エレクトロニクス
講義資料

第３章：過渡特性の詳しい計算 (v0)

鶴 剛 (tsuru@cr.scphys.kyoto-u.ac.jp)

Chap3_Transient_Laplace_v0

ラプラス変換の電気回路への応用

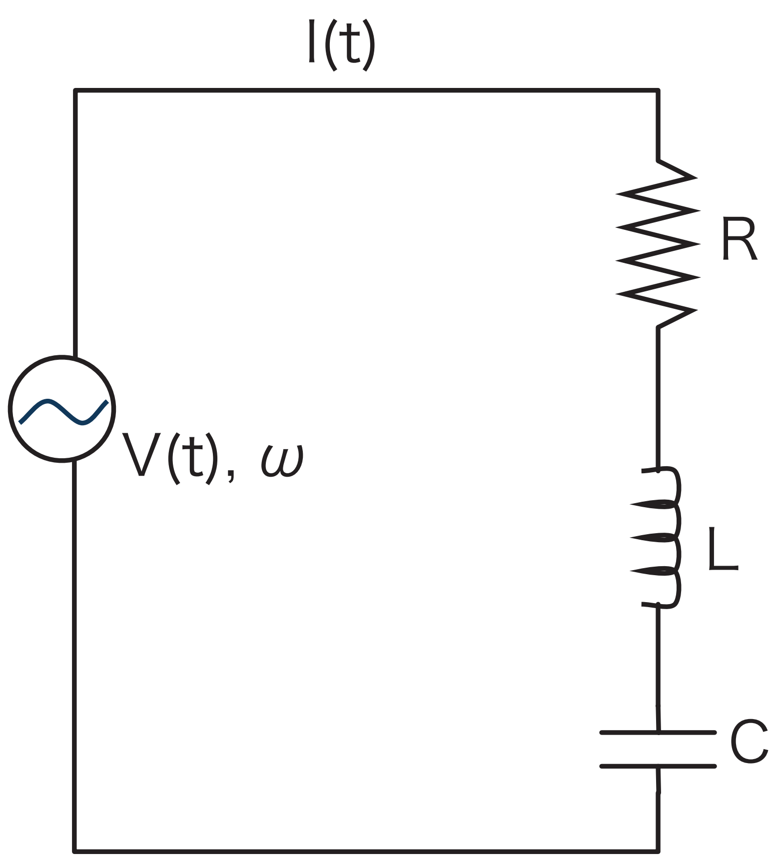
前のセクションで，フィルター回路を通した時の周波数特性を示した．その場合には正弦波を入力した．このように三角関数型の繰り返し波形を考える場合はフーリエ変換が役に立つ．

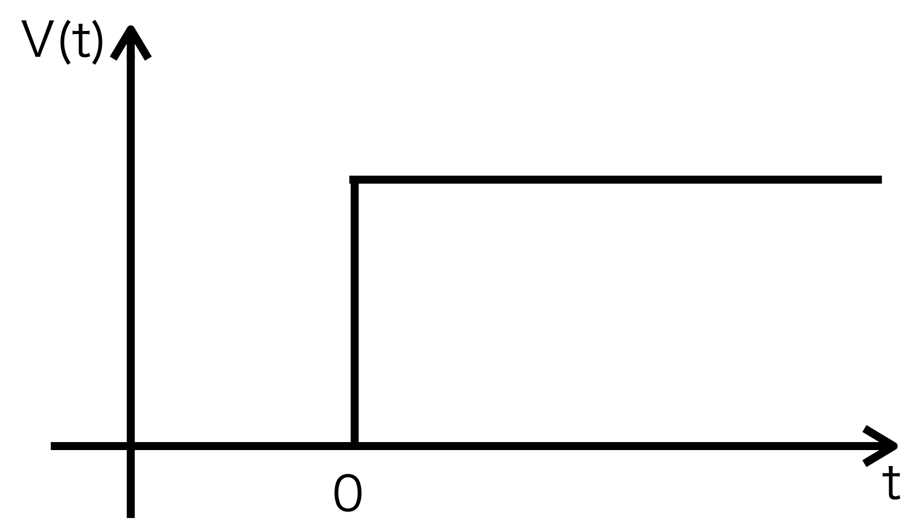
一般の波形も全て正弦波の足し合わせで表現できるので，原理的にはフーリエ変換を使えば過渡的な波形を含む一般の波形に対するフィルター回路のレスポンスを調べることができる．しかし，それは結構面倒だったりする．

