

宇宙物理入門

講義資料

第6章：縮退したフェルミ気体とコンパクト星

Ver. 2

鶴 剛 (tsuru@cr.scphys.kyoto-u.ac.jp)

縮退したフェルミ気体：縮退圧のイメージ

電子はフェルミ粒子であり、複数の粒子が同じ状態をとることができない。この結果、温度を絶対0度まで冷やしても、同じ場所に静止することができず、大半は有限の運動量、すなわち有限の圧力を持つ。

3.6 Degenerate electron gas

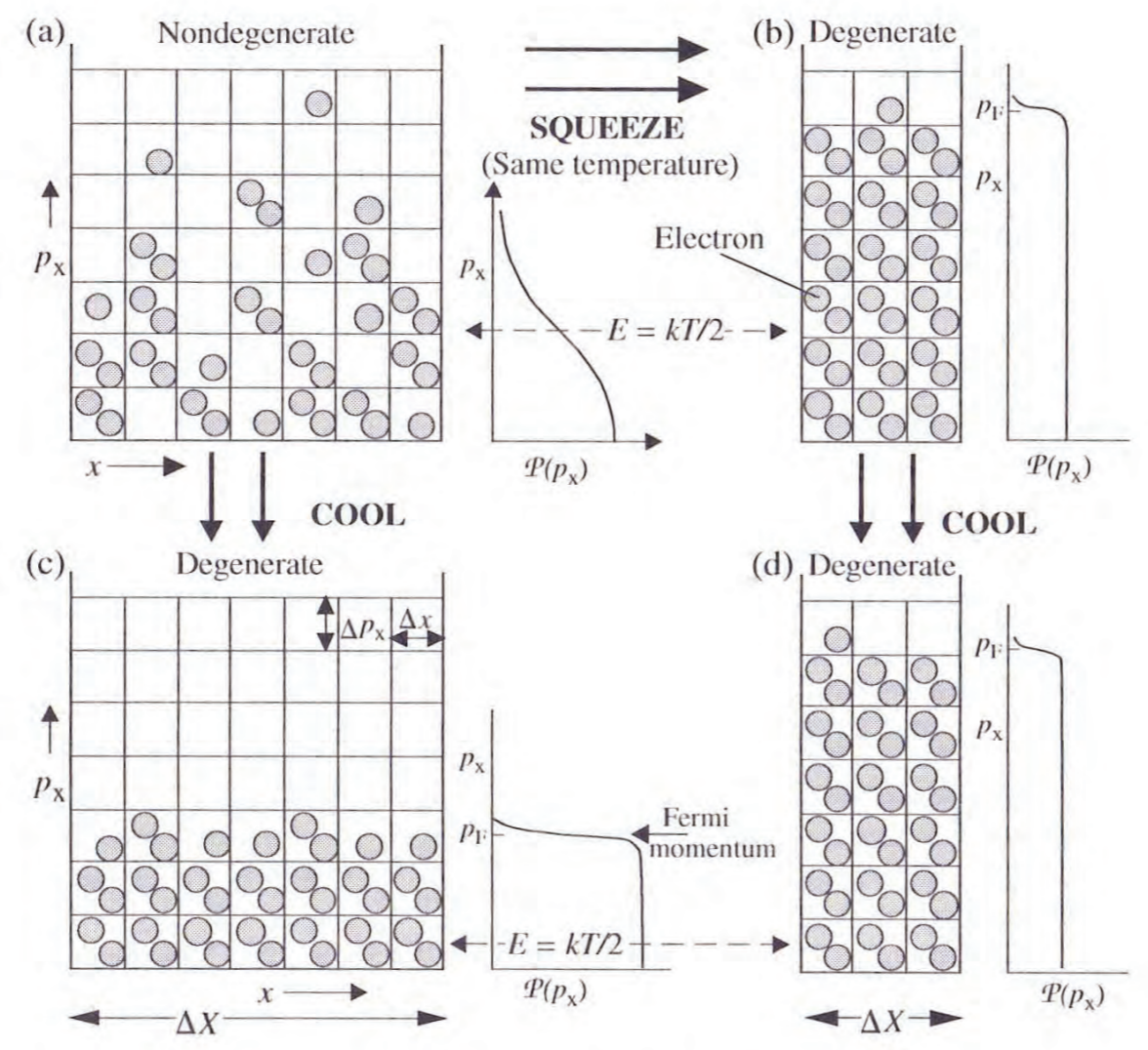


Figure 3.5. The two dimensions of phase space, p_x and x , for a one-dimensional gas of fermions containing 37 particles (shaded circles) for different temperatures and physical lengths ΔX . (a) Nondegenerate gas. (b, c, d) Completely degenerate gas. Shown are the distribution probabilities $\mathcal{P}(p_x)$ or, equivalently, the distribution function f from (4) and (52). The space is divided into individual quantum states $\Delta x \Delta p_x$, each of which may contain zero, one, or two particles of spin 1/2. The horizontal dashed lines indicate the momentum corresponding to particle energy $kT/2$, the average energy for a 1-D ideal (M-B) gas (i.e., for $p_x^2/2m = kT/2$). The electrons in a degenerate gas are forced to much higher average energies than $kT/2$ because of a shortage of available states at lower energies.

図 6.1: 1次元フェルミ気体の2次元位相空間 (Bradt 2008, Fig.3.5)

完全縮退フェルミ気体のフェルミエネルギー

フェルミ分布関数 (フェルミ統計に従うフェルミ粒子の分布関数) $f(\epsilon) = \frac{1}{\exp \frac{\epsilon - \mu}{k_B T} + 1}$

$\exp \frac{\epsilon - \mu}{k_B T} \gg 1$ であり、状態あたりの粒子数が非常に小さい場合は、フェルミ分布もボーズ分布も区別が無くなり、

マックスウェル分布 $f(\epsilon) = \exp \left(-\frac{\epsilon - \mu}{k_B T} \right)$ $f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T} \right)$

