことを考えて、

$$S_{\rm obs}(\nu) = \delta^3 S_{\rm s}(\nu)[{\rm ergs/sec\cdot cm^2\cdot Hz\cdot str}] \tag{10.32}$$

となる。

これは、Phase Space の要素が Lorentz Invariant であることから導かれる

$$\frac{S(\nu')}{\nu'^3} = \frac{S(\nu)}{\nu^3}, \nu = \delta\nu' \tag{10.33}$$

と一致する。

以下に示す通り、ガンマ線バースト ($\delta = 10^3$)、BLASAR($\gamma \sim 10$)、電波銀河 ($\gamma \sim$ several) などでビーミングが観測されている。

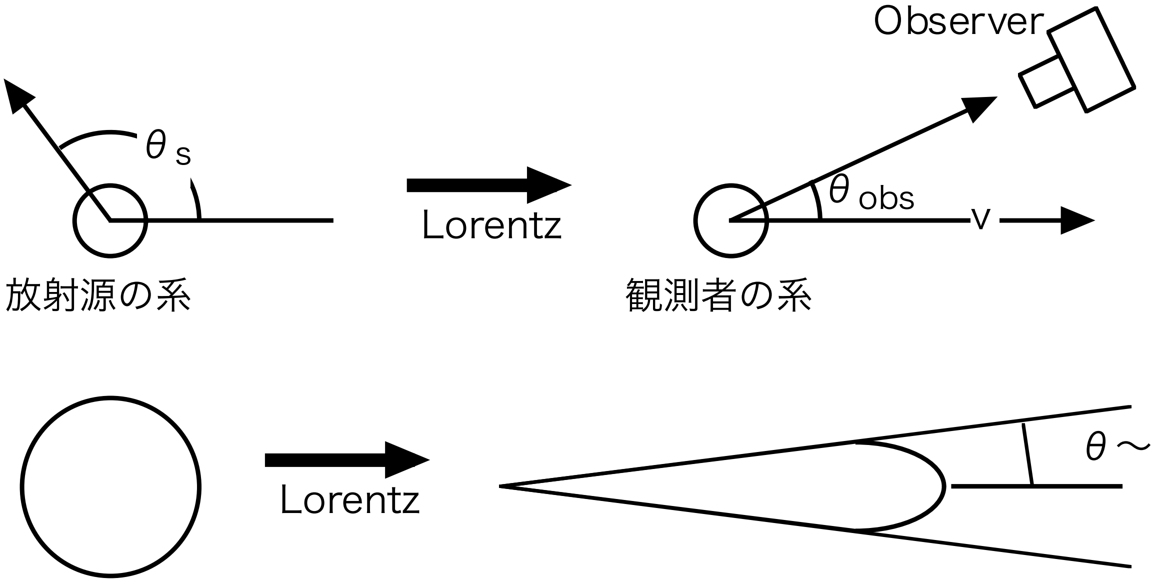


図 10.1: ビーミング

10.3　Superluminal Motion

視線方向に垂直な見かけの膨張速度が光速よりも大きい運動。QSO などで観測されている。

時刻 $t = 0$ に光子を放射するノット (超高温のプラズマとでも考える) が QSO から観測者に対して θ の方向に速度 v で放出されたとする。$t = 0$ に放射された光子は時刻 $t = t$ に面 C に到達する。一方、ノットはその間 vt だけ進み B に到達する。この瞬間に放射された光子は、$t = t + \Delta t$ に面 C に到達する。Δt は簡単な幾何から次のように書ける。

$$\Delta t = \frac{ct - vt\cos\theta}{c} \tag{10.34}$$

観測者にとっては奥行き方向は見えないので、ノットが Δt の間に見かけの距離 $vt\sin\theta$ 進んだように見える。その結果、見かけの移動速度 $v_{\rm app}$ が次のように得られる。

$$v_{\rm app} = \frac{vt\sin\theta}{\Delta t} = \frac{v\sin\theta}{1-(v/c)\cos\theta} \tag{10.35}$$

$$\beta_{\rm app} = \frac{\beta\sin\theta}{1-\beta\cos\theta} \tag{10.36}$$

ここで、$\theta \sim 0$、$\beta \sim 1$ であれば、$\beta_{\rm app} > 1$ になることが分かる。次に与えられた β に対して、$\beta_{\rm app}$ が最大になる θ を求める。θ で $\beta_{\rm app}$ を微分すると

$$\frac{d\beta_{\rm app}}{d\theta} = \frac{\beta(\cos\theta - \beta)}{(1-\beta\cos\theta)^2} \tag{10.37}$$

となる。よって、$\cos\theta = \beta$ の時に、最大値

$$\beta_{\rm app}({\rm max}) = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\beta \tag{10.38}$$

となる。よって、$\gamma \gg 1$、$\beta \to 1$ の時に $\beta{\rm app} \gg 1$ となる。

$$\beta_{\rm app}({\rm max}) = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \tag{10.39}$$

$$\beta > 1/\sqrt{2} \tag{10.40}$$

となる。すなわち、Superliminal Motion が観測される、ということはノットが光速に近い速度で観測者に対してほとんど真正面に運動していることを示している。

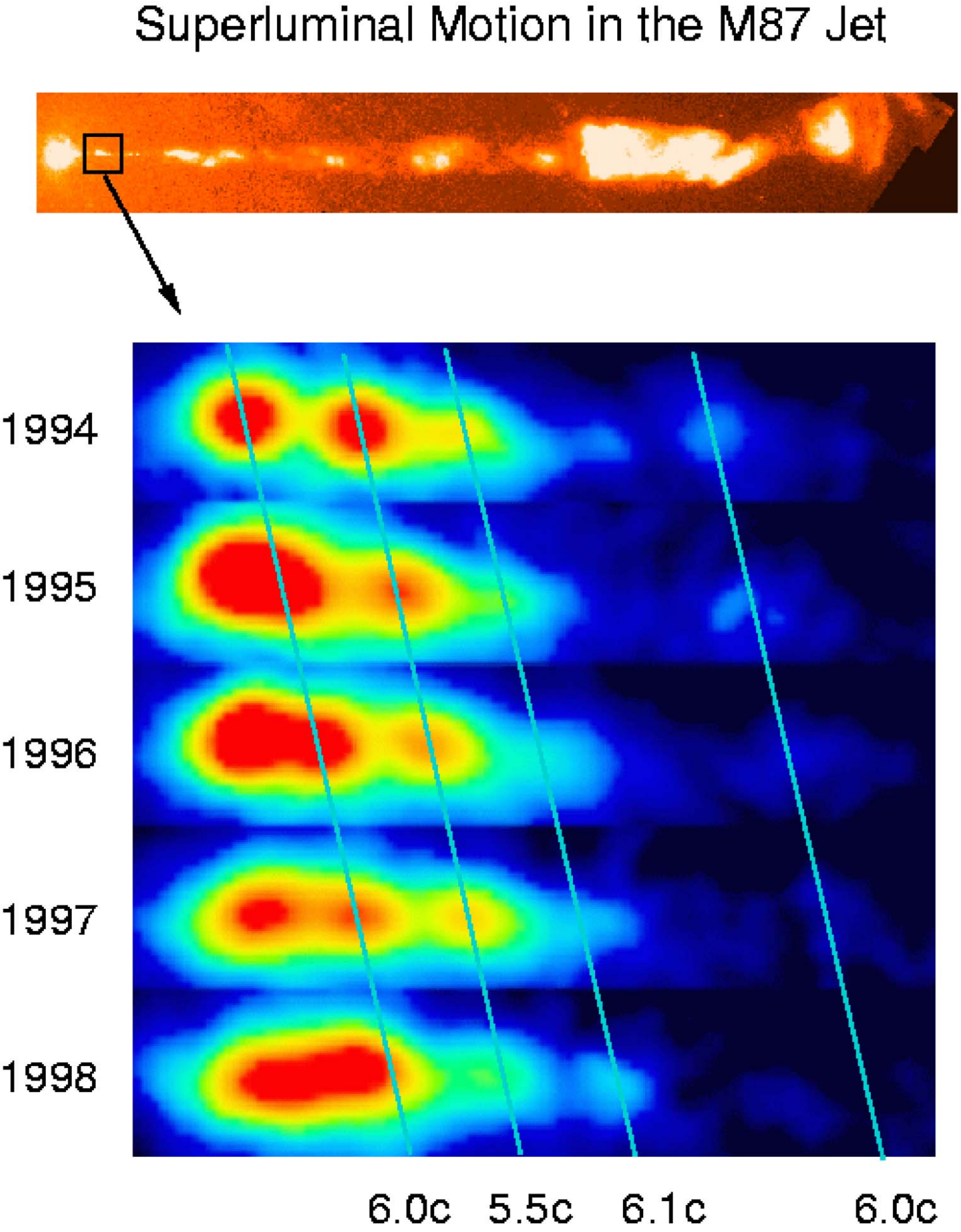

Superluminal Motion in the M87 Jet
1994
1995
1996
1997
1998
6.0c
5.5c
6.1c
6.0c

図 10.2: Hubble Telescope による、M87 の Superluminal Mosion。上の絵は、ジェットの全貌。5000 光年程度の長さ。下の絵は、1994 年から 1998 年に得られた M87 中心領域の画像 (Biretta, J., 1999)。

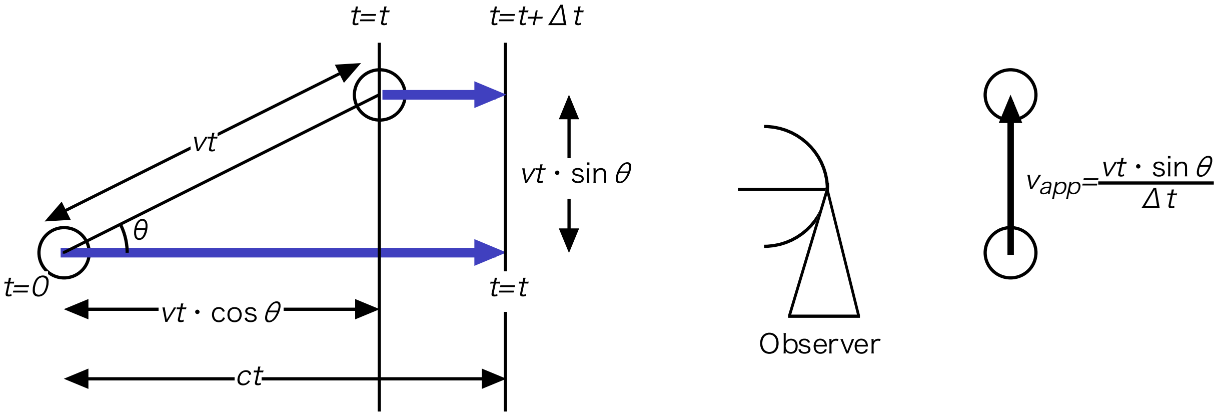

t=t
t=t+Δt
vt
θ
t=0
vt・cos θ
ct
t=t
vt・sin θ
Observer
vapp=vt・sin θ / Δt

図 10.3: Superluminal Mosion の説明。

10.4 加速している相対論的荷電粒子からの電磁波放出

10.4.1 全放射エネルギー (いい加減なので見直すこと)

トムソン散乱の項で示した通り、加速度運動する粒子から全立体角、全波長で輻射される全放射エネルギーは

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\vec{a}\cdot\vec{a} \tag{10.41}$$

と書ける。ここでは行なわないが粒子の静止系を K'、観測者の系を K とすると、加速度の進行方向に垂直な成分と並行成分のローレンツ変換は、

$$a'_{\mathrm{para}} = \gamma^3 a_{\mathrm{para}} \tag{10.42}$$

$$a'_{\mathrm{perp}} = \gamma^2 a_{\mathrm{perp}} \tag{10.43}$$

となる。よって、輻射される全放射エネルギーは実験室系では、

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\vec{a'}\cdot\vec{a'} = \frac{2q^2}{3c^3}\left(a'^2_{\mathrm{para}} + a'^2_{\mathrm{perp}}\right) \tag{10.44}$$

$$= \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4\left(a^2_{\mathrm{para}} + \gamma^2 a^2_{\mathrm{perp}}\right) \tag{10.45}$$

となる。

10.5 時間変動とビーミングの必要性 –柴崎-井上理論 –

光度 L を持つ天体が Δt の間に大きな変動したとする。その時に ΔM の質量がなんらかのプロセスで消費されエネルギーに変換されたとする。その変換係数を静止質量エネルギーに対して η とすると以下の式が成立する。

$$L\Delta t = \eta\cdot\Delta M c^2 \ \text{— (1)} \tag{10.46}$$

$$\Delta M = \rho\frac{4\pi}{3}R^3 \ \text{— (2)} \tag{10.47}$$

時間変動は散乱過程でなまされてしまう。ランダムウォークの考えから決まる散乱の光学的厚み τ を持つシステムから抜け出てくる時間を下限として、

$$\Delta t > \frac{R}{c}(1+\tau) \ \text{— (3)} \tag{10.48}$$

$$\tau = \kappa_{\mathrm{T}}\rho R \rightarrow \rho R = \frac{\tau}{\kappa_{\mathrm{T}}} \ \text{— (4)} \tag{10.49}$$

$$\kappa_{\mathrm{T}} = \frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{m\mathrm{p}}\frac{n_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{p}}} \tag{10.50}$$

となる。式 (3) は光学的に薄い場合の (R/c) と光学的に薄い場合の $\tau(R/c)$ をまとめた形になっている。

まず、式 (1) と式 (2) から

$$L\Delta t = \rho\frac{4\pi}{3}R^3c^2\eta \ \text{— (5)} \tag{10.51}$$

となる。次に、式 (3) より

$$\frac{1}{\Delta t^2} < \frac{c^2}{R^2}\frac{1}{(1+\tau)^2} \ \text{— (6)} \tag{10.52}$$

となる。式 (5) と (6) の両辺をそれぞれ掛けると

$$\frac{L}{\Delta t} < \rho\frac{4\pi}{3}Rc^4\eta\frac{1}{(1+\tau)^2} \ \text{— (7)} \tag{10.53}$$

が得られる。式 (4) より (7) の ρR を消すと、

$$\frac{L}{\Delta t} < \frac{4\pi}{3}\frac{c^4}{\kappa_{\mathrm{T}}}\eta\frac{\tau}{(1+\tau)^2} \tag{10.54}$$

$$\frac{L}{\Delta t}\cdot\left(\sqrt{\tau}+\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)^2 < \frac{4\pi}{3}\frac{c^4}{\kappa_{\mathrm{T}}}\eta \text{ — (8)} \tag{10.55}$$

となる。相加相乗平均の考えから

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \tag{10.56}$$

$$\sqrt{\tau}+\frac{1}{\sqrt{\tau}} > 2, \rightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{\tau}+\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)^2} < \frac{1}{4} \text{ — (9)} \tag{10.57}$$

なのでこれを式 (8) の両辺にかけると $\pi \sim 3$ なので、

$$\frac{L}{\Delta t} < \frac{\pi}{3}\frac{c^4}{\kappa_{\mathrm{T}}}\eta \sim \frac{c^4}{\kappa_{\mathrm{T}}}\eta \tag{10.58}$$

$$\eta > \frac{L}{\Delta t}\frac{\kappa_{\mathrm{T}}}{c^4} = \frac{L}{R}\frac{\kappa_{\mathrm{T}}}{c^3} = \frac{L}{R}\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{p}}c^3}\frac{n_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{p}}} \text{ — (10)} \tag{10.59}$$

$$f \equiv \frac{L}{\Delta t}\frac{\kappa_{\mathrm{T}}}{c^4} = \frac{L}{c\Delta t}\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{p}}c^3}\frac{n_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{p}}} \text{ — (11)} \tag{10.60}$$

$$= 5\times 10^{-4}\cdot\left(\frac{L}{10^{44}\mathrm{ergs/s}}\right)\left(\frac{\Delta t}{10^5\mathrm{sec}}\right)^{-1}\frac{n_{\mathrm{e}}}{n_{\mathrm{p}}} \text{ — (12)} \tag{10.61}$$

f は無次元量であり、実際に観測可能な量である。η と比較することができる。

さて、η は消費された静止質量エネルギー ΔMc^2 に対してどれだけが実際に輻射として放射されたかの指標である。これまで色々なところで述べたものをまとめると、

$\eta = 0.001$ 核融合反応
$\eta = 0.01$ Schwaritzchild Black Hole の降着円盤 s
$\eta = 0.?$ Kerr Black Hole の降着円盤
$\eta = 0.5$ Schwaritzchild 半径まで回転させずに落した場合に開放される重力エネルギー
$\eta = 1.0$ 静止質量全て開放した場合

となる。色々な AGN に対して、光度と時間変動の相関をとった例を図??に示す (ちなみに、この論文の中で言っている、コンパクトネスパラメータと、ここの f は非常に似ているが別物。電子の質量なのか、陽子の質量なのかの大きな違いがある)。X 線は AGN からの放射の一部なので、全光度 L_{bol} とし、

$$L_{\mathrm{bol}} \sim 10L_{\mathrm{X}} \tag{10.62}$$

程度の違いがあると考えるとほとんどの AGN で

$$f \ll 0.1 \tag{10.63}$$

であるが、一部の BL Lac や OVV QSO と呼ばれる非常に時間変動の速い AGN では

$$f \simeq 1 \sim 100 \tag{10.64}$$

であることがわかった。これらの銀河では Super Luminal Mostion が観測されている。よって、この速い時間変動はビーミングによるものだと考えられている。

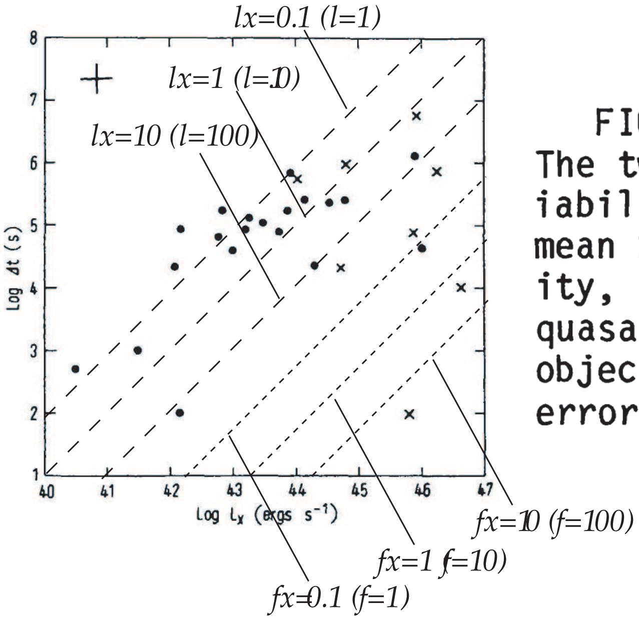


FIGURE 1.
The two-folding timescale of variability, log Δt, versus the mean 2-10 keV rest-frame luminosity, log L_X, for Seyferts and quasars (circles) and for BL Lac objects (crosses). A typical error bar is also shown.