そこで，実際にはラプラス変換を使うと便利である．ラプラス変換は微分方程式を解く上で強力な手段となる．導関数 (微分) と原始関数 (積分) に対するラプラス変換が簡単な形に書け，従って微分方程式が代数方程式にすり替えられるためである．

ラプラス変換の数学的な色々なことは，物理数学に任せるとして，ここでは主に電気回路に対する応用を示すことにする．

複素振幅の所では，$V(t)$，$I(t)$ を実数電圧，電流，$v(t)$，$i(t)$ を複素電圧，電流とした．この Chapter では，$v(t)$，$i(t)$ を実数電圧，電流，$V(s)$，$I(s)$ をそのラプラス変換とする．





I(t)を求めるにはどうする？V(t)をフーリエ変換し，周波数毎に振幅と位相を計算することで電流の波形を計算し，それを再び足し合わせることで I(t)を求める．でも，これは大変だ．

ラプラス変換

実関数 $f(t)$ に対するラプラス変換を $F(s)$ と書くと，

$$F(s) \quad \equiv \quad \int_0^\infty f(t) \cdot \exp(-st) \cdot dt$$

と定義される．様々な関数に対するラプラス変換は以下の通りである．

$f(t)$	$\rightarrow$ $F(s)$
$\delta(t)$	1
$\mathrm{step}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$	$1/s$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^2	$\dfrac{2}{s^3}$
$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$	$\dfrac{1}{s^n}$
$\exp(-at)$	$1/(s+a)$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$
$t \cdot \exp(-at)$	$1/(s+a)^2$
$\exp(-at) \cdot \sin(bt)$	$b/\left[(s+a)^2+b^2\right]$
$\exp(-at) \cdot f(t)$	$F(s+a)$
$f(t/a)$	$a \cdot F(as)$
$\dfrac{df(t)}{dt}$	$s \cdot F(s) - f(0)$
$\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$\int_0^t f(t') \cdot dt'$	$F(s)/s$
$\int_0^t f(t-t') \cdot g(t') \cdot dt'$	$F(s) \cdot G(s)$

ラプラス変換を用いた常微分方程式の解き方

次の常微分方程式をラプラス変換を用いて解いてみる．

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 4\frac{df(t)}{dt} + 13f(t) = 0$$
$$f(0) = 0, f'(0) = 1$$

これを丸ごとラプラス変換を行なうと，

$$s^2 F(s) - 1 + 4sF(s) + 13F(s) = 0$$
$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 13} = \frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}$$

となる．これを逆ラプラス変換すると，

$$f(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}\sin(3t)$$

となり，解ける．

ラプラス変換を用いた回路方程式の解法

RC 積分回路にステップ関数波形を入力

ラプラス空間のフィルター関数

$t=0$ では，コンデンサーには電荷が蓄えられていないとする．

$$v_{\mathrm{out}}(t) \quad = \quad \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' = v_{\mathrm{in}}(t) - i(t)R$$

これを，式全部をラプラス変換すると，

$$V_{\mathrm{out}}(s) \quad = \quad \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} = V_{\mathrm{in}}(s) - I(s)R$$