不確定性原理から微小体積 $dx dy dz$ の中で (p_x, p_y, p_z) と $(p_x + dp_x, p_y + dp_y, p_z + dp_z)$ の間の運動量を持つスピン自由度 2 で質量 m のフェルミ粒子の数 dN は、

$$dN = \frac{2}{h^3} dx dy dz dp_x dp_y dp_z$$

体積は $dx dy dz$ なので、圧力 $dp_x dp_y dp_z$ の中に入る密度 dn は

$$dn(p) = \frac{dN}{dx dy dz} = \frac{2}{h^3} dp_x dp_y dp_z$$

ここで完全縮退しているのです、小さな運動量からフェルミ運動量 p_F まで全ての状態を占めている。

運動量 p から $p + dp$ の範囲には、 $dp_x dp_y dp_z = 4\pi p^2 dp$ の状態が存在することになる。

従って、 p_F まで積分した粒子の密度は

$$n = \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{h^3} p_F^3 = \frac{8\pi}{3} \lambda^{-3} x^3,$$

λ はコンプトン波長, x は mc で規格化したフェルミ運動量 $\lambda = \frac{h}{mc}, x = \frac{p_F}{mc}$

逆に解けば $p_F = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} h n^{1/3}$

フェルミエネルギー ϵ_F は、非相対論的 (N.R.) $\epsilon_F = \frac{p_F^2}{m} = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{h}{m} n^{2/3}$

相対論的 (R.) $\epsilon_F = p_F c = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} h c n^{1/3}$

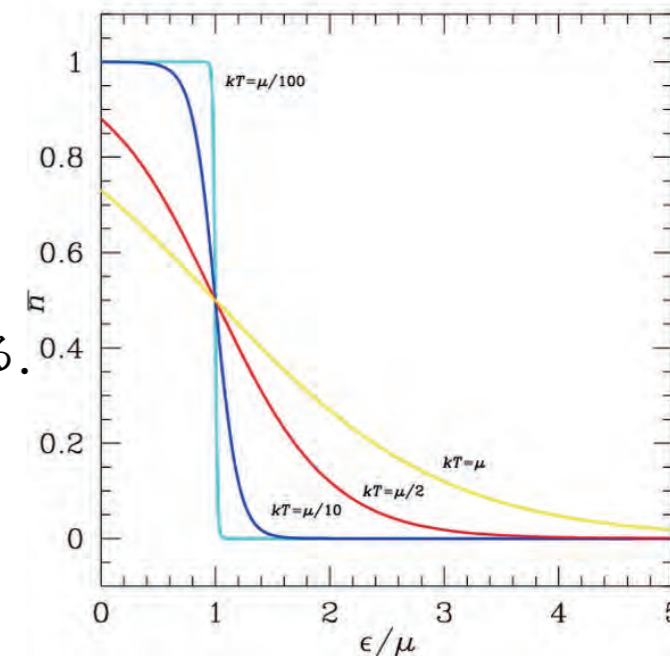


図 6.2: フェルミ分布関数

完全縮退フェルミ気体の状態方程式

圧力 P と内部エネルギー密度 u は

$$P = \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{1}{3} p v \cdot 4\pi p^2 dp = K f(x) \quad u = \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} \varepsilon \cdot 4\pi p^2 dp = K g(x)$$

$$K = \frac{1}{3\pi^2} \lambda^{-3} \cdot m c^2 \quad f(x) = x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} x \quad g(x) = 8x^3 \left((x^2 + 1)^{1/2} - 1 \right) - f(x)$$