図 10.4: さまざまな AGN での、時間変動の速さと光度の関係。

第11章　サイクロトロンとシンクロトロン輻射

11.0.1　Gyrofrequency

電子 (荷電粒子) が磁場のまわりを回転する半径を Lamor 半径 r_L、回転周波数を”the frequency of rotation” 又は、”the frequency of gyraton” と呼び、CGS-Gauss 単位系では角周波数 ω_B 又は ν_L は次のように書ける。

非相対論では、

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) \tag{11.1}$$

$$\frac{m_\mathrm{e}v^2}{r_\mathrm{L}} = \frac{e}{c}B \tag{11.2}$$

$$r_\mathrm{L} = \frac{c \cdot m_\mathrm{e}v}{eB} \tag{11.3}$$

$$2\pi\nu_\mathrm{L} = \omega_\mathrm{B} = \frac{v}{r_\mathrm{L}} = \frac{eB}{m_\mathrm{e}c} \tag{11.4}$$

となる。一方、相対論的になると、$m_\mathrm{e}v$ を p、すなわち $\gamma\beta m_\mathrm{e}c$ に置き換えて、

$$r_\mathrm{L} = \frac{c \cdot m_\mathrm{e}v}{eB} = \frac{pc}{eB} = \frac{c \cdot \gamma\beta m_\mathrm{e}c}{eB} \tag{11.5}$$

$$\beta \rightarrow 1, \gamma \gg 1 \tag{11.6}$$

$$r_\mathrm{L} = \frac{c \cdot \gamma m_\mathrm{e}c}{eB} = 3.3 \times 10^{13}\mathrm{cm}\left(\frac{B}{1\mathrm{mG}}\right)^{-1}\left(\frac{pc}{10\mathrm{TeV}}\right) \tag{11.7}$$

$$2\pi\nu_\mathrm{L} = \omega_\mathrm{B} = \frac{c}{r_\mathrm{L}} = \frac{eB}{\gamma m_\mathrm{e}c} \tag{11.8}$$

となる。

ちなみに、SI だと

$$2\pi\nu_\mathrm{L} = \omega_\mathrm{B} = \frac{eB}{\gamma m_\mathrm{e}} \tag{11.9}$$

$$q = 1[\mathrm{c}] = c \cdot 10^{-1}[\mathrm{esu}] \tag{11.10}$$

$$B = 1[\mathrm{T}] = 10^4[\mathrm{Gau}\beta] \tag{11.11}$$

$$m = 1[\mathrm{kg}] = 10^3[\mathrm{g}] \tag{11.12}$$

となるので、他の文献を見る時には注意すること。

11.0.2　全輻射パワー

先ほど示した通り、観測者が観測する加速度運動する相対論的粒子からの全放射エネルギーは

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\vec{a'} \cdot \vec{a'} = \frac{2q^2}{3c^3}\left(a'^2_\mathrm{para} + a'^2_\mathrm{perp}\right) \tag{11.13}$$

$$= \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4\left(a^2_\mathrm{para} + \gamma^2 a^2_\mathrm{perp}\right) \tag{11.14}$$

である。磁場中を回転する粒子では

$$a_\mathrm{para} = 0 \tag{11.15}$$

$$a_\mathrm{perp} = \omega_\mathrm{B} v_\mathrm{perp} \tag{11.16}$$

である。よって、

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4\frac{q^2B^2}{\gamma^2m^2c^2}v_{\rm perp}^2 \tag{11.17}$$

$$= \frac{2}{3}r_0^2c\beta_{\rm perp}^2\gamma^2B^2, r_0 = \frac{q^2}{mc^2} \tag{11.18}$$

となる。r_0 は電子の場合古典電子半径である。電子は等方的に分布しているとすると

$$< \beta_{\rm perp}^2 > = \frac{\beta^2}{4\pi}\int \sin^2\alpha d\Omega = \frac{2\beta^2}{3} \tag{11.19}$$

となる。結局以上をまとめると、

$$P = \left(\frac{2}{3}\right)r_0^2c\beta^2\gamma^2B^2 = \frac{4}{3}\sigma_{\rm T}c\beta^2\gamma^2U_{\rm B} \tag{11.20}$$

$$= 6.6\times10^{-16}\gamma^2\left(\frac{B}{1\mu{\rm G}}\right)^2 \quad [{\rm eV\ sec^{-1}}] \tag{11.21}$$

$$= 1.1\times10^{-27}\gamma^2\left(\frac{B}{1\mu{\rm G}}\right)^2 \quad [{\rm ergs\ sec^{-1}}] \tag{11.22}$$

$$U = \frac{B^2}{8\pi} \tag{11.23}$$

となる。U は磁場のエネルギー密度である。

11.1 サイクロトロン輻射

11.1.1 電場とそのパワースペクトル

電磁波とは、観測者が感じる電場変化であり、その電磁波の周波数スペクトルは電場変化をフーリエ変換したものとなる。シンクロトロンは電子が光速よりも十分ゆっくり運動する場合を指す。

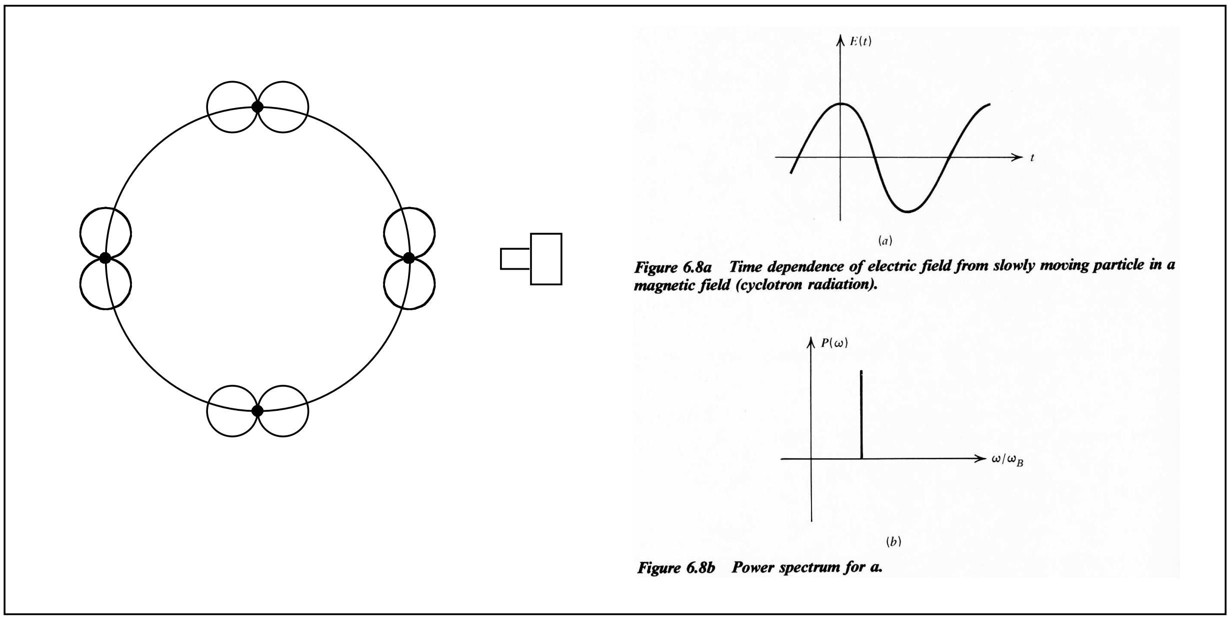


Figure 6.8a *Time dependence of electric field from slowly moving particle in a magnetic field (cyclotron radiation).*

Figure 6.8b *Power spectrum for a.*

図 11.1: Cyclotron

11.2 シンクロトロン輻射

11.2.1 電場とそのパワースペクトル

シンクロトロンの場合は、電子の速度が相対論的であるため、進行方向の前後に放射していた電場がビーミングをするため、鋭く前方を向く。その結果、フーリエスペクトルをとると高調波成分が現れることになる。

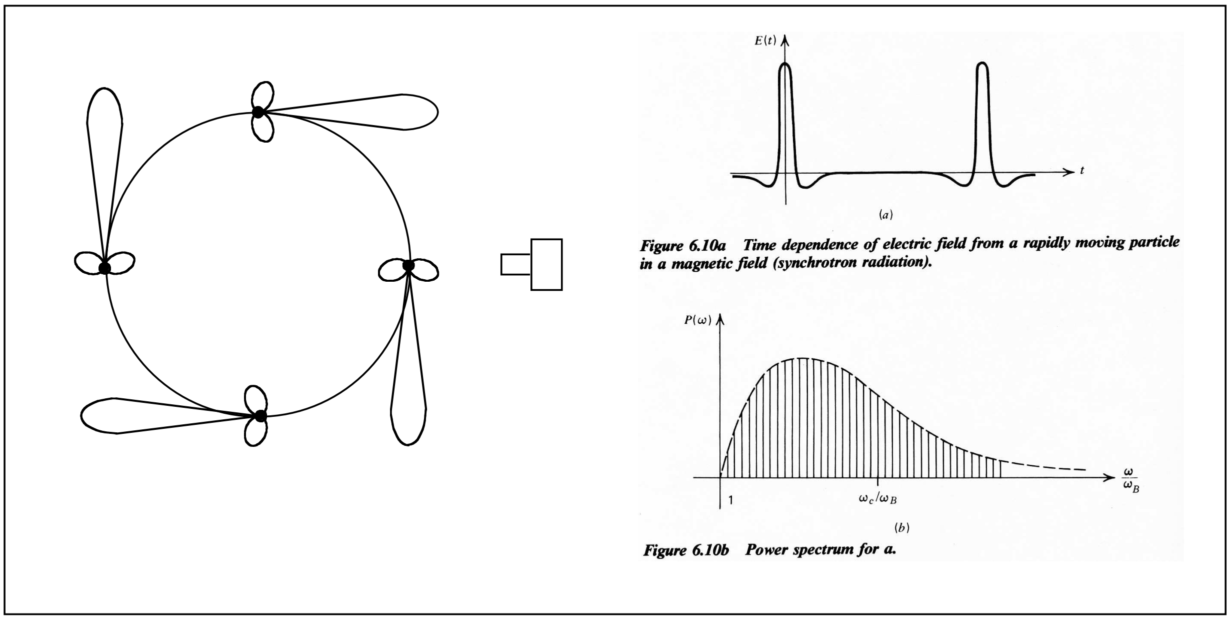


Figure 6.10a *Time dependence of electric field from a rapidly moving particle in a magnetic field (synchrotron radiation).*

Figure 6.10b *Power spectrum for a.*

図 11.2: Synchrotron

11.2.2 単一エネルギーの電子の場合

正しい答え

ピッチ角 α で磁場を回転する単一のエネルギーの電子から放射されるシンクロトロン輻射スペクトルは次のように書ける。

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^2 B\sin\alpha}{2\pi mc^2}F(x) \tag{11.24}$$

$$F(x) \sim \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} \quad (\mathrm{at}\ \ x \ll 1) \tag{11.25}$$

$$\sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-x}x^{1/2} \quad (\mathrm{at}\ \ x \gg 1) \tag{11.26}$$

$$x \equiv \omega/\omega_{\mathrm{c}} \tag{11.27}$$

$$\omega_{\mathrm{c}} \equiv \frac{3}{2}\gamma^3\left(\frac{eB}{\gamma mc}\right)\sin\alpha = \frac{3}{2}\gamma^3\omega_{\mathrm{B}}\sin\alpha \tag{11.28}$$

$$\nu_{\mathrm{c}} = \frac{3}{4\pi}\gamma^3\omega_{\mathrm{B}}\sin\alpha \tag{11.29}$$

$$\omega_{\mathrm{B}} \equiv \frac{eB}{\gamma mc} \tag{11.30}$$

(11.31)

ω_{c} は"Critical Frequency" と呼ばれる。これは、シンクロトロンのビーミングの部分をフーリエ変換して出てくる周波数に対応する。すなわち、$\sin\alpha = 1$ の場合、ローレンツ因子が γ である時のピークの時間幅が $\Delta t \simeq 1/\omega_{\mathrm{c}}$ にほぼ対応する。

図 11.3 に $F(x)$ を示す。ピークが $x = 0.29$ すなわち $\omega = 0.29\omega_{\mathrm{c}}$ に来る。

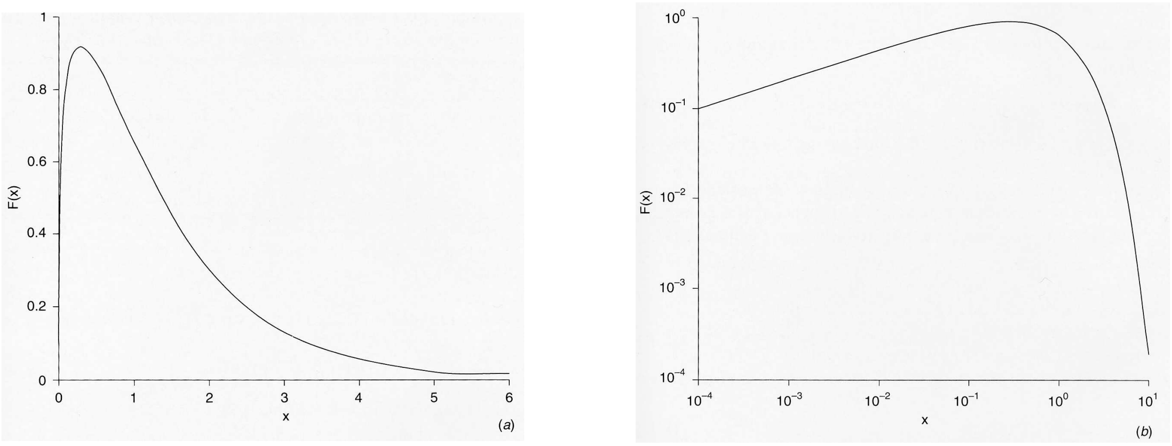


Figure 18.8. The intensity spectrum of the synchrotron radiation of a single electron shown (*a*) with linear axes and (*b*) with logarithmic axes. The function is plotted in terms of $x = \omega/\omega_c = \nu/\nu_c$, where ω_c is the critical angular frequency, $\omega_c = 2\pi\nu_c = \frac{3}{2}\left(\frac{c}{v}\right)\gamma^3\omega_r \sin\alpha$.

図 11.3: Synchrotron の放射エネルギー

単一周波数による近似

これでは面倒だと言う向きには次のような近似が使われることがある。

ローレンツ因子 γ を持つ電子からのシンクロトロン輻射を次のように近似すると、

$$P_\nu(\gamma) = \frac{4}{3}\sigma_\mathrm{T} c\beta^2\gamma^2\frac{B^2}{8\pi}\delta(\nu-\nu_c) \tag{11.32}$$

$$\nu_\mathrm{L} \equiv \frac{eB}{2\pi m_\mathrm{e} c} \tag{11.33}$$

$$\nu_\mathrm{c} \equiv \gamma^2\nu_\mathrm{L} = \gamma\frac{eB}{2\pi m_\mathrm{e} c} \tag{11.34}$$

$$h\nu_\mathrm{c} = 4.4\mathrm{keV}\left(\frac{E_\mathrm{e}}{10\mathrm{TeV}}\right)^2\left(\frac{B}{1\mathrm{mG}}\right) \tag{11.35}$$

11.2.3　ベキ関数型の電子エネルギースペクトルの場合

電子のエネルギースペクトルを $N(E)$ 又は $N(\gamma)$ と表す。電子がベキ関数型のエネルギースペクトルを持つ場合、放射されるシンクロトロン輻射のスペクトルは以下のように書ける。

$$N(E)dE = N_0E^{-p}dE \tag{11.36}$$

$$N(\gamma)d\gamma = N_0\gamma^{-p}d\gamma \tag{11.37}$$

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^3N_0B\sin\alpha}{2\pi mc^2(p+1)}\Gamma\left(\frac{p}{4}+\frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4}-\frac{1}{12}\right)\left(\frac{mc\omega}{3eB\sin\alpha}\right)^{-(p-1)/2} \tag{11.38}$$

重要なことは、傾きである。電子のスペクトル $-p$ に対し、シンクロトロン放射の傾きはエネルギーインデックス α およびフォトンインデックス Γ はそれぞれ

$$N(E)dE = N_0E^{-p}dE \tag{11.39}$$

$$\alpha = -\frac{p-1}{2}, \Gamma = -\frac{p+1}{2} \tag{11.40}$$

となる。つまり、X 線スペクトルから電子のスペクトルを一意に決めることが可能となる。

11.2.4 カットオフを持つベキ関数型の電子エネルギースペクトルの場合

(これまで示してきた記号の定義が違うかも知れない) 衝撃波加速などにより有限の時間の間に得られるエネルギーはもちろん有限であり、また、実際に天体で観測される電子のエネルギースペクトルはシンクロトロンやコンプトンによる冷却が効くために、電子スペクトルが無限大まで伸びることはない。それを表現するために、exp 型のカットオフを入れることが多い。

$$N(\gamma) = N_0\gamma^{-p}\exp(-\gamma/\gamma_m) \tag{11.41}$$

完全にベキ型であれば前節で見た通り解析的に計算できるが、この場合は簡単ではない。これは、各エネルギーの電子が放射するスペクトルがややこしい形をしているからである。しかし、実際には電子のエネルギースペクトルは広い領域にわたるので、全体で放射されるシンクロトロン輻射にくらべて各エネルギーの電子が放射するスペクトルは十分狭いと近似できる。

そこで、Yoshida and Yanagita (1997) は、各エネルギーの電子が放射するスペクトルをさきほど示した δ 関数的と近似し、解析的にスペクトルを求めた。その結果放射されるシンクロトロン輻射のスペクトルは

$$P_\nu = a\nu^{-b}\exp\left(-d\nu^{1/2}\right) \tag{11.42}$$

$$= \left[N_0\frac{2}{3}c\sigma_{\rm T}\frac{B^2}{8\pi}\nu_{\rm L}^{(p-3)/2}\right]\nu^{-(p-1)/2}\exp\left[-\frac{1}{\gamma_m}\left(\frac{\nu}{\nu_{\rm L}}\right)^{1/2}\right] \tag{11.43}$$

$$a = N_0\frac{2}{3}c\sigma_{\rm T}\frac{B^2}{8\pi}\nu_{\rm L}^{(p-3)/2} \tag{11.44}$$

$$b = (p-1)/2 \tag{11.45}$$

$$d = \frac{1}{\gamma_m\sqrt{\nu_{\rm L}}} \tag{11.46}$$

と書ける。

exp の中が 1 となるシンクロトロンのカットオフの周波数を $\nu_{\rm cut}$ とすると、

$$\frac{1}{\gamma_m}\sqrt{\frac{\nu_{rmcut}}{\nu_{\rm L}}} = 1 \tag{11.47}$$

$$\nu_{\rm cut} = \frac{e}{2\pi m_{\rm e}c}\gamma_m^2 = 2.8\times10^6\left(\frac{B}{1{\rm G}}\right)\gamma_m^2\ \ [{\rm Hz}] = 2.8\left(\frac{B}{1\mu{\rm G}}\right)\gamma_m^2\ \ [{\rm Hz}] \tag{11.48}$$

$$h\nu_{\rm cut} = 1.2\times10^{-14}\left(\frac{B}{1\mu{\rm G}}\right)\gamma_m^2\ \ [{\rm eV}] \tag{11.49}$$

と書ける。

11.3 ランダウ準位とサイクロトロン吸収線

11.3.1 ランダウ準位

磁場中を運動する荷電粒子は、磁場が弱ければそのエネルギーは連続であるが、磁場が非常に強い状態では離散的となる。詳しくは、ランダウ=リフシッツ「量子力学 2」p.551~553 を見てもらうとして (ランダウ=リフシッツは CGS-Gauss と信じている)、答を書くと

$$E = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_{\rm B} + \frac{p_{\rm z}^2}{2m} - \frac{\mu\sigma}{s}B \tag{11.50}$$

$$\omega_{\rm B} = \frac{eB}{mc} \tag{11.51}$$

である。電子の場合は、スピン項は

$$\mu/s = -e\hbar/m_{\rm e}c \tag{11.52}$$

なので、

$$E_{\mathrm{e}} = \left(n+\frac{1}{2}+\sigma\right)\hbar\omega_{\mathrm{B}}+\frac{p_{\mathrm{z}}^2}{2m_{\mathrm{e}}} \tag{11.53}$$

$$\omega_{\mathrm{B}} = \frac{eB}{m_{\mathrm{e}}c} \tag{11.54}$$

(11.55)

となる。z 方向の運動は量子化されないが、$x-y$ 平面上の Lamor 運動は量子化される。エネルギー準位をランダウ準位と呼ぶ。準位は等間隔であり、磁場に比例する。具体的な値を書くと

$$\hbar\omega_{\mathrm{B}} = \frac{\hbar e}{m_{\mathrm{e}}c}B = 11.6[\mathrm{keV}]\left(\frac{B}{10^{12}\mathrm{G}}\right) \tag{11.56}$$

となる。つまり、ちょうど強磁場中性子星では X 線バンドに来る (中性子星での重力赤方偏移を考える場合はこれに $(1+z)^{-1}$ の項が付く)。また、その Lamor 半径は

$$r_{\mathrm{n}} = (2n+1)^{1/2}r_0 \tag{11.57}$$

$$r_0 = \left(\frac{\hbar c}{eB}\right)^{1/2} = 2.6\times10^{-10}[\mathrm{cm}]\left(\frac{B}{10^{12}\mathrm{G}}\right)^{-1/2} \tag{11.58}$$

となる。$2.6\times10^{-10}[\mathrm{cm}] = 0.026[\mathrm{A}]$ なので、その軌道は原子よりも小さい (!)。水素原子の半径 (ボーア半径) $a_0 = \hbar^2/m_{\mathrm{e}}e^2 = 0.529\times10^{-8}[\mathrm{cm}]$。さすがに陽子の大きさ (陽子のコンプトン波長)$\lambda_{\mathrm{p}} = \hbar/m_{\mathrm{p}}c = 2.19\times10^{-14}[\mathrm{cm}]$ よりは大きい。