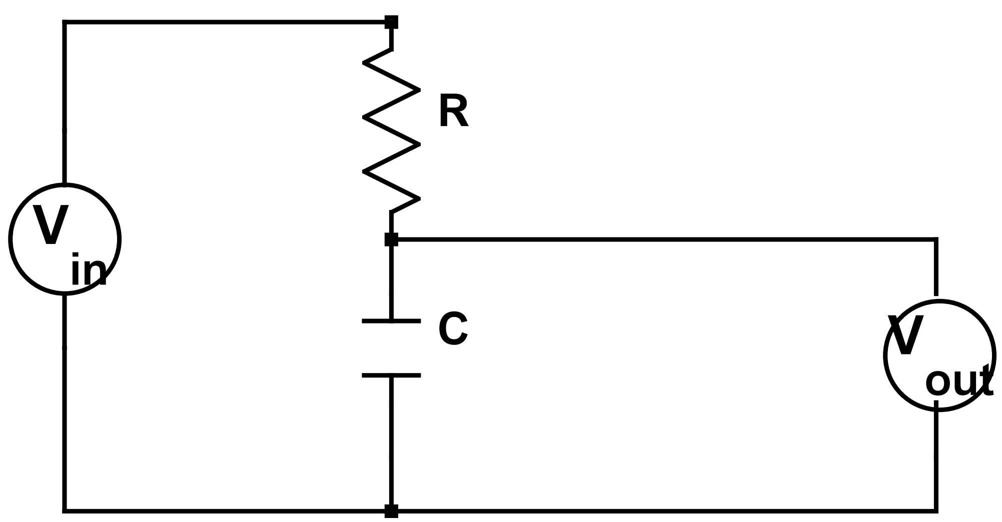
という代数方程式になる．$I(s)$ を消去すると，

$$V_{\mathrm{out}}(s) \quad = \quad V_{\mathrm{in}}(s)\frac{1}{1+sRC}$$

となる．これは，前に示した

$$\tilde{V}_{\mathrm{out}} \quad = \quad \tilde{V}_{\mathrm{in}}\frac{1}{1+i\omega RC}$$

の $i\omega$ を s に変えたものと一致する．



ステップ関数に対する応答

この回路に階段関数を入力した場合の RC 積分回路の出力波形を解く．
階段関数を仮定すると，$v_{\mathrm{in}}(t)$ のラプラス変換 $V_{\mathrm{in}}(s)$ を決めることができる．

$$\text{階段関数 } v_{\mathrm{in}} \quad = \quad v_0 \cdot \mathrm{step}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ v_0 & t>0 \end{cases}$$

$$V_{\mathrm{in}}(s) \quad = \quad v_0/s$$

となる．ここで，

$$V_{\mathrm{out}}(s) \quad = \quad V_{\mathrm{in}}(s)\frac{1}{1+sRC}$$

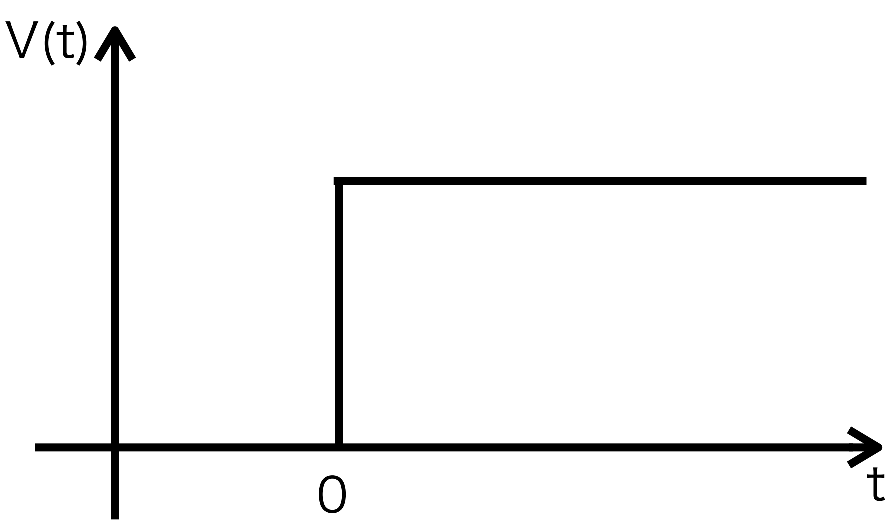
なので

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{out}}(s) &= \frac{v_0}{s}\frac{1}{1+sRC} \\ &= v_0\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+(1/RC)}\right) \end{aligned}$$

となる．これを逆ラプラス変換すると

$$v_{\mathrm{out}}(t) \quad = \quad v_0 \cdot (\mathrm{step}(t) - \exp(-t/RC))$$

となる．



ラプラス変換を用いた回路方程式の解法

LC 共振回路にステップ関数波形を入力

ラプラス変換を用いて LC 共振回路を考えよう．
ただし $t=0$ では，コンデンサーには電荷が蓄えられておらず，
コイルにも電流が流れていないとする．

$$v_{\mathrm{out}}(t) = L\frac{di_{\mathrm{L}}(t)}{dt} = \frac{1}{C}\int_0^t i_{\mathrm{C}}\cdot dt = v_{\mathrm{in}}(t) - R\cdot[i_{\mathrm{C}}(t)+i_{\mathrm{L}}(t)]$$
$$i_{\mathrm{L}}(0) = 0$$

となる．この式全部をラプラス変換すると

$$V_{\mathrm{out}}(s) = L\cdot s\cdot I_{\mathrm{L}}(s) = \frac{1}{C}\frac{I_{\mathrm{C}}}{s} = V_{\mathrm{in}}(s) - R\cdot[I_{\mathrm{C}}(s)+I_{\mathrm{L}}(s)]$$

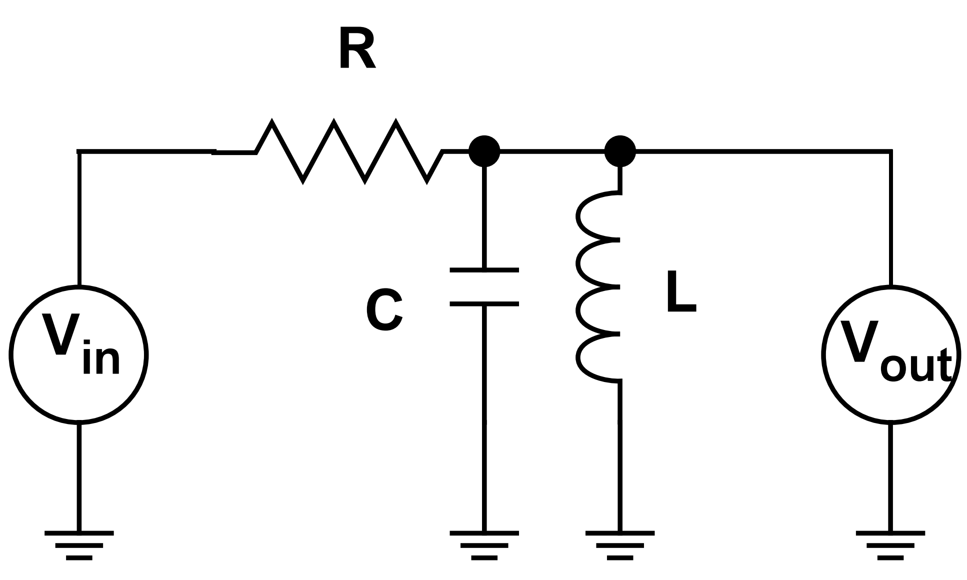
が得られる．電流の項を消去すると，

$$V_{\mathrm{out}}(s) = V_{\mathrm{in}}(s)\frac{s/RC}{(1/LC)+s^2+(s/RC)}$$

となる．前述の周波数特性は

$$\tilde{V}_{\mathrm{out}} = \tilde{V}_{\mathrm{in}}\frac{i\omega/RC}{(1/LC)-\omega^2+(i\omega/RC)}$$