11.3.2 サイクロトロン吸収線

強磁場中性子星表面でのランダウ準位は X 線バンドに来る。ということは、電子の静止質量よりは十分小さいので、シンクロトロンではなく、サイクロトロンということになる。さて、この準位は「ぎんが」衛星で検出されている (Makishima etal 1990, Mihara D 論, Mihara etal. 1991, Makishima etal. 1999)。

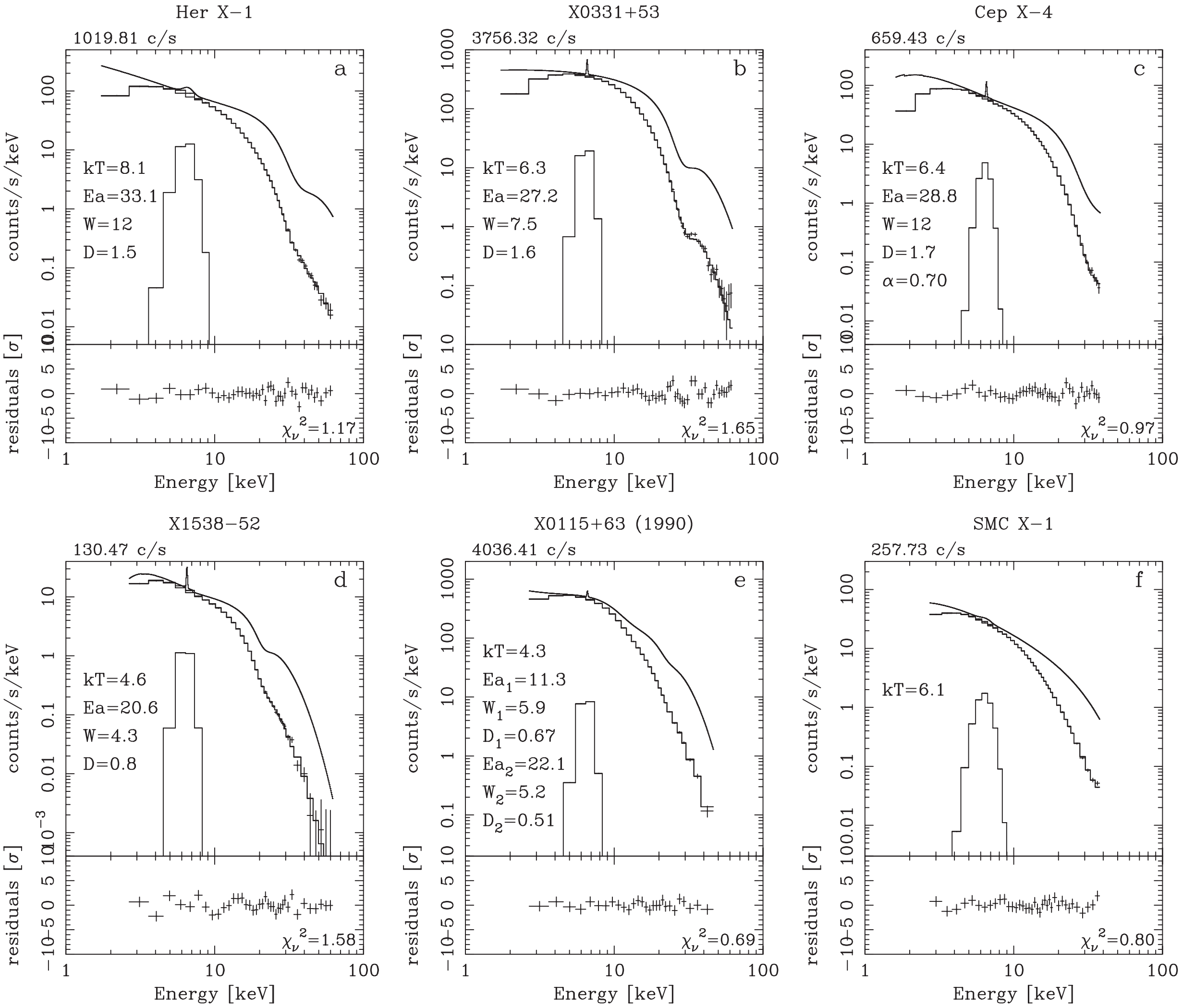


図 11.4: 「ぎんが」衛星による質量降着型 X 線パルサーのスペクトル (Makishima et al. 1999)。いずれも、サイクロトロン輝線吸収と見られる構造が検出されている。

第12章　コンプトン散乱

12.1　コンプトン散乱と逆コンプトン散乱の素過程

自由電子と光子の散乱過程には、大きくトムソン散乱、コンプトン散乱、逆コンプトン散乱に分けられる。名前は違うが、基本的にはこれらは同じもので、Klein-Nishina のコンプトン散乱理論と特殊相対論でお互いが関係している。この 3 つの違いは、電子と光子それぞれのエネルギーの大きさによって決まる。

トムソン散乱と、コンプトン散乱および逆コンプトン散乱、との違いは、光子および電子のエネルギーで決まる。

1) トムソン散乱:　観測者系において、電子エネルギーが電子静止エネルギーより十分小さく、光子エネルギーも電子静止エネルギーよりも十分小さい場合。両者の間でエネルギーのやりとりは無い。

2) コンプトン散乱:　観測者系において、電子エネルギーが電子静止エネルギーより十分小さく、光子エネルギーは電子静止エネルギーよりも十分大きい場合。光子から電子へエネルギーが渡される。

3) 逆コンプトン散乱:　観測者系において、電子エネルギーが電子静止エネルギーよりも十分大きい場合。この過程はさらに、電子の静止系にローレンツ変換した場合の状況で 2 つにわけられる。

3-a) 電子静止系でトムソン散乱:　電子静止系での光子エネルギーが電子静止エネルギーに比べて十分小さく、トムソン散乱が起こる場合。観測者系で最終的に電子から光子へエネルギーが渡される。

3-b) 電子静止系でコンプトン散乱:　電子静止系での光子エネルギーが電子静止エネルギーに比べて十分小さく、コンプトン散乱が起こる場合。

12.1.1　コンプトン散乱

入射光子、散乱光子のエネルギーをそれぞれ ϵ、ϵ_1 とすると、トムソン散乱では

$$\epsilon_1 = \epsilon \tag{12.1}$$

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{T}}}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \left(1+\cos^2\theta\right) \tag{12.2}$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \tag{12.3}$$

と書ける。

一方、コンプトン散乱では、

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{1+\frac{\epsilon}{mc^2}(1-\cos\theta)} \tag{12.4}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2}\frac{\epsilon_1^2}{\epsilon^2}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_1}+\frac{\epsilon_1}{\epsilon}-\sin^2\theta\right) \tag{12.5}$$

$$\sigma = \sigma_T \frac{3}{4}\left[\frac{1+x}{x^3}\left(\frac{2x(1+x)}{1+2x}-\ln(1+2x)\right)+\frac{1}{2x}\ln(1+2x)-\frac{1+3x}{(1+2x)^2}\right] \tag{12.6}$$

$$x \equiv h\nu/mc^2 \tag{12.7}$$

$$\tag{12.8}$$

さらに、

$$\sigma \simeq \sigma_T\left(1-2x+\frac{26x^2}{5}+\cdots\right) \quad (x \ll 1) \tag{12.9}$$

$$\sigma = \frac{3}{8}\sigma_T x^{-1}\left(\ln 2x+\frac{1}{2}\right) \quad (x \gg 1) \tag{12.10}$$

となる。$x \ll 1$、すなわち Thomson 散乱領域では散乱断面積はほぼ一定であるのに対し、$x \gg 1$ では $x^{-1} = (h\nu/mc^2)^{-1}$ で急激に散乱断面積が小さくなっていく。ここを「Klein-Nishina の領域」とか「Klein-Nihina が効く」とか言ったりする。

ここで示したコンプトン散乱の式は、電子が静止系で成り立つ式である。実験室系でどうであれ、電子の静止系に持っていけば、上記の式が成立すると考えても良い。しかる後にもう一度元の実験室に戻せば実際の実験室系で散乱がどう行なわれるかが理解できる。

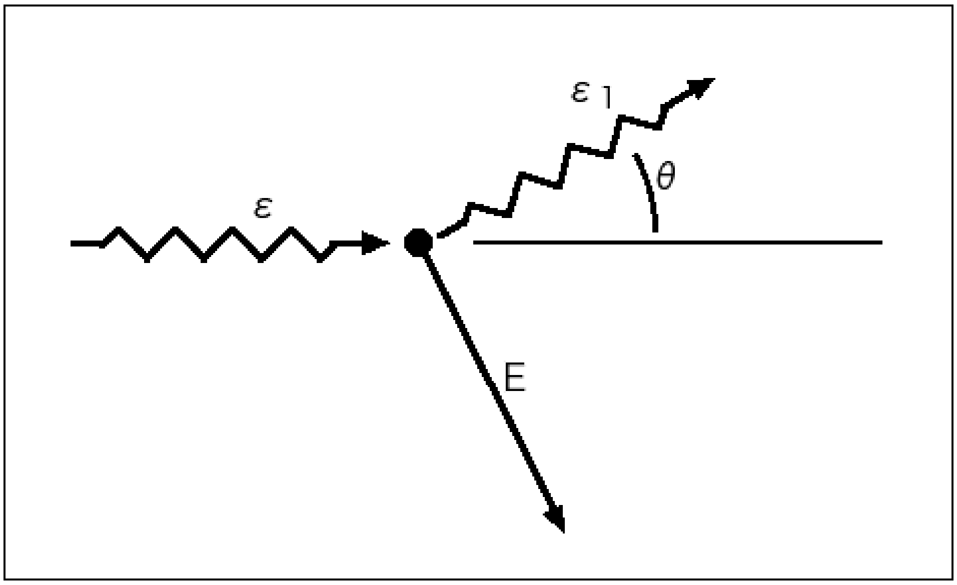


図 12.1: コンプトン散乱の Kinematics

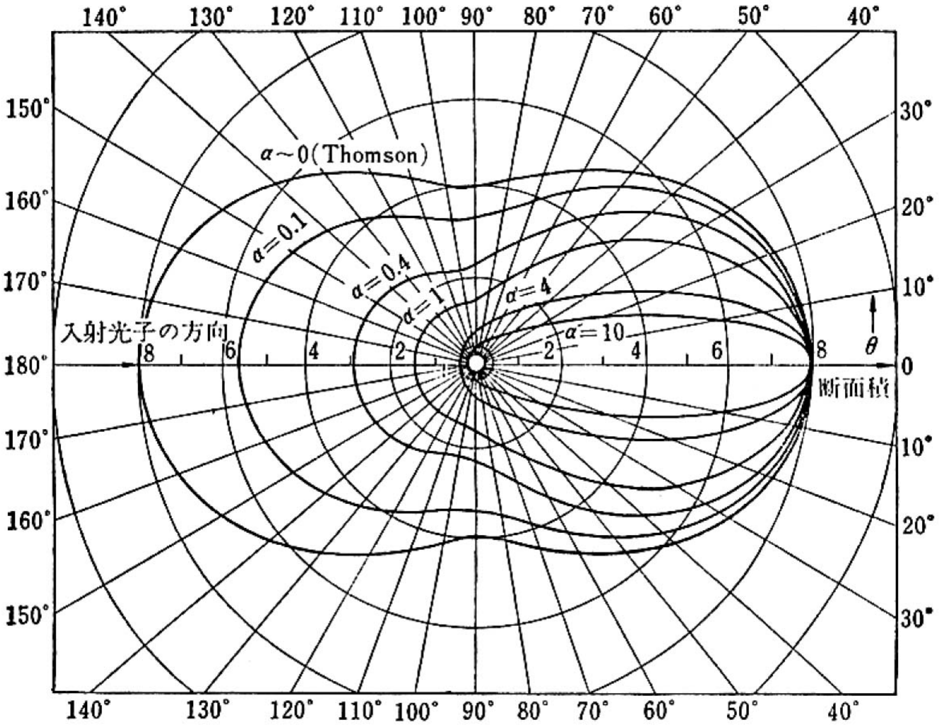


図 12.2: 偏光していない光子に対するトムソン散乱とコンプトン散乱の散乱断面積。$\alpha = h\nu/m_{\rm e}c^2$ である。

12.1.2 逆コンプトン散乱 (電子が大きなエネルギーを持つ)

さて、実際の宇宙では先ほど見た通り、加速により粒子が大きなエネルギーを持つことがある。この場合、エネルギーの低い光子と散乱し高エネルギーに叩き上げる過程が存在する。これを逆コンプトン散乱と呼ぶ。

観測者系から上記の電子の静止系に移る。

$$\epsilon' = \epsilon\gamma(1-\beta\cos\theta) \tag{12.11}$$

次に先ほどの電子が静止系のコンプトン散乱を行なう。

$$\epsilon'_1 = \epsilon'\left(1+\frac{\epsilon'}{m_{\rm e}c^2}(1-\cos\Theta)\right)^{-1} \tag{12.12}$$

$$\simeq \left[1-\frac{\epsilon'}{m_{\rm e}c^2}(1-\cos\Theta)\right] \tag{12.13}$$

$$\cos\Theta = \cos\theta'_1\cos\theta' + \sin\theta'\sin\theta'_1\cos(\phi'-\phi'_1) \tag{12.14}$$

ϕ' と ϕ'_1 は、電子の静止系での入射光子と散乱光子の Azimus 角である。そして最後に元の観測者系に戻る。

$$\epsilon_1 = \epsilon'_1\gamma(1+\beta\cos\theta'_1) \tag{12.15}$$

観測者系では入射光子のエネルギーは入射電子に比べて非常に低い。よって、電子の静止系に移った段階では γ 倍にブーストされて

$$\epsilon' = \epsilon\gamma(1-\beta\cos\theta) \simeq \gamma\epsilon \tag{12.16}$$

となると考えて良い。

ここで、電子での静止系での入射光子のエネルギーにより 2 つの領域分けられる。この電子の静止系での入射光子エネルギー ϵ' が電子の静止質量よりも小さい場合はトムソン散乱で考えて良い。一方、ϵ' が電子の静止質量よりも大きい場合はコンプトン散乱となる。

電子の静止系でトムソン散乱

まず、

$$\epsilon' \simeq \gamma\epsilon \ll m_{\rm e}c^2 \tag{12.17}$$

$$\gamma\cdot\frac{\epsilon}{m_{\rm e}c^2} \ll 1 \tag{12.18}$$

の場合は、トムソン散乱のために電子の静止系での散乱光子は入射光子と同じエネルギーを持つ。一方、散乱電子は静止したままである。次に観測者系に移る際に散乱光子は座標変換で元に戻る際もう一度 γ 倍の前方ブーストを受けることになる。その結果

$$\epsilon'_1 \simeq \gamma\epsilon' \simeq \gamma^2\epsilon \tag{12.19}$$

となる。また、散乱断面積は先ほどのコンプトン散乱 $x=\epsilon/m_{\rm e}c^2 \ll 1$ の極限と同じくトムソン散乱に近くなる。

$$\sigma_{\rm c} = \sigma_{\rm T}\left(1-\frac{2\gamma\epsilon}{m_{\rm e}c^2}+\frac{26}{5}\left(\frac{\gamma\epsilon}{m_{\rm e}c^2}\right)^2+\cdots\right) \simeq \sigma_{\rm T} \tag{12.20}$$

となる。

入手光子および電子が等方的と考えて、散乱によって放射される全エネルギーは、一回の散乱により入射光子は約 γ^2 倍のエネルギーをもらうが、入射光子は等方的であるなどをちゃんと考慮し正しく計算して

$$P_{\rm compt} = \frac{4}{3}\sigma_{\rm T}c\gamma^2\beta^2U_{\rm ph} \tag{12.21}$$

が得られる。$U_{\rm ph}$ は入射光子 (ソフトフォトンとか言う) のエネルギー密度である。

電子の静止系でコンプトン散乱 (Klein-Nishina)

電子静止系での入射光子エネルギーが電子の静止エネルギーよりも大きいと、散乱断面積はコンプトン散乱となる。その条件は、

$$\epsilon' \simeq \gamma\epsilon \gg m_{\rm e}c^2 \tag{12.22}$$

$$\gamma \cdot \frac{\epsilon}{m_{\rm e}c^2} \gg 1 \tag{12.23}$$

である。電子静止系ではコンプトン散乱が行なわれ、電子静止系での光子は電子にエネルギーを与えてしまう。その結果元の系にもどっても、γ^2 倍になるということはない。観測者系での散乱光子のエネルギーは、観測者系でのエネルギー保存を考えることが見積もることができる。すなわち、$\gamma m_{\rm e}c^2 \gg \epsilon$ に注意すると

$$\epsilon_1 < \epsilon + \gamma m_{\rm e}c^2 \simeq \gamma m_{\rm e}c^2 \tag{12.24}$$

となる。多くの場合、不等号無視して

$$\epsilon_1 \simeq \gamma m_{\rm e}c^2 \tag{12.25}$$

と近似することが多い。

また、散乱断面積も Klein-Nishina によりどんどん小さくなる。

$$\sigma_{\rm c} = \sigma_{\rm T}\frac{3}{8}\left(\frac{\gamma\epsilon}{m_{\rm e}c^2}\right)^{-1}\left[\ln\left(\frac{2\gamma\epsilon}{m_{\rm e}c^2}\right)+\frac{1}{2}\right] \tag{12.26}$$

入手光子および電子が等方的と考えて、散乱によって放射される全エネルギーは、

$$P_{\rm compt} = \frac{4}{3}\sigma_{\rm T}c\gamma^2\beta^2U_{\rm ph}\left[1-\frac{63}{10}\frac{\gamma<\epsilon^2>}{m_{\rm e}c^2<\epsilon>}\right] \tag{12.27}$$

が得られる。$<\epsilon^2>$ および $<\epsilon>$ は $U_{\rm ph}$ で積分し平均した値である。

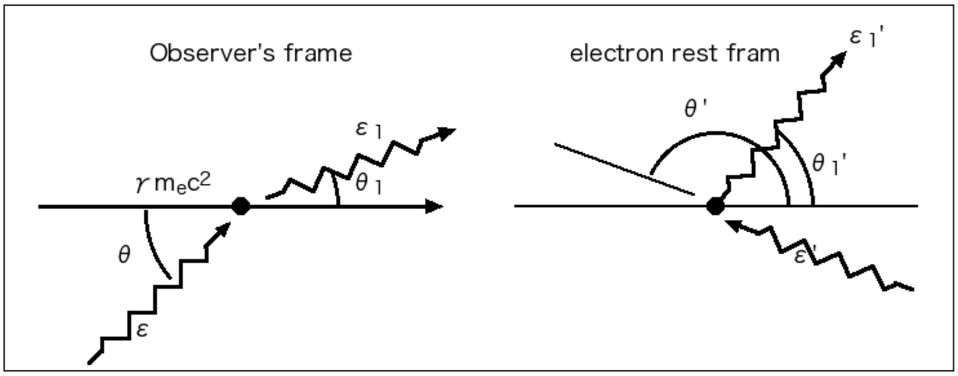


図 12.3: 逆コンプトン散乱の Kinematics

12.1.3　逆コンプトン散乱とシンクロトロン輻射の類似性

シンクロトロンの放射全エネルギーは

$$P_{\mathrm{sync}} = \frac{4}{3}c\gamma^2\beta^2 U_{\mathrm{B}} \tag{12.28}$$

$$U_{\mathrm{B}} = \frac{B^2}{8\pi} \tag{12.29}$$

であった。これと逆コンプトン散乱の放射全エネルギーは磁場のエネルギー密度をソフトフォトンの輻射エネルギー密度に書きかえたものに一致し、同一の電子により、逆コンプトン散乱とシンクロトロン輻射の両方が観測される場合は、

$$\frac{P_{\mathrm{sync}}}{P_{\mathrm{compt}}} = \frac{U_{\mathrm{B}}}{U_{\mathrm{ph}}} \tag{12.30}$$