であるので，ラプラス空間でのフィルタ関数も，
周波数特性の $i\omega$ を s に変えたものと一致する．



ステップ関数に対する応答

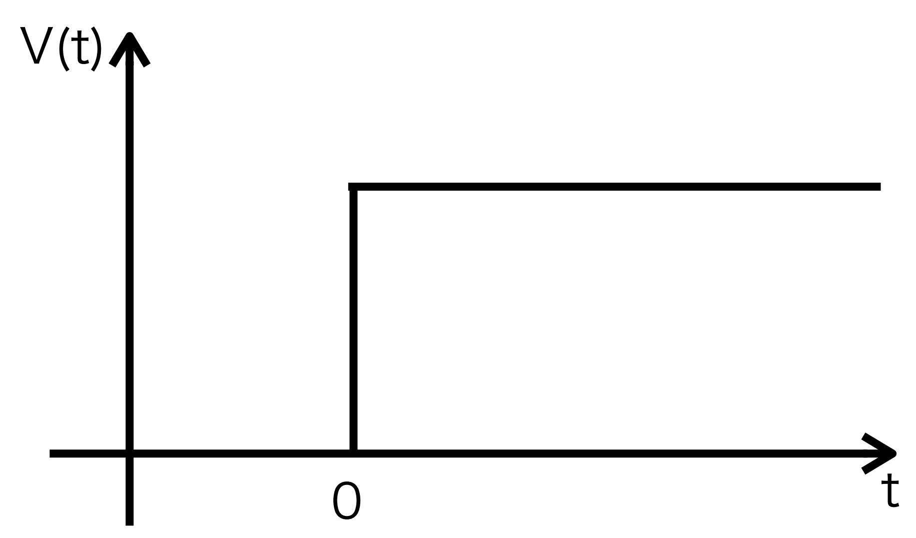
$$\text{階段関数 } v_0\cdot\mathrm{step}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ v_0 & t>0 \end{cases}$$

$$V_{\mathrm{in}}(s) = v_0/s$$
$$V_{\mathrm{out}}(s) = \frac{v_0}{s}\frac{s/RC}{(1/LC)+s^2+(s/RC)}$$
$$= \frac{v_0}{RCb}\frac{b}{(s+a)^2+b^2}, a=\frac{1}{2RC}, b=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{4R^2C^2}}$$

これを逆ラプラス変換すると

$$v_{\mathrm{out}}(t) = \frac{v_0}{RCb}\cdot\exp(-at)\cdot\sin(bt)$$

となる．これは，減衰振動である．



ラプラス変換を用いた回路方程式の解法

ラプラス変換による回路の応答の解き方のまとめ

結局，複素回路論の周波数特性の $i\omega$ を s に変えることで，ラプラス空間におけるフィルター関数を求めることができる．複素回路論のインピーダンスの考えをそのまま持ち込めば良い．

1) 複素インピーダンスを使って，フィルタ関数を作る．入出力は $\tilde{V}_{\rm in}$，$\tilde{V}_{\rm out}$ と書いておく．
2) フィルタ関数を $i\omega$ を s に書き換え，入出力の $\tilde{V}_{\rm in}$，$\tilde{V}_{\rm out}$ を，$V_{\rm in}(s)$，$V_{\rm out}(s)$ に書き換える．その結果，s を使ったラプラス空間でのフィルタ関数が得られる．
3) 与えられている $v_{\rm in}(t)$ をラプラス変換し，$V_{\rm in}(s)$ を求め，2) で得られている式に代入する．
4) この時点で，$V_{\rm out}(s) =$ (s を使った式) になっているはず．後は逆ラプラス変換して，$v_{\rm out}(t)$ を求めれば良い．そこで，ラプラス変換のテーブルを見ながら，3) で得られている式を逆ラプラス変換しやすい式に変形する．
5) $V_{\rm out}(s) =$ (s を使った逆ラプラス変換をしやすい式) についてラプラス逆変換を行ない，最終的に $v_{\rm out}(t)$ を求める．

ラプラス変換を用いた回路方程式の解の例

ポールゼロ消去

図 3.1 の左の図は，ポールゼロキャンセルと呼ばれる回路であり，放射線計測などで，指数関数型減衰信号の時定数を変えるときに用いられる．図 3.1 の右に示す時定数 R_1C を持つ指数関数型減衰信号を入力した場合の出力波形を計算してみる．

C と R_1 の合成インピーダンスは

$$\frac{1}{\frac{1}{R}+i\omega C} = \frac{R_1}{1+i\omega CR_1}$$

である．よって R_2 との抵抗分割比から

$$\tilde{V}_{\mathrm{out}} = \tilde{V}_{\mathrm{in}}\frac{R_2}{\frac{R_1}{1+i\omega CR_1}+R_2} = \tilde{V}_{\mathrm{in}}\frac{R_2+i\omega CR_1R_2}{R_1+R_2+i\omega CR_1R_2} = \tilde{V}_{\mathrm{in}}F(i\omega)$$

が得られる．$i\omega$ を s に書き換えてラプラス空間のフィルター関数 $F(s)$ を求めると，

$$V_{\mathrm{out}}(s) = V_{\mathrm{in}}(s)F(s)$$

$$V_{\mathrm{out}}(s) = V_{\mathrm{in}}(s)F(s)$$

$$F(s) = \frac{R_2+sCR_1R_2}{R_1+R_2+sCR_1R_2} = \frac{s+\frac{1}{CR_1}}{s+\frac{1}{CR_1}+\frac{1}{CR_2}}$$

$$= \frac{s+\frac{1}{CR_1}}{s+\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)} = \frac{s+a}{s+b}$$

$$a \equiv \frac{1}{CR_1},\quad b \equiv \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$ となる．

$v_{\mathrm{in}}(t)$ および $v_{\mathrm{out}}(t)$ のラプラス空間での式を $V_{\mathrm{in}}(s)$ および $V_{\mathrm{out}}(s)$ とすると，

$$v_{\mathrm{in}}(t) = v_0\exp\left(-\frac{t}{RC_1}\right) = v_0\exp(-at)$$

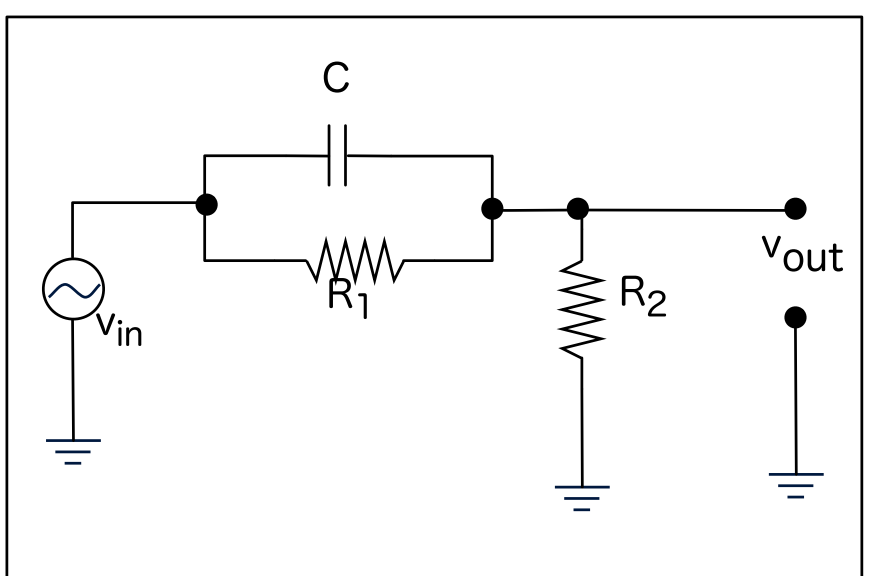
$$V_{\mathrm{in}}(s) = v_0\frac{1}{s+a}$$

となる．よって，

$$V_{\mathrm{out}}(s) = F(s)V_{\mathrm{in}}(s) = \frac{s+a}{s+b}\cdot v_0\frac{1}{s+a} = v_0\frac{1}{s+b}$$