となる。これは、電子が衝突する相手が静磁場であるか変動する磁場-電場であるかの違いに過ぎない。よって、静電場の場合も同様の輻射過程が存在するはずである。

12.2　一回の逆コンプトン散乱により放射される光子のスペクトル

12.2.1　等方的な単一エネルギー同士の電子と光子の場合

等方的な分布で、電子エネルギーが単一の場合に出力される散乱光子のスペクトルは以下の通りである。答のみを示す。

$$j(\epsilon_1) = \frac{N\sigma_{\mathrm{T}}F_0}{4\epsilon_0\gamma^2\beta^2}\begin{cases}(1+\beta)\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} - (1-\beta) & \frac{1-\beta}{1+\beta} < \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} < 1 \\ (1+\beta) - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}(1-\beta) & 1 < \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} < \frac{1+\beta}{1-\beta} \\ 0 & \mathrm{otherwise}\end{cases} \tag{12.31}$$

ただし、N は電子の個数密度 [個/cm^3]、F_0 は単位立体角当たりに飛ぶ入射光子の個数フラックス [個/$\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{sec} \cdot \mathrm{str}$] である。その結果、$N\sigma_{\mathrm{T}}F_0$ の単位は、[回/$\mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{sec} \cdot \mathrm{str}$]、$j$ の単位は [個/$\mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{sec} \cdot \mathrm{str}$] である。

β が小さい場合はトムソン散乱なのでスペクトルの形は変化しないが、電子のエネルギーが上がるにつれ、ブロードに分布することになる。

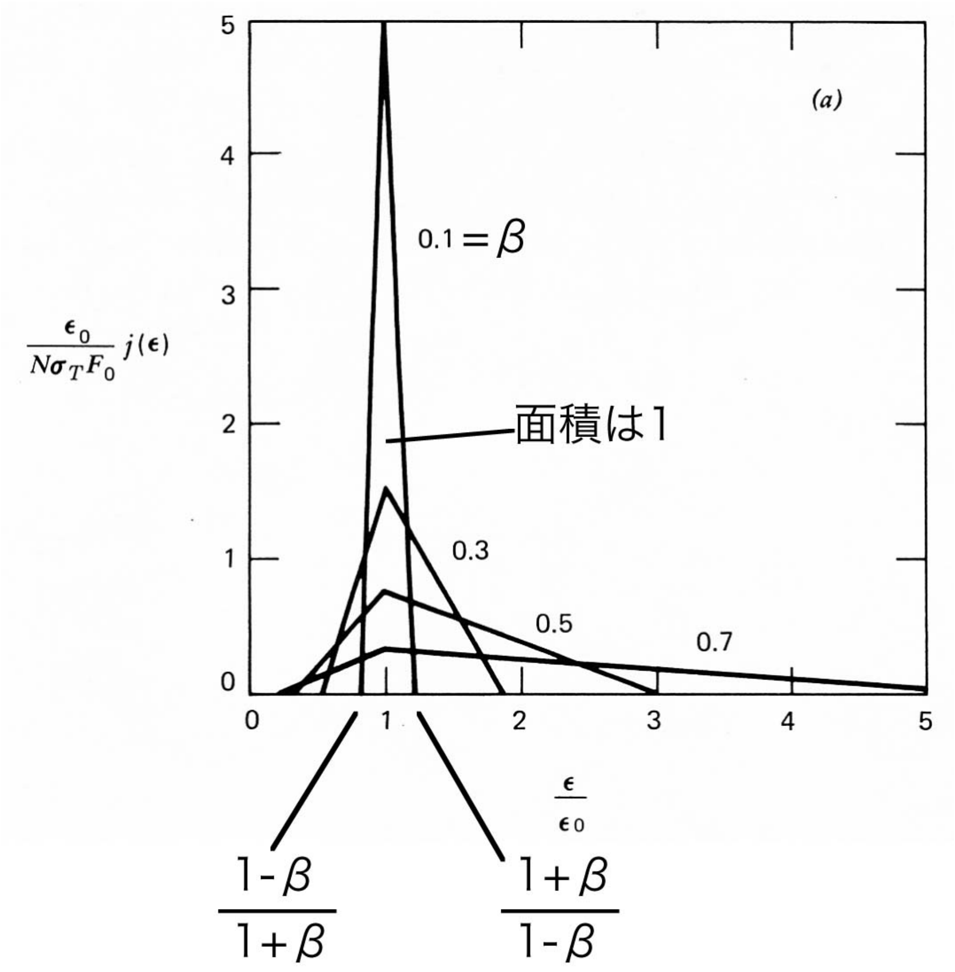


図 12.4: 等方的な単一エネルギー同士の電子と光子の逆コンプトン散乱により放射される散乱光子のスペクトル。

12.2.2 電子が巾関数的なスペクトルを持つ場合

(Normalization も含めていずれもう少しちゃんと書く)

電子の個数スペクトルを $\frac{dN_{\mathrm{e}}}{d\gamma}$、散乱光子のエネルギースペクトルを $\frac{dE}{dVd\epsilon_1dt}$ と書くと

$$\frac{dN_{\mathrm{e}}}{d\gamma}(\gamma) = N_0 \cdot \gamma^{-p} \tag{12.32}$$

$$\frac{dE}{dVd\epsilon_1dt}(\epsilon_1) = C \cdot \epsilon_1^{-(p-1)/2} \tag{12.33}$$

となる。電子の個数スペクトルの傾き $-p$ に対し、エネルギーインデックスとフォトンインデックスはそれぞれ

$$\alpha = -\frac{p-1}{2}, \Gamma = -\frac{p+1}{2} \tag{12.34}$$

となる。これは、シンクロトロンの場合と全く同じである。

12.3 多重逆コンプトン散乱により放射される光子のスペクトル

光学的に厚い物質における逆コンプトン散乱について説明する。

(未完もいいところ。ライビキや現代の宇宙論 p200-201 を読む)

電子エネルギーが非相対論的であっても、わずかながら光子にエネルギーを与えているため、光学的厚みが厚く多数回散乱が起こる場合は、その積分により光子のスペクトルに大きな影響を与えることになる)。

12.3.1 電子が熱的な分布を持つ場合の多重逆コンプトン散乱

コンプトン y パラメータというものを定義して議論する。

$$y \equiv \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\,(\text{系で逆コンプトン散乱により光子が得るエネルギーシフト比}) \tag{12.35}$$

$$= (\text{一回の散乱による光子のエネルギーシフト比}) \times (\text{平均散乱回数}) \tag{12.36}$$

系の光学的厚みを τ_{es} である場合、平均的な散乱回数は、光学的厚みが小さい時は τ_{es} であり、大きい場合は τ_{es}^2 で決まる。つまり、

$$(\text{平均散乱回数}) \simeq \mathrm{Max}(\tau_{\mathrm{es}}, \tau_{\mathrm{es}}^2) \tag{12.37}$$

となる。

電子が非相対論的であり温度 T_{e} の熱的な分布を持つ場合、一回の散乱で光子が得るエネルギー変化は

$$\Delta\epsilon_{\mathrm{NR}} = \frac{\epsilon}{m_{\mathrm{e}}c^2}(4kT_{\mathrm{e}} - \epsilon) \tag{12.38}$$

$$\to \frac{\epsilon}{m_{\mathrm{e}}c^2}4kT_{\mathrm{e}} \quad \mathrm{at}\ kT_{\mathrm{e}} \gg \epsilon \tag{12.39}$$

であり、電子が相対論的である場合は、

$$\Delta\epsilon_{\mathrm{R}} = 16\epsilon\left(\frac{4kT_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}c^2}\right)^2 \tag{12.40}$$

となる。

結果的に、y パラメータは

$$y_{\mathrm{NR}} = 4kT_{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{Max}(\tau_{\mathrm{es}}, \tau_{\mathrm{es}}^2) \tag{12.41}$$

$$y_{\mathrm{R}} = 16\left(\frac{4kT_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}c^2}\right)^2 \cdot \mathrm{Max}(\tau_{\mathrm{es}}, \tau_{\mathrm{es}}^2) \tag{12.42}$$

となる。

12.4　光学的に厚い物質での、コンプトン散乱、逆コンプトン散乱の実例

(AGN での Compton Thick Disk や、SN での Down Compton などを説明する。未完もいいところ、勉強しましょう)

12.5　半導体検出器で得るガンマ線スペクトル

Photoabsorption Peak 主に光電効果で全てのエネルギーが検出器内で失われた場合。

1.17MeV
1.33MeV

Compton Edge 検出器内でコンプトン散乱した場合に電子に最も大きなエネルギーを与えるのは、180 度散乱した場合。これは上限。

$1.17 - 0.21 = 0.96$MeV
$1.33 - 0.21 = 1.12$MeV

Back Scatter 検出器の反対側で 180 度散乱されたガンマ線が検出器で光電吸収。散乱の角度がこれより浅いので、これは下限。

$1.17 \to 0.21$MeV
$1.33 \to 0.21$MeV

Single Escape 検出器内で対生成しし消滅した 2 つの 511MeV のうち、1 つが逃げる。

$1.17 - 0.511 = 0.66$MeV
$1.33 - 0.511 = 0.82$MeV

Double Escape 検出器内で対生成し消滅した 2 つの 511MeV のうち両方が逃げる。

$1.17 - 0.511 \times 2 = 0.15$MeV
$1.33 - 0.511 \times 2 = 0.31$MeV

Pair Anihilation 別の所で対生成し、消滅した場合の対消滅線。

511keV

Ge Escape Ge の Escape。

1.17MeV $-$ 9.9keV $=$ 1.16MeV
1.33MeV $-$ 9.9keV $=$ 1.32MeV

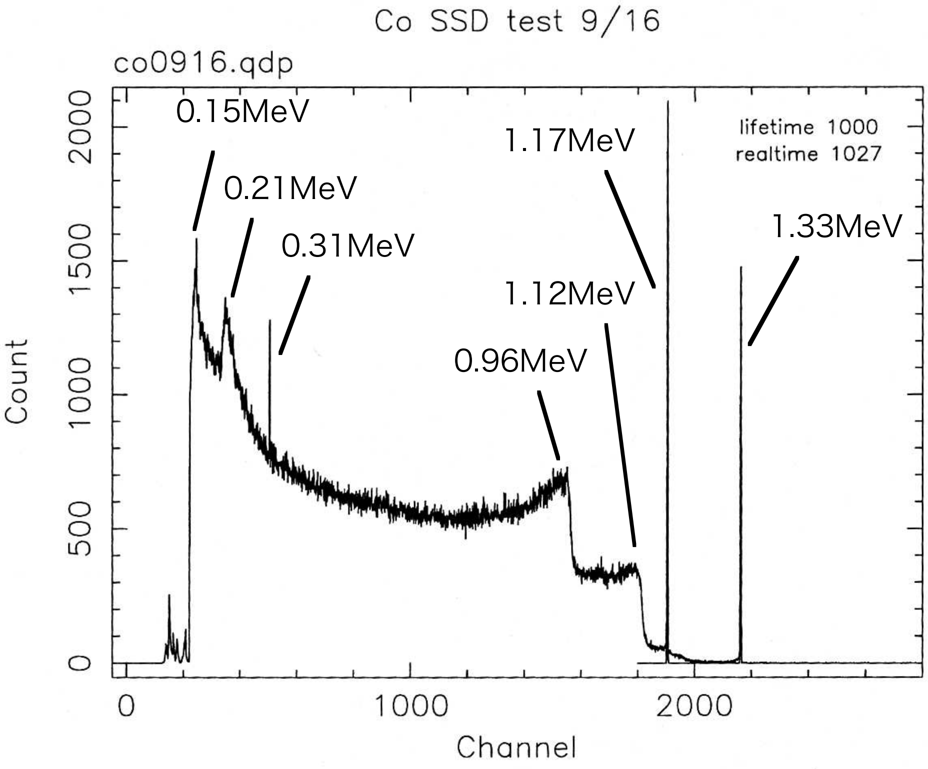


図 12.5: Ge 半導体検出器で得た ^{60}Co からの核ガンマ線スペクトル。

12.6 スニャエフ・ゼルドビッチ効果

12.6.1 原理とスペクトルシフト

CMB が銀河団の高温プラズマを通過する時に、逆コンプトン散乱を受け 3K 光子がエネルギーシフトをする。これをスニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ぶ。銀河団高温プラズマの密度と銀河団の大きさからトムソン散乱の光学的厚みを求めると、

$$n_{\rm e} \simeq 10^{-3}[{\rm cm}^{-3}] \tag{12.43}$$

$$R \simeq 1[{\rm Mpc}] \tag{12.44}$$

$$\tau_{\rm es} = n_{\rm e}R\sigma_{\rm T} = 10^{-3} \sim 10^{-2} \tag{12.45}$$

となる。高温プラズマの温度を考慮すると、この過程は電子が熱的な分布を持ち光学的に薄い非相対論的な場合の逆コンプトン過程となる。その結果 $y_{\rm NR}$ を求めると、

$$kT_{\rm e} \simeq 10{\rm keV} \tag{12.46}$$

$$y_{\rm NR} = \frac{4kT_{\rm e}}{m_{\rm e}c^2}\cdot\tau_{\rm es} \tag{12.47}$$

$$= 10^{-3} \sim 10^{-4} \tag{12.48}$$

となる。その結果、CMB のスペクトルの形は

$$T_{\rm CMB} = 2.73[{\rm K}] \rightarrow T_{\rm CMB} + \Delta T \tag{12.49}$$

$$\Delta T = y_{\rm NR}\cdot T_{\rm CMB} = 10^{-4} \sim 10^{-3}[{\rm K}] \tag{12.50}$$

となる。

ここで注意しなければならないのは、CMB も含め「黒体輻射」に浸かっている観測者にとってはスペクトルの形のみならず、絶対強度 (Normalization) も一意に決まっているということである。R-J 領域を見ると「黒体輻射」の場合は温度が高くなっても、単位周波数あたりの光子数は変化しない。しかし、ここで示したスニャエフ・ゼルドビッチ効果は散乱であり、光子の数は変化しない。つまり、スペクトルの形だけが温度の高い方へ純粋に横シフトした様に見える。そのため、温度が上がったとは言え、「黒体輻射」とは違い、R-J 領域では単位周波数あたりの光子数は減ることとなる。

図 12.7 はその様子を示したものである。R-J 側の 150GHz では光子数は減少し、Wien 側の 350GHz では光子数が増加していることが分かる。ちなみに、この Wien 側の増加はこの Komatsu etal. (1999) が世界で始めて検出に成功したものである。

12.6.2 銀河団までの距離を測定する

(アドリブで行なう)

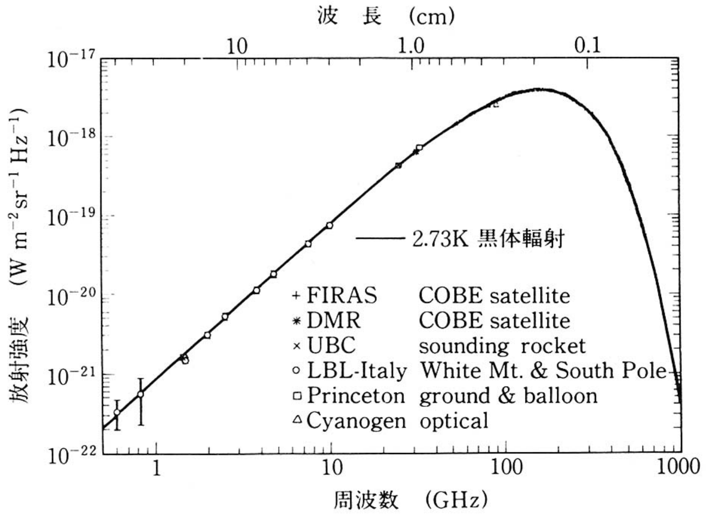


図10-4　宇宙背景放射の観測と黒体放射の理論的スペクトルとの比較［縦軸は対数目盛りになっていることに注意。］(G.F.Smoot&D.Scott,Phys.Rev.D,1996による)

図 12.6: CMB のスペクトル

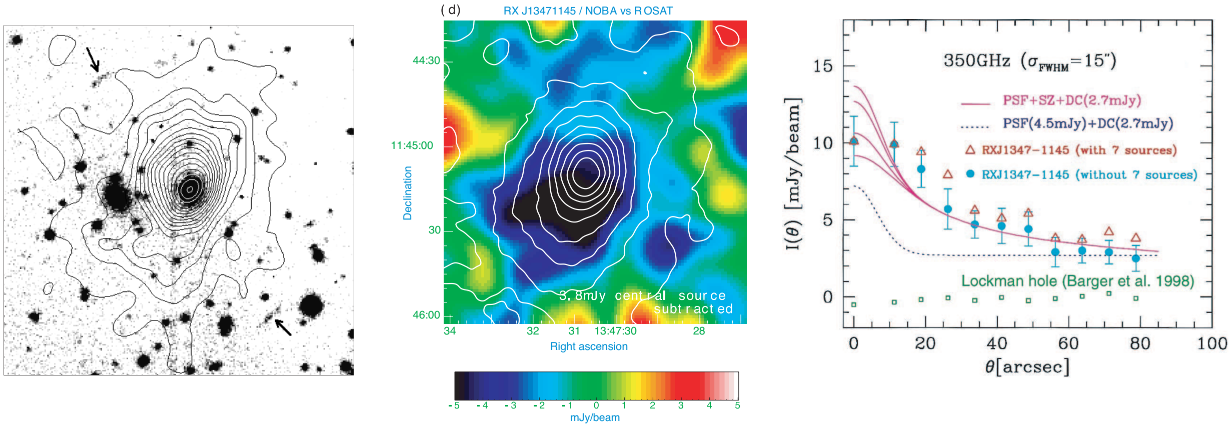


図 12.7: RX J1347 ± 1145 の SZ 観測。左: ROSAT HRI (Schindler etal. 1997)、中: SCUBA/150GHz (Komatsu etal. 2001)。右: SCUBA/350GHz による Radial Profile (Komatsu etal. 1999)。

第13章　シンクロトロン・(セルフ)コンプトン放射

非熱的宇宙の大きな共通点は、ほとんどの場合シンクロトロン輻射と逆コンプトン散乱による光子が同時に観測されることである。また、そのスペクトルは多くの場合でベキがかなり近い。これは、これら非熱的宇宙に潜む共通の物理– 粒子加速の物理 –が存在することを強く示唆する。その例を幾つか示していこう。

13.1　電波ローブからのX線放射

「あすか」による Fornax A (Kaneda etal 1995)、Cen B (Tashiro etal 1998) による観測により、電波ローブから非熱的X線放射が検出された。

電波はジェットによって銀河団空間に注入された高エネルギー電子とローブの磁場によるシンクロトロン輻射。X線は高エネルギー電子によるCMBの逆コンプトン散乱光子。両者には次の関係がある。

$$F_{\rm sync} \propto N_{\rm e}\cdot U_{\rm B} \tag{13.1}$$

$$F_{\rm compt} \propto N_{\rm e}\cdot U_{\rm CMB} \tag{13.2}$$

この内、$F_{\rm sync}$ と $F_{\rm compt}$ は観測量で、$U_{\rm CMB}$ は既知の値。よって、

$$\frac{F_{\rm sync}}{F_{\rm compt}} = \frac{U_{\rm B}}{U_{\rm CMB}} \tag{13.3}$$

$$U_{\rm B} = \frac{F_{\rm sync}}{F_{\rm compt}}U_{\rm CMB} \tag{13.4}$$

により磁場強度が求まる。また、逆コンプトン散乱の関係より電子の個数 (スペクトル)、つまり $U_{\rm e}$ が求まる。

この $U_{\rm B}$、$U_{\rm CMB}$、$U_{\rm e}$ の3つがローブの基本的な物理状態を決めている (図13.1の右図)。磁場と電子が一致する場合 (equipartitioin) もあるが、電子のエネルギー密度の方が一般的には高い。また、磁場はCMBを越えることはないが、電子はCMBを越える場合がある。