となる．これを逆ラプラス変換すると

$$v_{\mathrm{out}}(t) = v_0\exp(-bt)$$ となる．



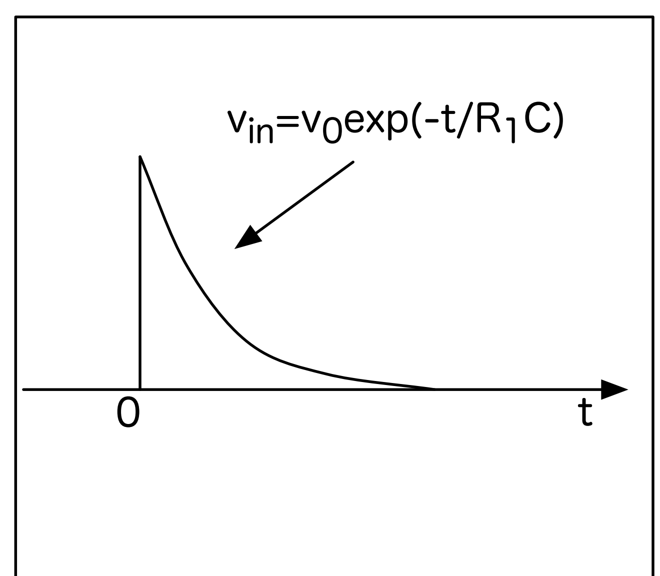


図 3.1: ポールゼロキャンセル回路

試してみよう

積分回路

階段関数，パルス波形を積分回路に入れて波形の変化を見る．

LC(R) 共振回路

図 2.9 の共振回路にステップ波形を入れてみる．$R = 10\mathrm{k}\Omega$，$C = (104) = 0.1\mu\mathrm{F} = 10^{-7}\mathrm{F}$，$L = (473) = 47\times10^3\mu\mathrm{H} = 0.047\mathrm{H}$ の場合，

$$v_{\mathrm{out}}(t) = \frac{v_0}{RCb}\cdot\exp(-at)\cdot\sin(bt) \tag{3.54}$$

$$a = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times10^4\times10^{-7}} = 500 \Longrightarrow \tau \equiv 1/a = 2\mathrm{msec} \tag{3.55}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}} = \sqrt{\frac{1}{0.047\times10^{-7}} - \frac{1}{4\times10^8\times10^{-14}}} = 14578 \tag{3.56}$$

$$\omega \equiv b,\quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 2.3125\mathrm{kHz} \Longrightarrow T = 431\mu\mathrm{sec} \tag{3.57}$$

となる．LTspice によるシミュレーション結果を図 3.2 に示す．exp 関数的に減衰しつつ振動する様子がわかる．exp 関数の減衰時間は RC 積分回路の時定数の 2 倍であり，振動の周期は純粋な LC 共振回路の共振周波数からわずかにずれるところが興味深い．その理由をぜひ考えて欲しい実際のコイルには内部抵抗があるので，それを含めてシミュレーションを行った結果を図 3.3 に示す．