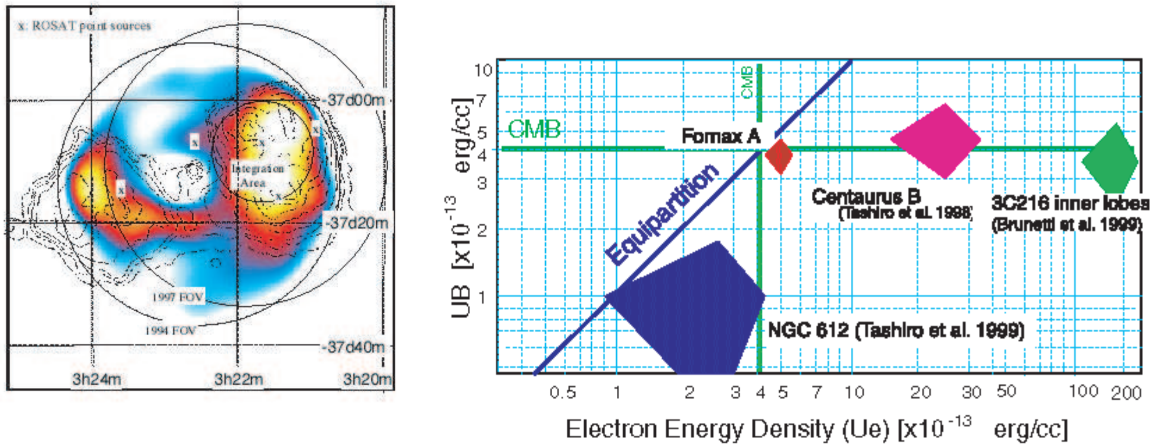


図13.1: 左: 電波銀河 Fornax A の電波ローブの電波 (コントア) と「あすか」によるX線画像 (Kaneda etal. 1995) 。右: 色々な電波ローブでの磁場、電子、CMBエネルギー密度の比較。

13.2　超新星残骸からの非熱的輻射と宇宙線加速

13.2.1　SN1006

Koyama etal. (1995) は、「あすか」による SN1006 の観測を通じて超新星残骸からの非熱的輻射を発見した。また、Tanimori etal. (1998) は CANGAROO を用いて SN1006 を観測し、TeV ガンマ線の輻射を発見した。

先ほどの電波ローブと同じ手法で磁場を求めるとともに、スペクトルの形から電子の最高エネルギーを求めることができる。その結果、磁場は

$$B = 6.5 \pm 2[\mu\mathrm{G}] \tag{13.5}$$

(13.6)

である。電子の最高エネルギーは

$$\epsilon_1 = \gamma^2 \epsilon \tag{13.7}$$

$$60[\mathrm{TeV}] \simeq \gamma^2 \cdot 2.7[\mathrm{K}] = \gamma^2 \cdot 2.3 \times 10^{-4}[\mathrm{eV}] \tag{13.8}$$

$$\gamma \simeq 5.1 \times 10^8 \tag{13.9}$$

$$E_{\mathrm{e}}(\mathrm{Max}) = \gamma m_{\mathrm{e}} c^2 \simeq 2.6 \times 10^{14}\mathrm{eV} \tag{13.10}$$

となる。

TeV ガンマ線は超高エネルギー電子によるが、電子がこのエネルギーまで加速されているのであれば、陽子も加速されない理由はない。そうすると、陽子は 10^{14}eV まで加速されていることとなる。

他の超新星残骸でも同様の加速が起こっており、同様の磁場強度であると考えると、加速は $\sim$ 500TeV 程度が限界と考えられる。宇宙線の" knee" は、$10^{15.5}$eV 程度。よって、今一つ足りないと考えられているようである。

(非熱的、熱的粒子の Total エネルギーを追記)

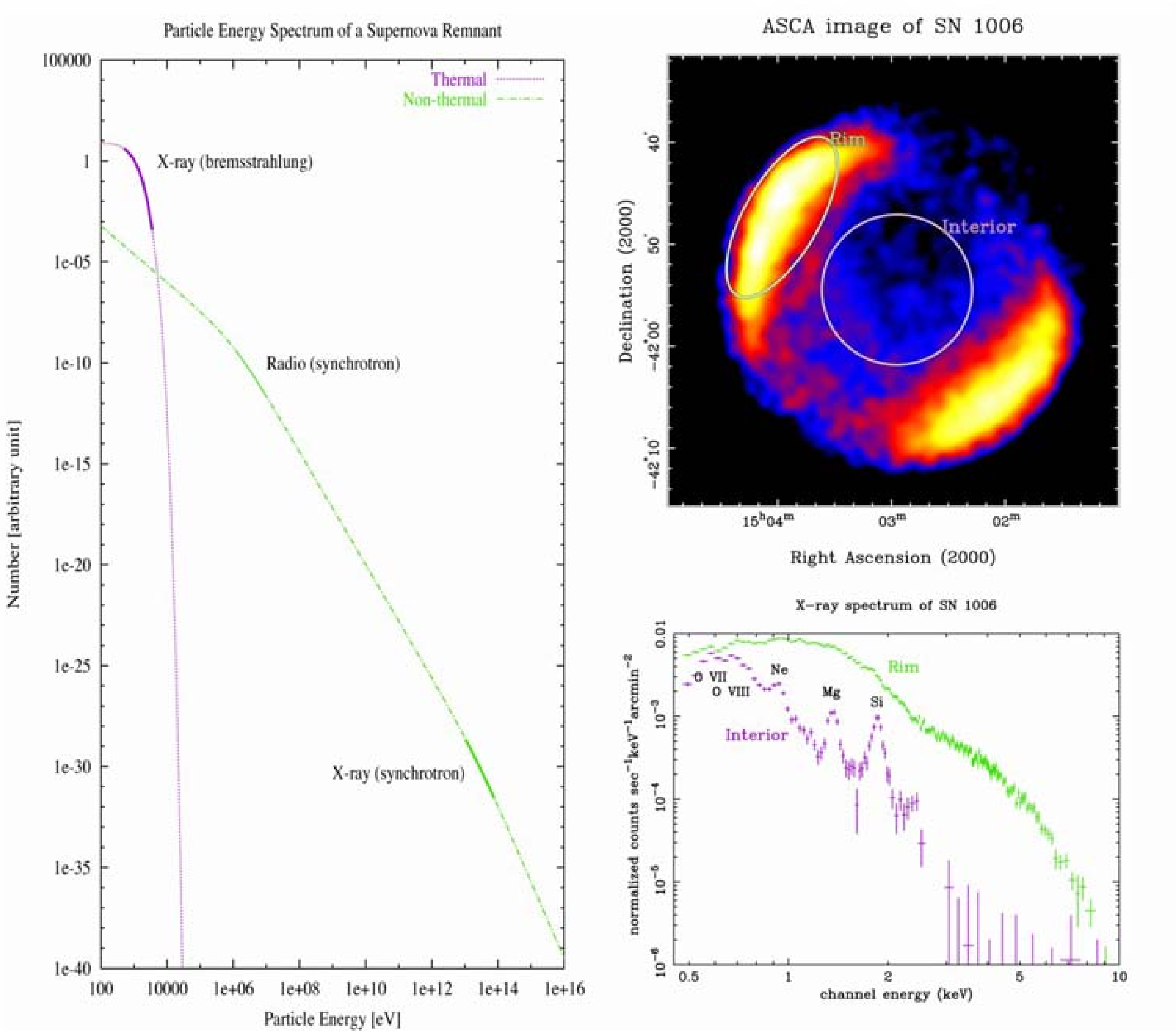


図 13.2: 「あすか」による SN1006 の観測結果 (Koyama etal. 1995)。

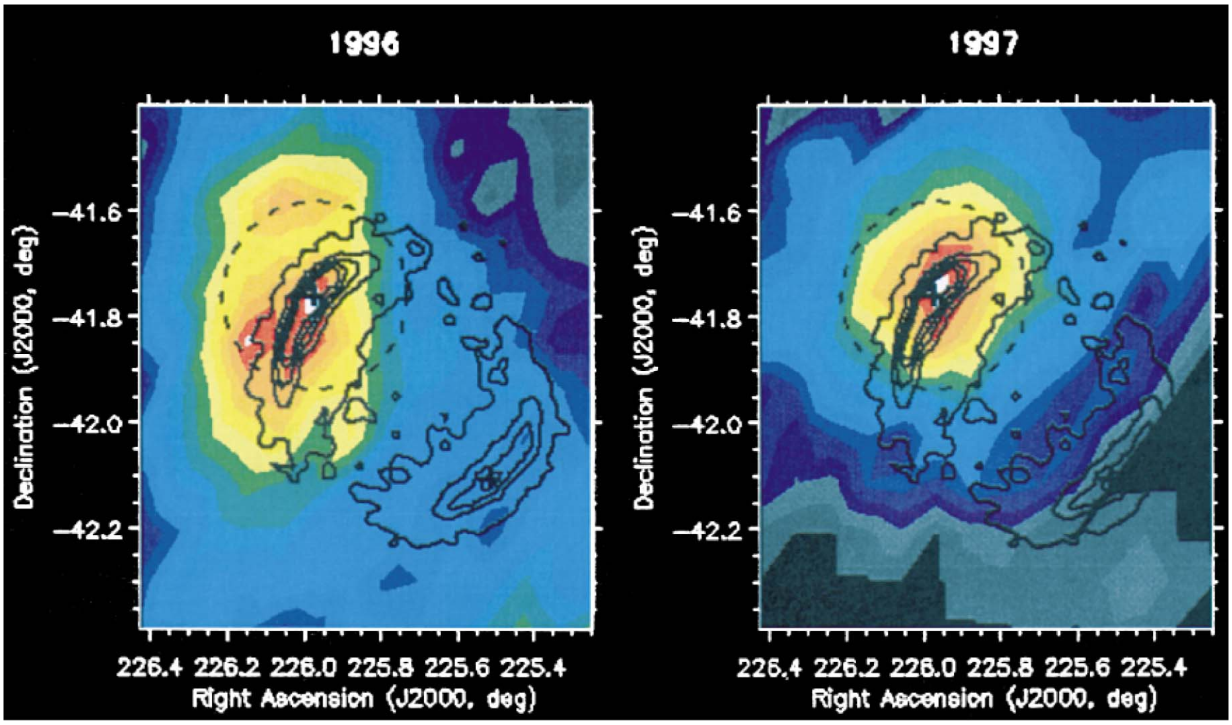

1996
1997
Declination (J2000, deg)
Right Ascension (J2000, deg)
−41.6
−41.8
−42.0
−42.2
226.4
226.2
226.0
225.8
225.6
225.4
Declination (J2000, deg)
Right Ascension (J2000, deg)
−41.6
−41.8
−42.0
−42.2
226.4
226.2
226.0
225.8
225.6
225.4

図 13.3: CANGAROO による SN1006 の観測結果 (Tanimori etal. 1995)。

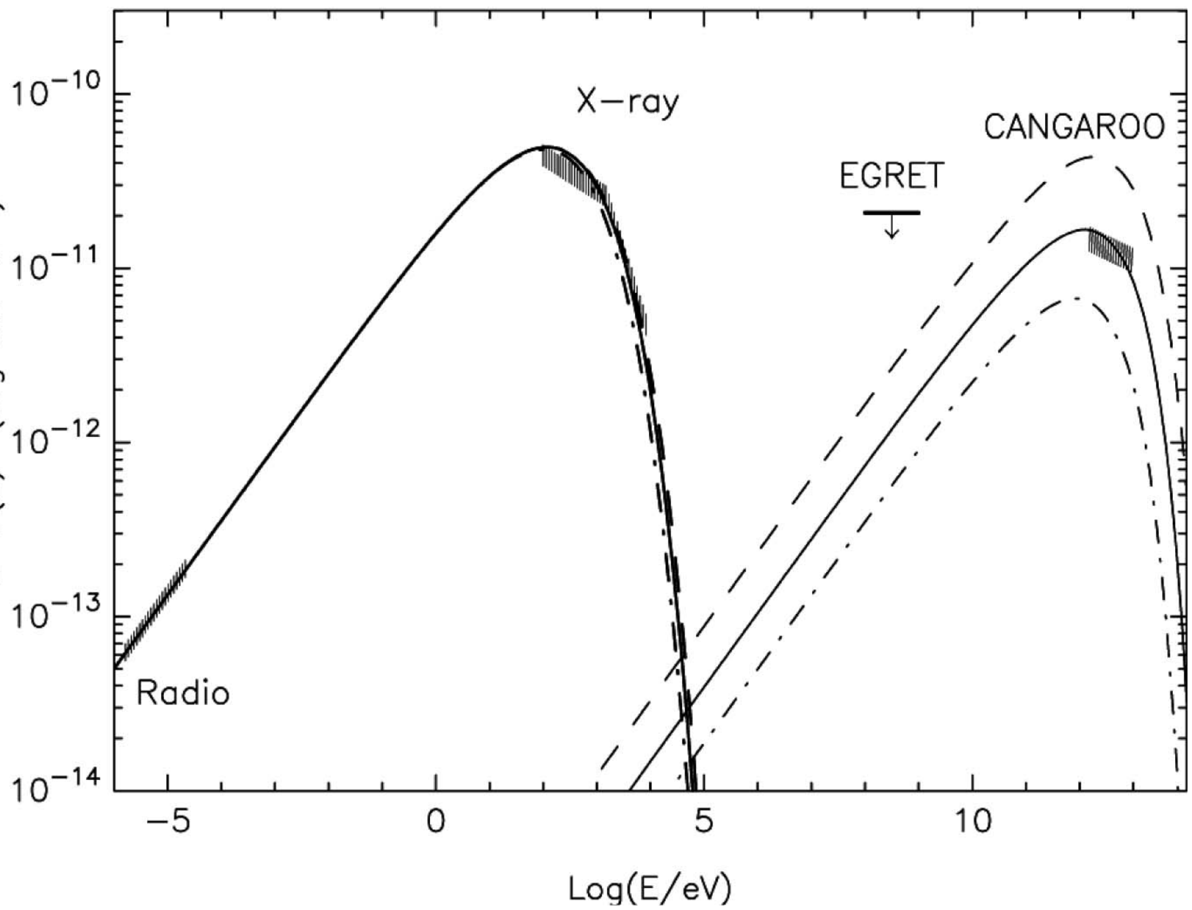


図 13.4: Wide Band スペクトル。

13.2.2 RX J1713.7-3946

(π^0decay について書く) ($\sim 10^{5}0$[ergs])

13.3 Blazar と Synchrotron Self-Compton モデル

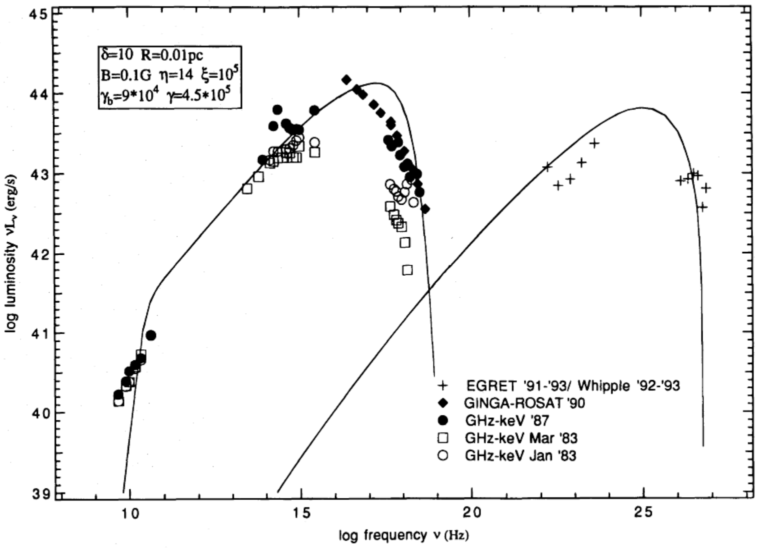


FIG. 2.—Model fit for Mrk 21 (SSC). Best-fit parameter values are shown within the figure. Nonsimultaneous data are compiled in Zdiarski & Krolik (1993) and Lin et al. (1994).

図 13.5: Mrk421 のスペクトル。

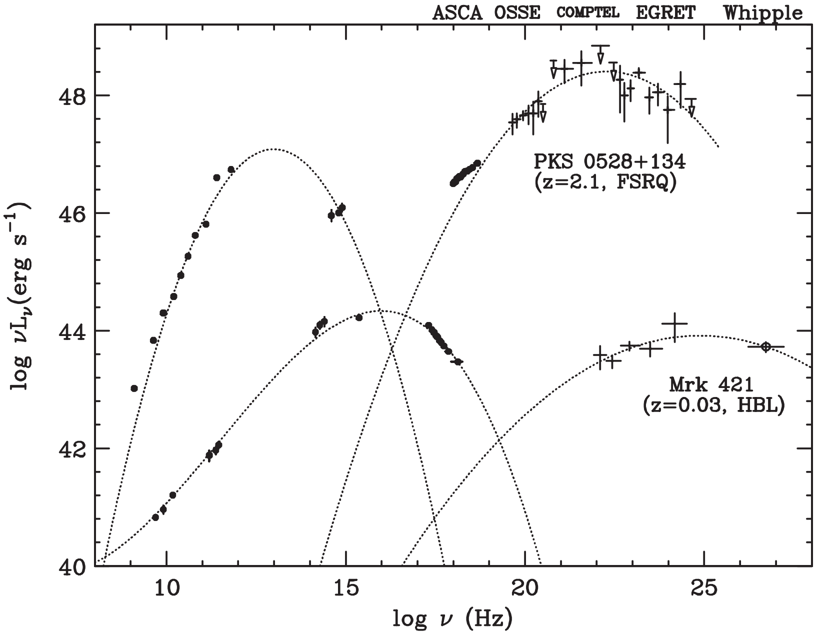


Fig. 1. The multi-frequency spectrum obtained from the simultaneous observations of Mkn 421 and PKS 0528+ 134. The dotted line shows the results of fit to a third-order polynomial function for low and high energy components.

図 13.6: Mrk421 と PKS0528 のスペクトル。

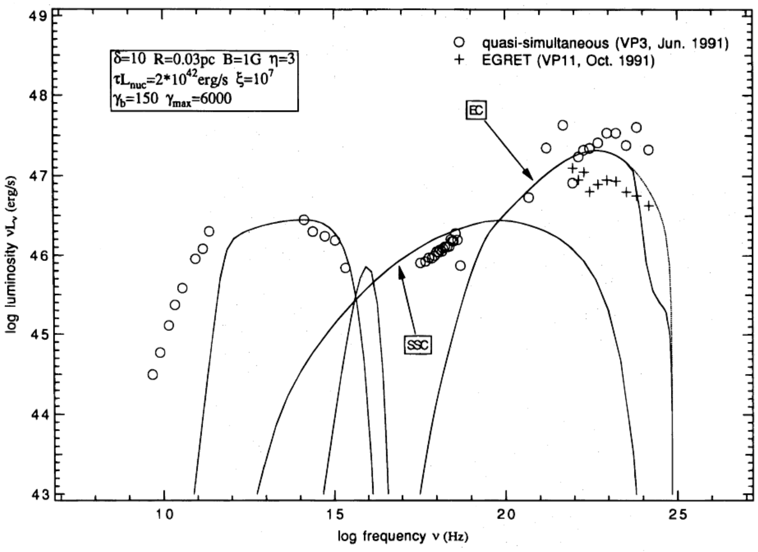


FIG. 1.—Model fit for 3C 279 (EC + SSC). Dotted lines are results without pair absorption. Best-fit parameter values are shown within the figure. Quasi-simultaneous multifrequency data (1991 June high state) are from Makino et al. (1993) and F. Makino & T. Ohashi, private communication; EGRET data (1991 October low state) from Kniffen et al. (1993).

図 13.7: 3C279 のスペクトル。

13.3.1 コンプトンカタストロフィとビーミング

13.3.2 SSC モデル

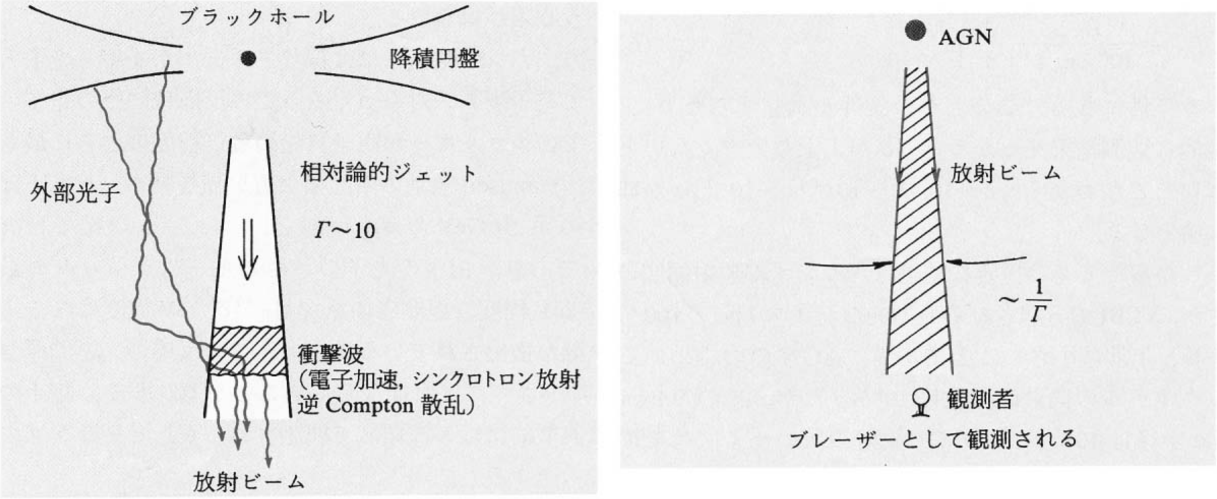

ブラックホール
降積円盤
相対論的ジェット
外部光子
$\Gamma \sim 10$
衝撃波
（電子加速，シンクロトロン放射
逆 Compton 散乱）
放射ビーム
AGN
放射ビーム
$\sim \frac{1}{\Gamma}$
観測者
ブレーザーとして観測される

図 13.8: Blazar のモデル (高原 1998)。

第14章　宇宙線とフェルミ加速

ここではまず、加速や減速のメカニズムによらず、粒子のエネルギースペクトルを記述する一般的な Diffusion-Loss 方程式を示す。次に色々なエネルギーロス過程を、読者の便利のためにまとめておく (一部は既に述べられているものをまとめただけ)。次に粒子加速に最も重要な役割を果たしているとされているフェルミ加速を説明する。さらに、両者を組み合わせた場合に得られる粒子のエネルギースペクトルを示す。

14.1　輻射などによる相対論的電子のエネルギーロスのまとめ

(Higher Energy Astrophysics Vol.2 p274-278: 間違っていないとは思うが、本当に使う時には確認をすること)

完全電離プラズマ中での制動輻射

密度 n の完全電離水素プラズマに Lorentz 因子 γ の相対論的電子が突っ込んだ場合の、電子 1 個当たりの制動輻射によるエネルギーロスレートは次のように書ける。

$$-\frac{1}{E}\left(\frac{dE}{dt}\right) = 7.0\times10^{-17}\left(\frac{n}{1\mathrm{cm}^{-3}}\right)(\ln\gamma+0.36)\quad[\mathrm{sec}^{-1}] \tag{14.1}$$

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = 7.0\times10^{-17}\left(\frac{n}{1\mathrm{cm}^{-3}}\right)\left(\frac{E}{\mathrm{eV}}\right)(\ln\gamma+0.36)\quad[\mathrm{eV\ sec}^{-1}] \tag{14.2}$$

中性水素中での制動輻射

密度 n の中性水素に Lorentz 因子 γ の相対論的電子が突っ込んだ場合の、電子 1 個当たりの制動輻射によるエネルギーロスレートは次のように書ける。

$$-\frac{1}{E}\left(\frac{dE}{dt}\right) = 3.66\times10^{-16}\left(\frac{n}{1\mathrm{cm}^{-3}}\right)\quad[\mathrm{sec}^{-1}] \tag{14.3}$$

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = 3.66\times10^{-16}\left(\frac{n}{1\mathrm{cm}^{-3}}\right)\left(\frac{E}{\mathrm{eV}}\right)\quad[\mathrm{eV\ sec}^{-1}] \tag{14.4}$$

Ionization Loss

密度 n の中性水素に Lorentz 因子 γ の相対論的電子が突っ込んだ場合の、電子 1 個当たりの電離損失によるエネルギーロスレートは次のように書ける。

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = 7.64\times10^{-9}\left(\frac{n}{1\mathrm{cm}^{-3}}\right)(3\ln\gamma+19.8)\quad[\mathrm{eV\ sec}^{-1}] \tag{14.5}$$

中性水素の場合のエネルギー損失は Ionization Loss と制動輻射の 2 つがある。Ionization Loss は log 的にしかエネルギーに依存しないのに対し、制動輻射はエネルギーに比例する。よって、高エネルギー (600MeV 以上???) では制動輻射が卓越する。

シンクロトロン輻射

Lorentz 因子 γ の相対論的電子が磁場に対して角度 θ を持って突っ込んだ場合の、電子 1 個当たりのシンクロトロン輻射によるエネルギーロスレートは次のように書ける。

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = 2\sigma_{\rm T}c\beta^2\gamma^2U_{\rm B}\sin^2\theta \tag{14.6}$$

$$U_{\rm B} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{B}{1{\rm G}}\right)^2 \quad [{\rm ergs\ cm^{-3}}] \tag{14.7}$$

$$= 2.48\times10^{-2}\left(\frac{B}{1\mu{\rm G}}\right)^2 \quad [{\rm eV\ cm^{-3}}] \tag{14.8}$$

電子の飛ぶ向きが等方的な場合、又は磁場がランダムな場合は、

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{4}{3}\sigma_{\rm T}c\beta^2\gamma^2U_{\rm B} \tag{14.9}$$

$$= 6.6\times10^{-16}\gamma^2\left(\frac{B}{1\mu{\rm G}}\right)^2 \quad [{\rm eV\ sec^{-1}}] \tag{14.10}$$

と書ける。シンクロトロンによる冷却時間は以下の通りである (数字は確認する必要あり)。

$$\tau_{\rm cool} = \frac{\gamma m_{\rm e}c^2}{\left(\frac{dE}{dt}\right)} \tag{14.11}$$

$$= 7.7\times10^{20}\gamma^{-1}\left(\frac{B}{1\mu{\rm G}}\right)^{-2} \quad [{\rm sec}] \tag{14.12}$$

逆コンプトン散乱

Lorentz 因子 γ の相対論的電子が等方的な輻射場に突っ込んだ場合の、電子 1 個当たりの逆コンプトン散乱によるエネルギーロスレートは次のように書ける。

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{4}{3}\sigma_{\rm T}c\beta^2\gamma^2U_{\rm ph} \tag{14.13}$$

$$= 2.66\times10^{-14}\gamma^2\left(\frac{U_{\rm ph}}{1{\rm eV\ cm^{-3}}}\right) \quad [{\rm eV\ sec^{-1}}] \tag{14.14}$$

と書ける。

14.2 Diffusion-Loss 方程式とフェルミ機構

14.2.1 Diffusion-Loss 方程式

(Longari「High Energy Astrophysics Vol.2」p278-281、小田「宇宙線」p396-397)

まず、エネルギー $E \sim E+\Delta E$ の中に居る粒子の個数の時間的変化を考える。単位時間 dt あたりに E 以下から $E \sim E+\Delta E$ に入ってくる粒子数を $\phi(E)$、$E \sim E+\Delta E$ から $E+\Delta E$ 以上へ抜ける粒子数を $\phi(E+\Delta E)$ とすると、$E \sim E+\Delta E$ の中に居る粒子数の変化は、

$$\frac{dN(E,t)}{dt}dE = \phi(E,t)-\phi(E+dE,t) \tag{14.15}$$

$$= -\frac{\partial\phi(E,t)}{\partial E}dE \tag{14.16}$$

と書ける。E 以下からの流れ込みは、粒子加速によるものである。エネルギー E の粒子は単位時間 dt に dE の加速を受けるのであれば、$t-dt \sim t$ の間に $E-\Delta E \sim E$ の範囲に入っている粒子が E を通り過ぎることになる。その個数は

$N(E)dE$ なので、

$$N(E)dE = \phi(E)dt \tag{14.17}$$

$$N(E)\frac{dE}{dt} = \phi(E) \tag{14.18}$$

と書ける。加速効率 $-b(E)$ と書くと

$$-b(E) = \frac{dE}{dt} \tag{14.19}$$

$$N(E)\frac{dE}{dt} = \phi(E) = -b(E)N(E) \tag{14.20}$$

となる。$b(E)$ は、符合がプラスであれば減速、マイナスであれば加速である。以上より

$$\frac{dN(E,t)}{dt}dE = -\frac{\partial\phi(E,t)}{\partial E}dE \tag{14.21}$$

$$\frac{dN(E,t)}{dt} = -\frac{\partial\phi(E,t)}{\partial E} \tag{14.22}$$

$$= \frac{\partial}{\partial E}[b(E)N(E)] \tag{14.23}$$

となる。

以上は、粒子加速もしくは (エネルギーロス) のみを考えたが、外部からの粒子抽入、粒子拡散、エネルギーに依らずある確率で系からエスケープする過程などを考える必要がある。単位時間当たりの粒子抽入を $Q(E)$、3 次元的な拡散定数を D、エネルギーによらず確率的に失われる場合のエスケープ時間を $t_{\rm esc}$ と書くと、上記の式は

$$\frac{dN(E,\vec{x},t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial E}[b(E,\vec{x},t)N(E,\vec{x},t)] + D\nabla^2 N(E,\vec{x},t) + Q(E,\vec{x},t) - \frac{N(E,x,t)}{t_{\rm esc}} \tag{14.24}$$

となる。これを Diffusion-Loss 方程式と呼ぶ。

14.2.2 フェルミ機構

(Gaisser「素粒子と宇宙」 p141-142」, 小田「宇宙線」p396-397)

1 回の加速過程によるエネルギーの増分がエネルギーに比例する場合に、得られる粒子のエネルギースペクトルについて考察する。簡単のため 3 次元的な拡散と、$E > E_0$ での粒子抽入がなく、一方でエネルギーによらず確率的に失われる過程のみを考える (フェルミ機構)。

Diffusion-Loss 方程式を使わない方法

まず、Diffusion-Loss 方程式を直接には使わない方法で説明する (中身は全く同じだが)。増分の比例定数を η とし、元々のエネルギーを E_0、n 回の加速過程が終了した時のエネルギーを E_n と書くと、エネルギー E になるのに必要な加速過程の回数は、

$$\Delta E = \eta E \tag{14.25}$$

$$E_n = E_0(1+\eta)^n \tag{14.26}$$

$$n = \frac{\ln(E/E_0)}{\ln(1+\eta)} \tag{14.27}$$

となる。1 回の加速過程の間に粒子が失われる確率を $P_{\rm esc}$ とすると、n 回の加速過程後に領域に留まる確率は $(1-P_{\rm esc})^n$ である。よって、E 以上のエネルギーに加速される粒子の割合、すなわち積分エネルギースペクトル $N(>E)$ は、

$$N(>E) \propto \sum_{m=n}^{\infty}(1-Pesc)^m = \frac{(1-P_{\rm esc})^n}{P_{\rm esc}} \tag{14.28}$$

である。よって、n を代入すると、

$$N(>E) \propto \frac{1}{P_{\rm esc}}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\gamma} \tag{14.29}$$

$$\gamma = \frac{\ln[1/(1-P_{\rm esc})]}{\ln(1+\eta)} \simeq \frac{P_{\rm esc}}{\eta} \tag{14.30}$$

が得られる。ただし、$\ln(1+x) = x - (x^2/2) + (x^3/3) - ...$ である。加速過程の時間間隔を $t_{\rm coll}$ とすると、典型的な逃げ出し時間 ($1/e$ になる時間) は、

$$t_{\rm esc} = \frac{t_{\rm coll}}{P_{\rm esc}} \tag{14.31}$$

となる。一方、加速のみで逃げ出しがない場合に微分形でエネルギー変化を書くと

$$\frac{dE}{dn} = \eta E \tag{14.32}$$

$$E = E_0 \exp(n\eta) \tag{14.33}$$

加速過程の時間間隔を $t_{\rm coll}$ なので、n を時刻 t で書くと

$$n = \frac{t}{t_{\rm coll}} \tag{14.34}$$

$$t_{\rm acc} \equiv \frac{t_{\rm coll}}{\eta} \tag{14.35}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d(nt_{\rm coll})} = \frac{\eta}{t_{\rm coll}}E = \frac{1}{t_{\rm acc}}E \tag{14.36}$$

$$E = E_0 \exp\left(\frac{\eta}{t_{\rm coll}}t\right) = E_0 \exp\left(\frac{t}{t_{\rm acc}}\right) \tag{14.37}$$

となる。よって、$t_{\rm esc}$ と $t_{\rm acc}$ を使うと積分エネルギースペクトルは

$$N(>E) \propto \frac{1}{P_{\rm esc}}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\gamma} \tag{14.38}$$

$$\gamma = \frac{P_{\rm esc}}{\eta} = \frac{1}{\eta}\frac{t_{\rm coll}}{t_{\rm esc}} = \frac{t_{\rm acc}}{t_{\rm esc}} \tag{14.39}$$

となる。積分形のエネルギースペクトルだと使いにくいかも知れないので、普通の微分形で書くことにする。

$$N(E) \propto E^{-\alpha} \tag{14.40}$$

$$N(>E) = \int_E^\infty N(E')dE' \propto \int_E^\infty E'^{-\alpha}dE' = \left[-\frac{1}{\alpha}E'^{-(\alpha-1)}\right]_E^\infty \propto E^{-(\alpha-1)} \tag{14.41}$$

$$N(>E) \propto E^{-\gamma} \tag{14.42}$$

$$\alpha = \gamma + 1 \tag{14.43}$$

であるから、最終的に

$$N(E) \propto \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\alpha} \tag{14.44}$$

$$\alpha = 1 + \frac{t_{\rm acc}}{t_{\rm esc}} \tag{14.45}$$

が得られる。

Diffusion-Loss 方程式を使う方法

加速によるエネルギーの増分が、元のエネルギーに比例し、エネルギーによらず確率的に失われる過程のみを考える場合、上で使用した加速時間および逃げ出し時間を $t_{\rm acc}$、$t_{\rm esc}$ は微分形では以下のように定義できる。

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{1}{t_{\rm acc}}E \tag{14.46}$$

$$\frac{dN}{dt} \equiv \frac{1}{t_{\rm esc}}N \tag{14.47}$$

定常状態を仮定し、3 次元的な拡散と、$E > E_0$ での粒子抽入がない場合の Dffusion-Loss 方程式に上記の式を代入すると、

$$q(E > E_0) = 0, \quad D = 0 \tag{14.48}$$

$$\frac{dN(E,t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial E}[b(E)N(E,t)] - \frac{N(E,t)}{t_{\rm esc}} = 0 \tag{14.49}$$

$$-b(E) = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{t_{\rm acc}}E \tag{14.50}$$

$$\frac{d}{dE}[\frac{1}{t_{\rm acc}}E \cdot N(E)] + \frac{N(E)}{t_{\rm esc}} = 0 \tag{14.51}$$

$$\frac{dN(E)}{dE} = -\frac{1}{E}\left(1 + \frac{t_{\rm acc}}{t_{\rm esc}}\right)N(E) \tag{14.52}$$

これを解くと、

$$N(E) = KE^{-\alpha} \tag{14.53}$$

$$K = t_{\rm acc}\int_0^{E_0} q(E')E'^{t_{\rm acc}/t_{\rm esc}}dE' \tag{14.54}$$

$$\alpha = 1 + \frac{t_{\rm acc}}{t_{\rm esc}} \tag{14.55}$$

となる。

14.3 フェルミ加速

「フェルミ加速」と言った場合には 1 次と 2 次の 2 種類のフェルミ加速がある。まず、2 次のフェルミ加速を説明する。

14.3.1 分子雲との衝突による 2 次のフェルミ加速

(小田「宇宙線」、高原「天体高エネルギー現象」、Gaisser「素粒子と宇宙」のミックス)

星間ガス中の密度の高い領域である星間雲は、10km/s 程度の速度でランダムに運動している。星間雲では磁場が貫かれており、周囲に比べ磁場が強い。この星間雲に (相対論的速度を持つ) 宇宙線が近付くと強い磁場により反射される。磁場によるこの反射は完全弾性衝突となるので、星間雲が静止している場合には、同じ速さで反射される。

もしも星間雲が動いており宇宙線が正面衝突すると、宇宙線の速さは星間雲の 2 倍の速さを新たにもらうので、加速されることになる。しかし、宇宙線が星間雲に追突する形でぶつかると、今度は減速されることとなる。加速減速量は同じなので、これだけでは加速されない。

しかし、正面衝突と追突ではわずかに正面衝突する確率の方が高い。よって、何度も衝突を繰り返すうちに、統計的に加速が行なわれることになる。

さて、これを式で示そう。

エネルギー増加率と加速時間

まず、簡単な特殊相対論の復習。全エネルギー (運動エネルギー + 静止エネルギー)E を持つ相対論的粒子を考える。この粒子と θ をなす方向を V で進む系が見るこの粒子の全エネルギーは E' は、次のように書ける。

$$\beta = V/c, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14.56}$$

$$E'/c = \gamma(E/c - \beta p \cos\theta) \tag{14.57}$$

$$E' = \gamma(E - \beta pc \cos\theta) \tag{14.58}$$

ここで、粒子は相対論的な速度なので

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \rightarrow pc \tag{14.59}$$

$$E' \rightarrow E\gamma(1 - \beta\cos\theta) \tag{14.60}$$

これは光子の場合も同じ (コンプトンの所でやった)。

次に、フェルミ加速について考える。星間雲の速さを V とし、これに実験室系でエネルギー E_1 の宇宙線が正面衝突し反射される場合を考える。星間雲 (宇宙線ではない) のローレンツ因子を γ、$\beta = V/c$ とすると、星間雲の系で見える宇宙線のエネルギー E'_1 は次のように書ける。

$$\beta = V/c, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \theta = \pi \tag{14.61}$$

$$E'_1 = E_1\gamma(1+\beta) \tag{14.62}$$

次に、この宇宙線は星間雲の進む向きと同じ方向へ放出されると、E'_1 をもう一度ローレンツ変換することになる。最終的に反射された宇宙線の実験室系でのエネルギーを E_2 とすると、

$$E_2 = E'_1\gamma(1+\beta) = E_1\gamma^2(1+\beta)^2 = E_1\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2} \tag{14.63}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2} = 1 + \frac{2\beta(\beta+1)}{1-\beta^2} \tag{14.64}$$

$$\beta \ll 1 \rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 1 + 2\beta = 1 + 2\frac{V}{c} \tag{14.65}$$

となる。一方、衝突する場合は符合が逆になる。この座標変換によってエネルギーの受渡しが行なわれる構造は実は逆コンプトンと同じである。

一方衝突する頻度は、正面衝突と追突それぞれ $c+V$、$c-V$ に比例するので (宇宙線は相対論的粒子とする)、平均的に 1 回の衝突で増加する宇宙線のエネルギーの割合は、

$$\frac{(c+V)(2V/c) + (c-V)(-2V/c)}{(c+V)+(c-V)} = 2\left(\frac{V}{c}\right)^2 \tag{14.66}$$

$$E \rightarrow E\left[1 + 2\left(\frac{V}{c}\right)^2\right] \tag{14.67}$$

となる。「2 次」というのは、エネルギー増加分がこの分子雲の速度の 2 乗に比例するところから来ている。

以上は 1 次元的な状況を考えたが、実際には 3 次元的に衝突し、3 次元的に散乱される。そのことを考慮に入れると、1 回の衝突により宇宙線のエネルギーは

$$E \rightarrow E\left[1 + \frac{4}{3}\left(\frac{V}{c}\right)^2\right] \tag{14.68}$$

$$\eta = \frac{4}{3}\left(\frac{V}{c}\right)^2 \tag{14.69}$$

となる (「素粒子と宇宙物理」p144)。

宇宙線の星間雲との平均衝突時間を $t_{\rm coll}$ とすると、単位時間あたりの衝突回数は $1/t_{\rm coll}$ なので、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{t_{\rm coll}} \times \frac{4}{3}\left(\frac{V}{c}\right)^2 E \tag{14.70}$$

となる。

もし、輻射などによるエネルギー損失や、拡散による逃げ出しがない場合は、

$$E = E_0 \exp(\frac{t}{t_{\rm acc}}), \quad t_{\rm acc} = \frac{3}{4}\left(\frac{c}{V}\right)^2 t_{\rm coll} \tag{14.71}$$

となる。つまり、時間と共に指数関数的にエネルギーを増加させることとなる。また、大きいエネルギーを持つ粒子ほどさらに大きなエネルギーを得ると言うことになる (金持ちはさらに金持ちになるというような言い方を良くする)。

エネルギースペクトル

星間雲の間隔を l と置くと、平均衝突時間 $t_{\rm coll}$ は 3 次元的に考えると、

$$t_{\rm coll} = \frac{l}{3c} \tag{14.72}$$

である。逃げ出し時間 $t_{\rm esc}$ は、エネルギーによらず一定だとすると、前の章で示したエネルギースペクトルの形を以下のようにすぐにもとめることができる。

$$N(E) \propto E^{-\alpha} \tag{14.73}$$

$$\alpha = 1 + \frac{t_{\rm acc}}{t_{\rm esc}} = 1 + \frac{lc}{4V^2}\frac{1}{t_{\rm esc}} \tag{14.74}$$