試してみよう

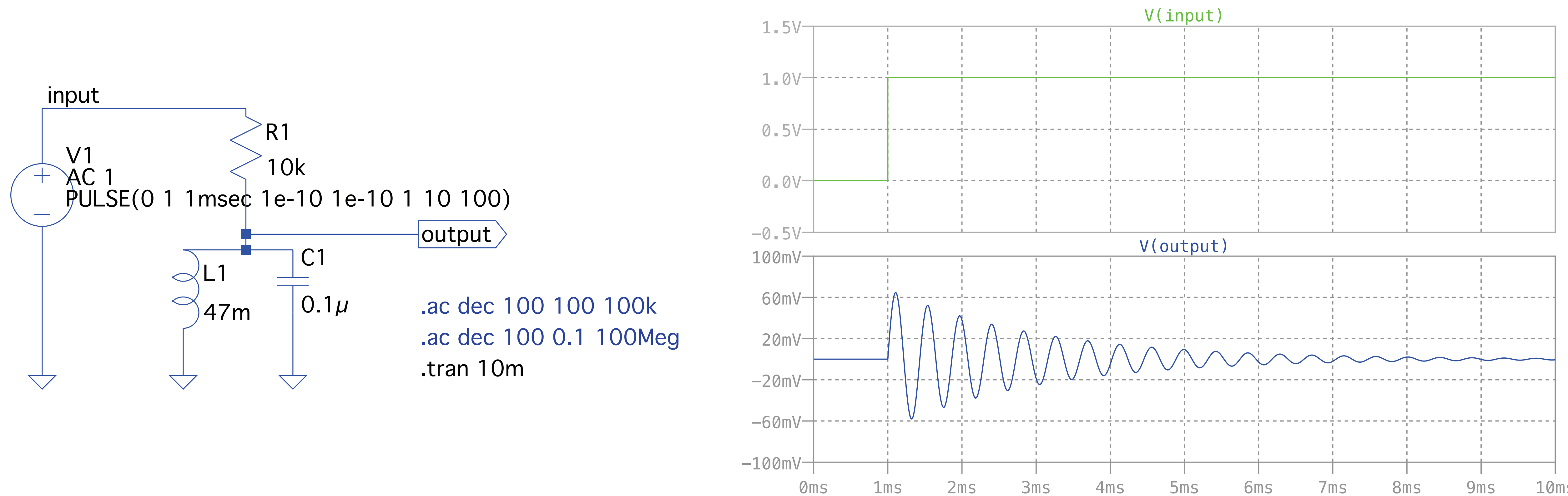


図 3.2: LC(R) 共振回路にステップ関数を入力する．コイルには内部抵抗はない理想的な場合.

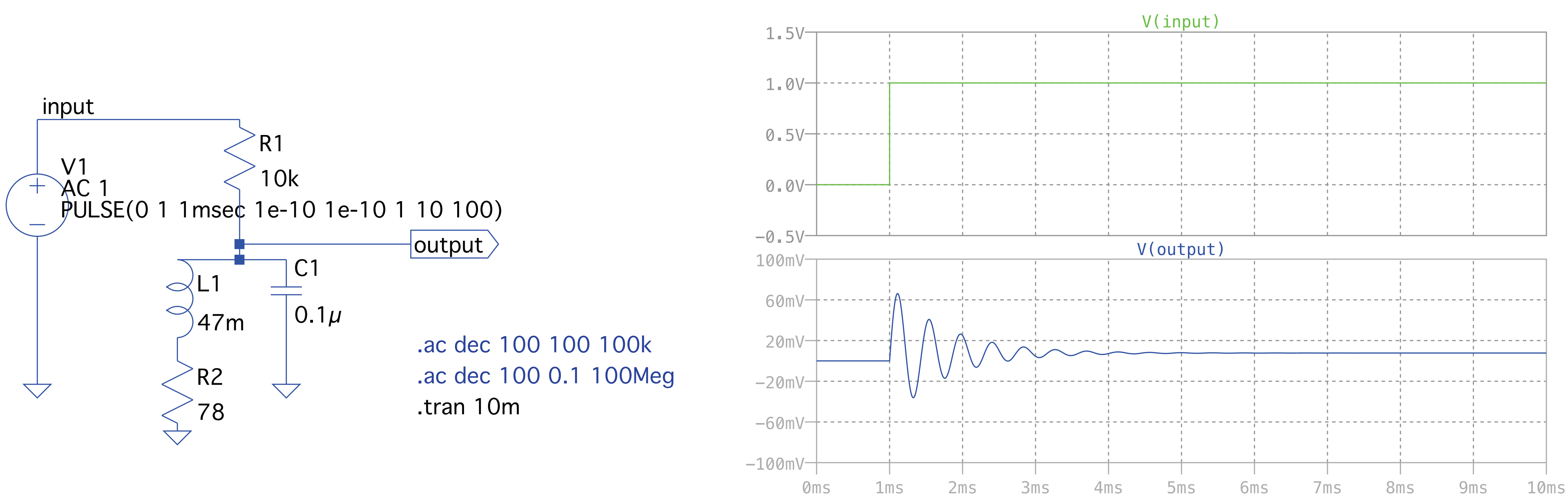


図 3.3: LC(R) 共振回路にステップ関数を入力する．コイルには内部抵抗がある現実的なな場合.