実際に観測される宇宙線のスペクトルは

$$N(E) \propto E^{-(2.0\sim2.2)} \tag{14.75}$$

$$\alpha = 1 + \frac{t_{\rm acc}}{t_{\rm esc}} = 1 + \frac{lc}{4V^2}\frac{1}{t_{\rm esc}} \tag{14.76}$$

である。よって、分子雲との衝突による加速で実際の宇宙線を説明するには、

$$\frac{lc}{4V^2}\frac{1}{t_{\rm esc}} = 1 \tag{14.77}$$

$$t_{\rm acc} = \frac{lc}{4V^2} = t_{\rm esc} \tag{14.78}$$

が必要とされる。

14.3.2　衝撃波による 1 次のフェルミ加速

(ほとんど高原「天体高エネルギー現象」の丸写し)

エネルギー増加率

流体中を走る衝撃波での加速を考える (図 14.1)。粒子が衝撃波面の上流 (^{u}) と下流 (^{d}) を往復する。上流と下流はそれぞれ流体と一緒に移動する反射体–例えば流体に固定され流体と一緒に流れている磁場– が存在する。

流体の速度を、上流と下流をそれぞれ V_1、V_2 とし、それぞれの流れの系から見た粒子のエネルギーなどは、添字 ^{u} と ^{d} をつける。添字のないものは、衝撃波面に乗った系とする。

上流で反射され運動量 p、エネルギー E、速度 $v = pc^2/E$ を持つを持った粒子が衝撃波面に対して θ^+ で横切る場合、上流と下流からはそれぞれ E^u、E^d のエネルギーを持つ粒子として見えるとすると、

$$\beta_1 \equiv V_1/c, \quad \gamma_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \tag{14.79}$$

$$\beta_2 \equiv V_2/c, \quad \gamma_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \tag{14.80}$$

$$E^u = \gamma_1(E - V_1 p\cos\theta^+) \tag{14.81}$$

$$E^d = \gamma_2(E - V_2 p\cos\theta^+) \tag{14.82}$$

と書ける。$V_1, V_2 \ll c$ とし (V_1/c)、(V_2/c) の 1 次のみを取りだし近似する。$\gamma_1, \gamma_2 \to 1$ なので、

$$\gamma_1 \to 1, \quad \gamma_2 \to 1 \tag{14.83}$$

$$E^u = (E - V_1 p\cos\theta^+) \tag{14.84}$$

$$E^d = (E - V_2 p\cos\theta^+) \tag{14.85}$$

となる。E^d を持った粒子は次に下流で反射され、衝撃波に対して θ^- の方向で横切る。その際、下流では完全弾性衝突するので、下流から見るとエネルギーは E^d のままで、進行方向のみ変わったように見える。しかし、衝撃波系から見るとローレンツ変換がかかるので、エネルギーが E から変わってしまう。それを E' とし、さらに上流で見た場合のエネルギーを E'^u と書くと、

$$E^d = (E' - V_2 p'\cos\theta^-) \tag{14.86}$$

$$E'^u = (E' - V_1 p'\cos\theta^-) \tag{14.87}$$

となる。よって、$V_1, V_2 \ll c$ であり、さらに反射する角度はランダムなので

$$<\cos\theta^+> = \frac{2}{3} \tag{14.88}$$

$$<\cos\theta^-> = -\frac{2}{3} \tag{14.89}$$

であることに注意すると、一周した場合のエネルギー変化は、

$$\frac{E'}{E} = \frac{E'^u}{E^u} = \frac{E'^u}{E^d}\frac{E^d}{E^u} \tag{14.90}$$

$$= \frac{1+(V_1 v'/c^2)\cos\theta^-}{1+(V_2 v'/c^2)\cos\theta^-}\frac{1-(V_2 v/c^2)\cos\theta^+}{1-(V_1 v/c^2)\cos\theta^+} \tag{14.91}$$

$$\to 1 + \frac{2}{3}\frac{V_1 - V_2}{c}\frac{v'+v}{c} \tag{14.92}$$

この式の第 2 項は 1 よりも十分小さい。$\frac{v'}{v} - 1$ は実はその第 2 項と同じオーダーである。よって、$v' \sim v$ とすると、

$$\frac{E'}{E} = 1 + \frac{4}{3}\frac{(V_1 - V_2)v}{c^2} \tag{14.93}$$

が得られる。粒子が相対論的な場合には、$v \sim c$ なので、1 往復で得られるエネルギー増加率は

$$\frac{E'}{E} = 1 + \frac{4}{3}\frac{V_1 - V_2}{c} \tag{14.94}$$

$$\eta = \frac{4}{3}\frac{V_1 - V_2}{c} \tag{14.95}$$

と書ける。

エネルギースペクトル

エネルギースペクトルを求めるには、逃げ出しの確率、又はエスケープタイムを知る必要がある。ここでは、Bell MNRAS **182**, 147 (1978) の考えに従って逃げ出しの確率を求める。

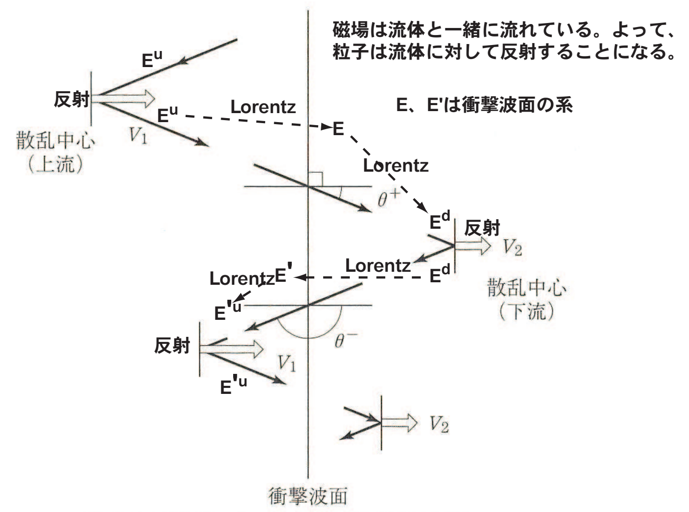

磁場は流体と一緒に流れている。よって、
粒子は流体に対して反射することになる。
E^u
反射
E^u
Lorentz
E
E、E'は衝撃波面の系
散乱中心
（上流）
V1
Lorentz
θ+
E^d
反射
V2
散乱中心
（下流）
Lorentz
E'
Lorentz
E^d
E'^u
θ−
反射
V1
E'^u
V2
衝撃波面

図 4.3 衝撃波によって粒子加速が起こる理由.

図 14.1: 衝撃波でのフェルミ加速 (高原「天体高エネルギー現象」p76)

下流の流体は速度 V_2 で衝撃波面から離れているので、加速を受ける粒子も平均速度 V_2 で衝撃波面から流れていくことになる。粒子の数密度を $n_{\rm CR}$ とすると、衝撃波面から単位時間あたりに下流に流れていく粒子の個数は、

$$n_{\rm CR}V_2 \tag{14.96}$$

である。

一方で、粒子の速度は衝撃波や流体の速度に比べ十分速く等方的に飛んでおり、その速度を $v \simeq c$ とする。上流から下流へ (又は下流から上流に) 衝撃波面を横切る粒子の個数は、衝撃波面に対する射影として得られる。

$$\int_0^{\pi/2} n_{\rm CR}\frac{v}{4\pi}\cos\theta\cdot 2\pi\sin\theta d\theta \quad = \quad \frac{n_{\rm CR}v}{4} \simeq \frac{n_{\rm CR}c}{4} \tag{14.97}$$

となる。衝撃波面を横切る粒子の個数は、まさに単位時間あたりに加速過程が行なわれる粒子の個数である。そのうち、上記で求めた下流にながれていく個数との比を求めると、1 回の加速過程で逃げ出す確率 $P_{\rm esc}$ が求まる。

$$P_{\rm esc} \quad = \quad \frac{n_{\rm CR}V_2}{(n_{\rm CR}c/4)} = \frac{4V_2}{c} \tag{14.98}$$

フェルミ機構で Diffusion-Loss 方程式を使わない方法で示した通り、エネルギースペクトルは

$$N(E) \quad \propto \quad E^{-(\gamma+1)}, \quad \gamma = \frac{P_{\rm esc}}{\eta} \tag{14.99}$$

と示される。エネルギー増加率は $\eta = \frac{4}{3}\frac{V_1 - V_2}{c}$ なので、最終的に

$$N(E) \quad \propto \quad E^{-(\gamma+1)} \tag{14.100}$$

$$\gamma \quad = \quad \frac{P_{\rm esc}}{\eta} = \frac{3}{(V_1/V_2) - 1} \tag{14.101}$$

が得られる。プラズマの速度の絶対値にはよらず、その比だけで決まることに注意。

衝撃波の章で示した通り、上流の流体の音速を C_1 として衝撃波の速度 $V_1 > C_1$ をマッハ数 M_1 で示すと、衝撃波での Rankin=Hugoniot の関係式から理想気体では

$$M_1 \quad = \quad V_1/C_1, \quad C_P/C_V = 5/3 \tag{14.102}$$

$$\frac{V_1}{V_2} \quad = \quad \frac{[(C_P/C_V)+1]M_1^2}{[(C_P/C_V)-1]M_1^2 + 2} \tag{14.103}$$

$$\quad = \quad \frac{4M_1^2}{M_1^2 + 3} \tag{14.104}$$

が得られる。よって、積分スペクトルのインデックス γ は

$$\gamma = \frac{3}{(V_1/V_2)-1} = 1 + \frac{4}{M_1^2 - 1} \tag{14.105}$$

となる。特に強い衝撃波 $M_1 \gg 1$ の場合は、

$$N(E) \propto E^{-(\gamma+1)} \tag{14.106}$$

$$\gamma \simeq 1 \tag{14.107}$$

となり、衝撃波の速度や流体の密度、温度などに関係なく一定値になる。

ところで、実際に観測されている宇宙線のうち、銀河系内起源である knee 以下では

$$N(E) \propto E^{-(2.0\sim2.2)} \tag{14.108}$$

である。よって、衝撃波による宇宙線加速から予測されるスペクトルは、実際に観測されている宇宙線のスペクトルに非常に近い。

最大加速エネルギー

これまでは、十分な時間が経過し、完全に定常状態になった場合について述べてきた。スペクトルは巾型であったので、数は別にしてエネルギー損失が全くなく、原理的にはどこまででも加速することが可能である。

しかし、実際にはより高エネルギーに持っていくにはより長い時間がかかるので、実際に得られる最大加速エネルギーは加速時間でリミットされることになる。ここでは最大可能な加速エネルギーを求めてみる。

衝撃波による 2 次のフェルミ加速では、1 回その間に加速される効率と逃げ出す確率を計算しスペクトルを求めており、1 回の加速過程の時間については議論しなかった。しかし、最大加速エネルギーを求めるには、1 回の加速過程にかかる時間などが必要となる。

衝撃波の上流および下流で粒子は反射されるとしたが、実際には磁場との衝突は 1 回ではなく、数多くの衝突によるランダムウォークをくり返し、ある確率でたまたま衝撃波を越えているに過ぎない。つまり拡散過程を考えると必要がある (Lagage and Cesarsky 1983a, 1983b)。

上流の領域では、粒子の流れ $\vec{J}$ を拡散方程式で示すと

$$\vec{J_1} = -D_1 \nabla n_{\rm CR} + \vec{V_1} n_{\rm CR} \tag{14.109}$$

となる。$n_{\rm CR}$ は粒子の個数密度、$\vec{V_1}$ は上流の流体の速度、D_1 は拡散係数である。平衡状態を仮定すると、$\vec{J} = 0$ であり、方向も衝撃波垂直成分 (z 軸とする) のみを考えれば良い。その結果 $\vec{V_1}$ の方向も考えると (下流から上流に向かって正の方向を取る)、

$$D_1 \nabla \frac{dn_{\rm CR}(z)}{dz} = -V_1 n_{\rm CR} \tag{14.110}$$

$$n_{\rm CR}(z) = n_{\rm CR}(0) \exp\left(-\frac{V_1 z}{D_1}\right) \tag{14.111}$$

が得られる。上流方向に存在する粒子の数は (柱密度)、

$$\int_0^\infty n_{\rm CR}(z)dz = \int_0^\infty n_{\rm CR}(0) \exp\left(-\frac{V_1 z}{D_1}\right) dz \tag{14.112}$$

$$= \frac{n_{\rm cr} D_1}{V_1} \tag{14.113}$$

となる。一方、前で議論したように上流から衝撃波を通り下流に流れる粒子数は

$$\int_0^{\pi/2} n_{\rm CR} \frac{v}{4\pi} \cos\theta \cdot 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{n_{\rm CR} v}{4} \simeq \frac{n_{\rm CR} c}{4} \tag{14.114}$$

であるから、結局上流での平均滞在時間 t_1 は、

$$t_1 = \frac{(n_{\rm CR}c/4)}{n_{\rm cr}D_1/V_1} = \frac{4D_1}{V_1 c} \tag{14.115}$$

となる。

逆に下流での滞在時間は、無限に流れていって失われる粒子は取り除き、再び上流に戻る粒子のみを評価する必要があるので、ややこしい ($= -\infty$ で密度は有限ということ)。そこで (ややこしい部分を各算定数に押し込め)、結果のみを示すと、下流での滞在時間 t_2 は

$$t_2 = \frac{4D_2}{V_2 c} \tag{14.116}$$

と書ける。

結局、1 回の加速過程にかかる時間 $t_{\rm coll}$ と、加速時間 $t_{\rm acc}$ は

$$t_{\rm coll} = t_1 + t_2 = \frac{4}{c}\left(\frac{D_1}{V_1} + \frac{D_2}{V_2}\right) \tag{14.117}$$

$$t_{\rm acc} = \frac{t_{\rm coll}}{\eta} = \frac{3}{V_1 - V_2}\left(\frac{D_1}{V_1} + \frac{D_2}{V_2}\right) \tag{14.118}$$

次の問題は、拡散定数 D_1 と D_2 を求めることである。高エネルギー粒子の拡散は Alfven 波などの磁場の乱れによる粒子の散乱である。Lagage and Cesarsky (1983) では、拡散距離 λ_D は粒子のジャイロ半径 (ラーモア半径)$r_{\rm L}$ より大きいと考えた。そこで、拡散距離とジャイロ半径の比を ξ とすると、

$$D = \frac{1}{3}\lambda v \tag{14.119}$$

$$r_{\rm L} = \frac{pc}{ZeB} = \frac{\gamma mc}{ZeB} \tag{14.120}$$

$$\lambda = \xi r_{\rm L} \tag{14.121}$$

$$D = \frac{v r_{\rm L}}{3}\xi = \frac{c r_{\rm L}}{3}\xi \tag{14.122}$$

と書ける。ξ の値は、磁場の乱れの程度に依存し、乱れの大きさがもとの磁場と同程度になる大きな乱れの極限では $\xi = 1$ にもなり得る (ボーム極限)。しかし、太陽風中の衝撃波中の磁場の観測から類推し、超新星残骸など活動天体では $\xi = 10$ 程度とされている。以下は

$$\xi = \left(\frac{B}{\delta B}\right)^2 = 1 \sim 10 \tag{14.123}$$

と考えて議論を進める。

磁場の様子は上流も下流も変化せず (磁場は圧縮されていない)、それゆえ拡散定数は上流と下流で同じとする。また、流体は理想気体であり、粒子は相対論的であると加速時間 $t_{\rm acc}$ は以下のようになる。

$$V_1 = V_{\rm S},\ \ V_2 = \frac{1}{4} \tag{14.124}$$

$$D_1 = D_2 = D = \frac{r_{\rm L}}{3} = \frac{pc^2}{3ZeB}\xi \tag{14.125}$$

$$t_{\rm acc} = \frac{20}{3}\frac{pc^2}{V_{\rm S}^2 ZeB}\xi = \frac{20}{3}\frac{Ec}{V_{\rm S}^2 ZeB}\xi \tag{14.126}$$

これまで述べたフェルミ機構では、加速時間 $t_{\rm acc}$ は粒子のエネルギーにはよらなかったが、この場合にはエネルギーに依存することに注意し、微分方程式まで戻り計算を行なう。加速エネルギーは経過時間 $t_{\rm A}$ に比例することとなり、以下のように示される。

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{t_{\rm acc}}E = \frac{3}{20}\frac{Z}{\xi}\frac{V_{\rm S}^2}{c}eB \tag{14.127}$$

$$E_{\max}(t) = E_0 + \frac{3e}{20c}\frac{Z}{\xi}V_{\rm S}B(V_{\rm s}t_{\rm A}) \tag{14.128}$$

$$\simeq 460\frac{Z}{\xi}\left(\frac{V_{\rm S}}{10^4{\rm km\ sec^{-1}}}\right)\left(\frac{B}{10\mu{\rm G}}\right)\left(\frac{V_{\rm s}t_{\rm A}}{10{\rm pc}}\right)[{\rm TeV}] \tag{14.129}$$

$V_S t_A$ は、衝撃波が通り過ぎた大きさと考えても良いし、十分時間が立った後であれば天体の大きさと考えても良いだろう。さらに注意すべきは、$E_{\max}(t)$ が、磁場の大きさ、系のサイズ、衝撃波速度の 3 つの積で決まっていることである。磁場を持った流体が運動すると、

$$\vec{E} = -(\vec{V}/c) \times \vec{B} \tag{14.130}$$

の電場が発生し、

$$W = F \cdot L = e|\vec{E}| = (e/c)VBL \tag{14.131}$$

の仕事を荷電粒子に行なうと直観的に理解しても良いだろう。もっとも実際にはもう少し複雑で、平衡衝撃波では実際にこのような電場が発生することで加速が行なわれるのではなく、磁場の乱れによる散乱によってエネルギーを得ているのである。流体系で見れば磁場の乱れは静的で電場を共話なくても、衝撃波の静止系でみれば磁場の乱れは電場の乱れを伴い、その結果散乱によって粒子のエネルギーを変化させられる (ここは、高原「天体高エネルギー現象」の丸写し)。

　実際に天体について、超新星残骸であれば $10 \sim 100$TeV 程度まで加速可能であり、knee 以下の銀河系内の宇宙線を説明できる可能性がある。また、電波銀河では磁場は 100μG、サイズは 100kpc であり、衝撃波速度は不定性は大きいが 3×10^4km sec^{-1} とし、$\xi = 1$ とすると、$E_{\max} \sim 10^{20}$eV となり、最高エネルギー宇宙線を説明できる可能性がある。加速エネルギーは衝撃波速度、磁場、系の大きさの積であると予測したが、実際の天体でもほぼその関係が成立していると考えられている (図 14.2)。

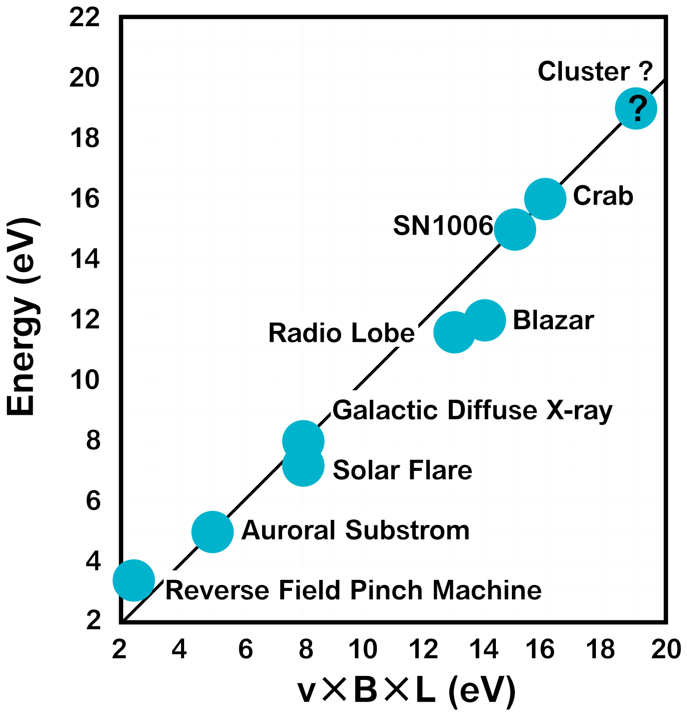


図 14.2: 色々な天体での vBL と加速エネルギーの関係)

シンクロトロン冷却で決まる電子の最大加速エネルギー

ところで、これまで行なった議論では輻射によるエネルギー損失を無視してきたが、磁場の中を加速される以上、シンクロトロン輻射による損失を考慮する必要がある。質量 Am、電荷 Z、エネルギー E の粒子のシンクロトロン輻射によるエネルギー損失は、等方的な場合を考えると

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{sync}} = 1.6\times10^{-3}\left(\frac{Z}{A}\frac{m_{\mathrm{e}}}{m}\right)^4\left(\frac{E}{\mathrm{ergs}}\right)^2\left(\frac{B}{\mathrm{Gauss}}\right)^2 \quad [\mathrm{ergs\ sec^{-1}}] \tag{14.132}$$

と書ける。陽子や重イオンであれば、(中性子星表面近くなどを除き) シンクロトロン輻射は無視できるが、電子の場合はシンクロトロンによるエネルギー損失が問題になる。よってあるため、どこまでも加速できる訳ではなく、十分時間が立った後の最大加速エネルギーは加速とエネルギー損失が釣り合った所で決まる。前に示した通り、電子の場合次のように書き直す。

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{sync}} = \frac{4}{3}\sigma_{\mathrm{T}}c\beta^2\gamma^2U_{\mathrm{B}} \tag{14.133}$$

$$= 6.6\times10^{-16}\gamma^2\left(\frac{B}{1\mu\mathrm{G}}\right)^2 \quad [\mathrm{eV\ sec^{-1}}] \tag{14.134}$$

これが、加速

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{acc}} = \frac{1}{t_{\mathrm{acc}}}E = \frac{3}{20}\frac{Z}{\xi}\frac{V_{\mathrm{S}}^2}{c}eB \tag{14.135}$$

と等しいので、$Z=1$ として、

$$\frac{4}{3}\sigma_{\mathrm{T}}c\beta^2\gamma_{\mathrm{max}}^2U_{\mathrm{B}} = \frac{4}{3}\sigma_{\mathrm{T}}c\beta^2\gamma_{\mathrm{max}}^2\left(\frac{B^2}{8\pi}\right) = \frac{3}{20}\frac{1}{\xi}\frac{V_{\mathrm{S}}^2}{c}eB \tag{14.136}$$

を解くと、

$$\gamma_{\mathrm{max}} = \sqrt{\frac{9\pi}{10}\frac{e}{\sigma_{\mathrm{T}}}}\left(\frac{V_{\mathrm{S}}}{c}\right)\frac{1}{\sqrt{B}}\frac{1}{\sqrt{\xi}} \tag{14.137}$$

$$= 4.5\times10^7\left(\frac{V_{\mathrm{S}}}{c}\right)\frac{1}{\sqrt{B}}\frac{1}{\sqrt{\xi}} \tag{14.138}$$

$$E_{\mathrm{max}} = \gamma_{\mathrm{max}}m_{\mathrm{e}}c^2 = 23\left(\frac{V_{\mathrm{S}}}{c}\right)\frac{1}{\sqrt{B}}\frac{1}{\sqrt{\xi}} \quad [\mathrm{TeV}] \tag{14.139}$$

$$= 240\left(\frac{V_{\mathrm{S}}}{10^4\mathrm{km/s}}\right)\left(\frac{B}{10\mu\mathrm{G}}\right)^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{\xi}} \quad [\mathrm{TeV}] \tag{14.140}$$

が得られる。

電子の最高エネルギーは磁場によって制限されることとなり、磁場が強いほど最高エネルギーは低く抑えられてしまう。一方、加速エネルギーは衝撃波の速度、磁場、系の大きさを掛けたもので決まるので、系が大きく磁場の弱い天体ほど到達できる加速最高エネルギーを上げることが可能となる。もっとも、その場合は加速がゆっくりになるため、非常に長い時間を要することとなる。

超新星残骸の典型的なパラメータでは場合は $200\mathrm{TeV}$ と求まる。一方、中性子星への自由落下により生じるスタンディングショックを中性子星近傍の磁場で加速することを考えると、衝撃波の速度として自由落下速度い $V_{\mathrm{S}}=V_{\mathrm{free}}=2\times10^{10}\mathrm{cm/s}$、磁場を $10^8\mathrm{G}$ とすると、電子の最大加速エネルギーは $1.5\mathrm{GeV}$ となり、電子のエネルギーが大きくなれないこをが分かる。

逆コンプトン散乱冷却で決まる電子の最大加速エネルギー

シンクロトロン放射および逆コンプトン散乱によって電子が失うエネルギーはそれぞれ

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{Sync}} = \frac{4}{3}\sigma_{\mathrm{T}}c\beta^2\gamma^2U_{\mathrm{B}} \tag{14.141}$$

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{IC}} = \frac{4}{3}\sigma_{\mathrm{T}}c\beta^2\gamma^2U_{\mathrm{ph}} \tag{14.142}$$

である。よってソフトフォトンのエネルギー密度が磁場のエネルギー密度よりも大きい場合は、コンプトン散乱による冷却が問題になる。ソフトフォトンが宇宙背景放射の場合、

$$\begin{aligned}
\frac{B_0^2}{8\pi} &= U_{\mathrm{CMB}} = 4.0 \times 10^{-13} \quad [\mathrm{ergs\ sec}^{-3}] \tag{14.143}\\
B_0 &= 3.2 \quad [\mu\mathrm{G}] \tag{14.144}
\end{aligned}$$

なので、磁場が $B_0 = 3.2 \quad [\mu\mathrm{G}]$ 以下の場合は逆コンプトン散乱による冷却によって電子の最大加速エネルギーが決まる。

シンクロトロン冷却の場合と同様の考えると、逆コンプトン散乱による冷却と加速が釣り合う条件は以下のように決まる。

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\sigma_{\mathrm{T}} c \beta^2 \gamma_{\max}^2 U_{\mathrm{ph}} &= \frac{3}{20}\frac{1}{\xi}\frac{V_{\mathrm{S}}^2}{c} eB \tag{14.145}\\
\gamma_{\max} &= \frac{3}{4\sqrt{5}}\sqrt{\frac{e}{\sigma_{\mathrm{T}}}}\frac{1}{\sqrt{U_{\mathrm{ph}}}}\left(\frac{V_{\mathrm{S}}}{c}\right)\sqrt{\frac{B}{\xi}} \tag{14.146}\\
&= 9.0 \times 10^6 \frac{1}{\sqrt{U_{\mathrm{ph}}}}\left(\frac{V_{\mathrm{S}}}{c}\right)\sqrt{\frac{B}{\xi}} \tag{14.147}\\
E_{\max} &= \gamma_{\max} m_{\mathrm{e}} c^2 = 4.6 \frac{1}{\sqrt{U_{\mathrm{ph}}}}\left(\frac{V_{\mathrm{S}}}{c}\right)\sqrt{\frac{B}{\xi}} \quad [\mathrm{TeV}] \tag{14.148}\\
&= 770 \left(\frac{U_{\mathrm{ph}}}{U_{\mathrm{CMB}}}\right)^{-1/2} \left(\frac{V_{\mathrm{S}}}{10^4 \mathrm{km/s}}\right) \left(\frac{B}{10\mu\mathrm{G}}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \quad [\mathrm{TeV}] \tag{14.149}\\
U_{\mathrm{CMB}} &= 4.0 \times 10^{-13}\ [\mathrm{ergs/cm}^3] = 0.25\ [\mathrm{eV/cm}^3] \tag{14.150}
\end{aligned}$$

第15章　ブラックホール

ブラックホール研究は現代天文学の大きな柱の一つである。この章ではこれまでに示すことのできなかった、ブラックホールに関連する色々な話を書くことにする。

(パリティの記事を基本)

15.1　恒星ブラックホールの発見

15.1.1　コンパクト星の質量決定方法

連星パラメータ、恒星の色から恒星側の質量、ドップラーシフト、食の情報が重要。

エディントン光度

15.2　銀河中心の巨大ブラックホール

15.2.1　星やガスの運動学 – その 1 BLR を用いた AGN の場合

(Wandel and Mushotzky (1986) の II-b: まだ未完) 分光観測から O[III] などの輝線には広がりがあることが分かっている。この輝線を出す領域を BLR と呼ぶ。O[III] などを放出する雲が、ブラックホールの周囲を v で運動しているために、輝線が幅を持つ。BLR を放出する雲とブラックホールまでの大きさを r とすると、

$$G\frac{M}{r} = \beta v^2 \tag{15.1}$$

$$M = \beta\frac{rv^2}{G} \tag{15.2}$$

となる。β は運動の様子 (infall, ケプラー運動, escape 速度での outflow) を示すパラメータで、

$$\beta = 1 \sim 3 \tag{15.3}$$

を取る。

BLR は中心の Ionization Source からほどほどにイオン化されている必要がある。そのため、BLR が存在する領域でのイオン化している光子の強度は見積もることができる。一方、中心のイオン化源、すなわちブラックホールの明るさ $L_{\rm ion}$ は別に観測が可能である。BLR のガス密度を n とするとイオン化パラメータ ξ を次のように定義する。

$$\xi = \frac{L_{\rm ion}}{4\pi r^2 cknT} \tag{15.4}$$

ξ、n、T は光学観測から得られる。

15.2.2　星やガスの運動学 – その 2 近傍の通常銀河

Kormendy and Richstone (1995)

15.2.3　X 線時間変動を用いた質量決定 – その 1: Wandel and Mushotzky (1986)

Barr and Mushotzky (1986) と Wandel and Mushotzky (1986) では、変動のタイムスケールから得られるサイズの上限値を Schwartschild 半径の 5 倍に等しいとしてて巨大ブラックホール質量の推定を行った。

$$c \cdot \Delta t \quad \gtrsim \quad 5\left(2\frac{GM}{c^2}\right) \tag{15.5}$$

$$M \quad \gtrsim \quad \frac{1}{10}\frac{c^3}{G}\Delta t = 10^8\left(\frac{\Delta t}{10^4(sec)}\right)M_\odot \tag{15.6}$$

これから得られた質量と前述の BLR を用いた質量を比較したものを図 15.1 に示す。両者は良く一致する。この推定から得られた重要な結果は 2 点ある。(1) この方法で求めたブラックホール質量は、観測された X 線光度と正の相関がある。これは明るいブラックホールほど重いブラックホールを持っている。(2) この質量から得られるエディントン光度を求めると、実際に観測される光度に比べて 2 桁以上上にある。

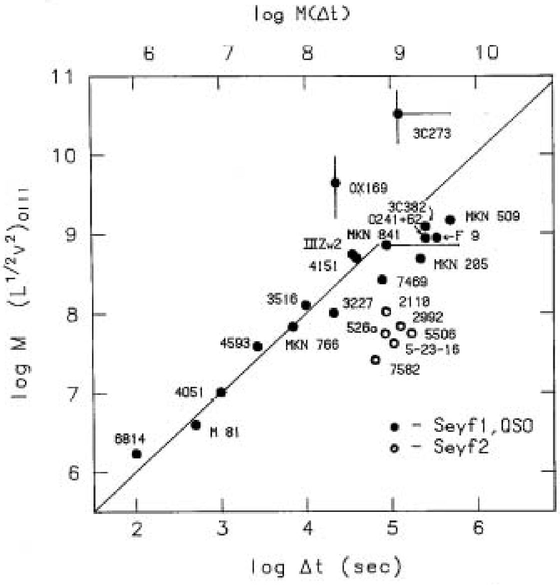


FIG. 1.—The dynamical mass vs. Δt. Also shown is the corresponding mass scale, assuming $M/M_\odot = 10^4\,\Delta t$. Solid circles are Seyfert 1's, BLRGs, and quasars; open circles are Seyfert 2's. The diagonal line indicates $M(\mathrm{O\ III}) = M(\Delta t)$.

図 15.1: 時間変動から求めた質量と O[III] からもとめた質量の相関

15.2.4　X 線時間変動を用いた質量決定 –その 2: Hayashida etal. (1998)

(未完)

15.2.5　三好さんの話

(未完)

15.3　ガンマ線バースト

15.4　コンプトン thick ディスク

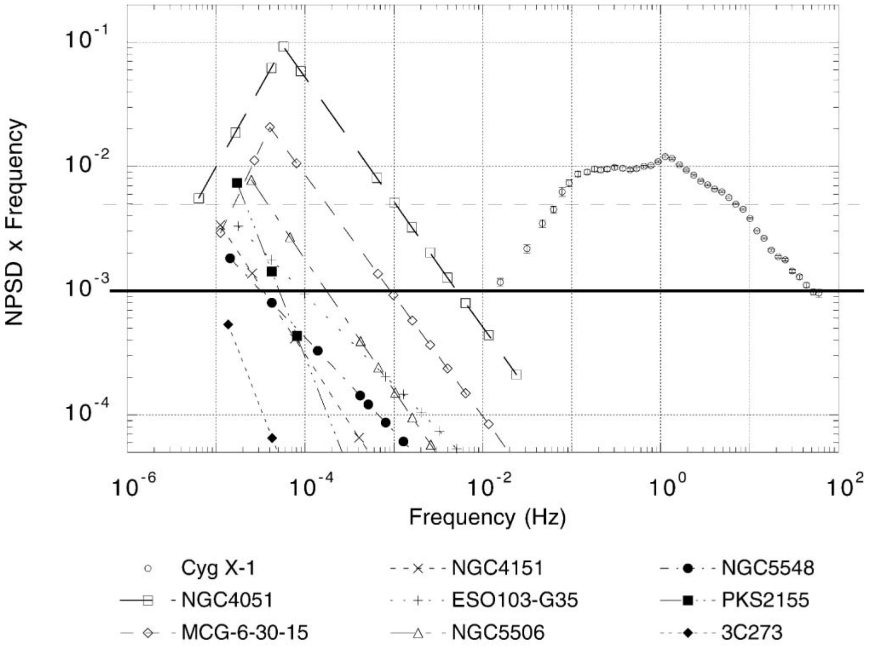


FIG. 4.—NPSDs multiplying by frequency [$fP(f)$ plot] for eight AGNs and one stellar BH candidate (Cyg X-1). Observed data points are plotted for Cyg X-1, while for eight AGNs the best-fit model and the modeled points are illustrated with a line and marks, respectively, to avoid confusion. Our hypothesis on the scaling relation expects every (NPSD) × (frequency) stands side by side keeping its shape, as shown in this figure. We define the variability timescale from the frequency at which the value of the "modeled" (NPSD) × (frequency) equals a certain level, for which we adopted 10^{-3}, as indicated by a thick horizontal line. For 3C 273, the variability measure is determined by extrapolating the best-fit model. A thin broken line horizontally drawn at 5×10^{-3} shows an alternative level, which we used just for comparison.

図 15.2: 規格化パワースペクトル × 周波数を様々なブラックホールについて示したもの

第16章　Cosmic X-ray Background

参考文献

Radiative Processes in Astrophysics, Rybicki and Lightman, (ISBN 0-471-82759-2)
朝倉現代物理学講座 13 「宇宙物理学」, 佐藤文隆, 原哲也, 朝倉書店, ISBN4-254-13573-4
「宇宙物理学」, 高原文郎, 朝倉書店, ISBN4-254-13076-7
「現代の宇宙論」, 早川幸男, 佐藤文隆, 松本敏雄編, 名古屋大学出版会, ISBN4-930689-92-9
「X 線でさぐるブラックホール」, 北本俊二, 裳華房、ISBN4-7853-8678-9
「X 線で探る宇宙」, 小山勝二, 培風舘, ISBN4-563-02062-1
「X 線でみた宇宙 –ブラックホールと宇宙の果てを求めて」松岡勝, 共立出版 (1986),
パリティ Vol 18, No.05 (2003/05 月号) 「特集: いまさらブラックホール」
「力学」, ランダウ, リフシッツ, , ISBN
「アドベクション優勢ディスク」, 嶺重慎, 加藤正二, 天文月報 1996/9
Barr and Mushotzky, Nature **320**, 421 (1986)
Kormendy and Richstone, ARAA **33**, 581 (1995)
Wandel and Mushotzky, ApJ **306**, L61 (1986)
Hayashida et al., ApJ **500**, 642 (1998)
Swank et al., ApJL **212**, L73 (1977)
Mitsuda et al., PASJ **36**, 741 (1984)
Tawara et al., PASJ **36**, 845 (1984)
Inoue et al., PASJ **36**, 831 (1984)
Joss, ApJL **225**, L123 (1978)
Hashimoto, PASJ **35**, 1 (1983)
Waki et al., PASJ **36**, 819 (1984)
Miller et al., ApJ **378**, 47 (1991)
Karzas and Latter, ApJS, **6**, 167 (1961)
Bahcall, ApJ, **198**, 249 (1975)
King, AJ, **67**, 471 (1962)
Cavaliere and Fusco-Femiano, A&A, 49, 137 (1976)
Jones and Forman, ApJ, **276**, 38 (1984)
Mushotzky, Physica Scripta, **T7**, 157 (1984)
Tsuru, Ph.D. Univ. of Tokyo (1992)
Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars, Shapiro and Teukolsky, Wiley, ISBN 0-471-87316-0
X-RAY FROM ACCRETING NEUTRON STARS, Satio Hayakawa, Physics Report 1985, **121**, 317-406
Cox and Tucker, ApJ, **157**, 1157 (1969)
Cox and Daltabuit, ApJ, **167**, 113 (1971)
Raymond, Cox and Smith, ApJ, **204**, 290 (1976)
Seaton, MNRAS, **119**, 81 (1959)
Tucker and Gould, ApJ, **144**, 244 (1966)
“Physics of Fully Ionized Gases”, Spitzer, (1962) 又は「完全電離気体の物理」(コロナ社)
Masai, Astrophysics and Space Science, **98**, 367 (1984)
Tsunemi et al., ApJ, **306**, 248 (1986)

“Astrophysics of Gaseous Nebulae and Active Galactic Nuclei” (AGN^2) , Osterbrock, (1989) ISBN 0-935702-22-9

Morrison and MacCammon, ApJ, **270**, 119 (1983)

ランダウ=リフシッツ「流体力学2」

坂下、池内「宇宙流体力学」新物理学シリーズ30、培風館、ISBN4-563-02430-9

Chevalier, ApJ, **258**, 790 (1982)

Gebhardt et al., ApJL, **539**, L13 (2000)

Ikebe et al., Nature, **379**, 427 (1996)

Malcolm S. Longair, “High Energy Astrophysics” Volume 1, 2, Second Edition, Cambridge University Press, ISBN 0-521-38773-6 (Volume 1), ISBN 0-521-43584-6 (Volume 2),

高原文郎「天体高エネルギー現象」岩波講座、物理の世界、地球と宇宙の物理4、岩波書店、ISBN4-00-011149-3

Thomas K. Gaisser (小早川恵三訳)、「素粒子と宇宙物理」、丸善、ISBN4-621-04289-0

小田稔、「宇宙線」(改訂版)、裳華房、物理学選書5、ISBN4-7853-2305-1

Bell, MNRAS, **182**, 147 (1978)

Bell, MNRAS, **182**, 443 (1978)

Lagage and Cesarsky A&Ap **118**, 223 (1983)

Lagage and Cesarsky A&Ap **125**, 249 (1983)

“X-ray emission from clusters of galaxies”, Sarazin, (1988) Cambridge University Press, ISBN-0-521-32957-4

Gaetz, Salpeter, ApJS **52**, 155, (1983)

Biretta, J., (Press Release from the Hubble Space Telescope) (http://www.stsci.edu/ftp/science/m87/m87.html)

Makishima et al. ApJL, **365**, L59 (1990)

Mihara et al. ApJL, **379**, L61 (1991)

Mihara D論

Makishima et al. ApJ, **525**, 978 (1999)

池田、河野、馬場 1998年度 P6-X レポート (1999)

Schindler et al. AAp **317**, 646 (1997)

Komatsu et al. ApJL **516**, L1 (1999)

Komatsu et al. PASJ **53**, 57 (2001)

Kaneda et al. ApJL **453** L13 (1995)

Tashiro et al. ApJ **499** 713 (1998)

Koyama etal. Nature **378** 255 (1995)

Tanimori etal. ApJL **497** L25 (1998)

高原 日本物理学会誌 **53**, 405 (1998)

Cottam et al. Nature **420**, 51(2002)