非相対論と相対論的の極限はそれぞれ $x \ll 1$, $x \gg 1$ と近似できる。

$$\text{(N.R.)} \quad P = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{h}{m} n^{5/3}, \quad P = \frac{2}{3} u$$

$$\text{(Rel.)} \quad P = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} h c n^{4/3}, \quad P = \frac{1}{3} u$$

圧力と内部エネルギー密度の関係は、単一粒子の場合の運動量とエネルギーの関係から導くことができる。

$$\text{(N.R.)} \quad \varepsilon = \frac{p v}{2} = \frac{m v^2}{2}$$

$$\text{(Rel.)} \quad \varepsilon = p c$$

完全縮退のフェルミ気体が非相対論的/相対論的の境を $x = 1$ とし、境界密度を n^{CR} と書くと、

$$x = \frac{p_F}{m c} = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} h n^{1/3} \cdot (m c)^{-1} = 1$$

$$n^{\text{CR}} = \left(\frac{8\pi}{3} \right) \lambda^{-3} = \left(\frac{8\pi}{3} \right) \left(\frac{h}{m c} \right)^{-3}$$

電子と陽子(または中性子)のコンプトン波長はそれぞれ

$$\lambda_e = 2.43 \times 10^{-10} \text{ [cm]}$$

$$\lambda_p = 1.32 \times 10^{-13} \text{ [cm]}$$

$$n_e^{\text{CR}} = 5.84 \times 10^{29} \text{ [個/cm}^3\text{]}$$

$$n_p^{\text{CR}} \text{ or } n_n = 3.64 \times 10^{39} \text{ [個/cm}^3\text{]}$$

電子と陽子からなるプラズマの場合、電子の方が縮退密度が低いので、先に電子が縮退することになる。

質量は陽子が担う。実際の天体ではヘリウムやさらに重い元素の寄与も考えることになる。

元素の陽子の数に対する核子の数の比を μ_e とする。水素では $\mu_e = 1$ である。

ヘリウムなどそれ以外の元素では陽子と中性子の数がほぼ同じなので、 $\mu_e = 2$ である。

$$\rho_e^{\text{CR}} = \mu_e n_e^{\text{CR}} m_p = 0.97 \times 10^6 \mu_e \text{ [g/cm}^3\text{]}$$

現実の白色矮星はヘリウム、炭素、酸素が主要な組成なので、 $\mu_e = 2$ である。

温度-密度ダイヤグラム

ここまでは温度 $kT = 0$ の完全縮退の場合のみを考えてきた。ここでは非縮退も含めて考えてみる。
非縮退の場合の非相対論的か相対論的かは単純に粒子の運動エネルギーと静止質量の大小関係で決まる。

$$(N.R.) \quad kT \ll mc^2$$

$$(Rel.) \quad kT \gg mc^2$$

非縮退と縮退の条件は： (非縮退) $kT \gg \varepsilon_F$ その境界は $kT = \varepsilon_F$ 、
(縮退) $kT \ll \varepsilon_F$

ε_F 自身は非相対論的と相対論的で違うので、 $kT = \varepsilon_F$

$$(N.R.) \quad kT = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h}{m} n^{2/3}$$

$$(Rel.) \quad kT = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} hcn^{1/3}$$

電子の場合についてまとめると、以下のいずれかが満たされれば相対論的になる。

$$\rho_e > \rho_e^{CR} = \mu_e m_p n_e^{CR} = 0.97 \times 10^6 \mu_e \text{ [g/cm}^3\text{]}$$

$$kT > m_e c^2 = 511 \text{keV}$$

非相対論的と相対論的それぞれの領域に置ける縮退と非縮退の境界は

$$kT = \varepsilon_F$$

$$(N.R.) \quad kT = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h}{m} n^{2/3}$$

$$(Rel.) \quad kT = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} hcn^{1/3}$$

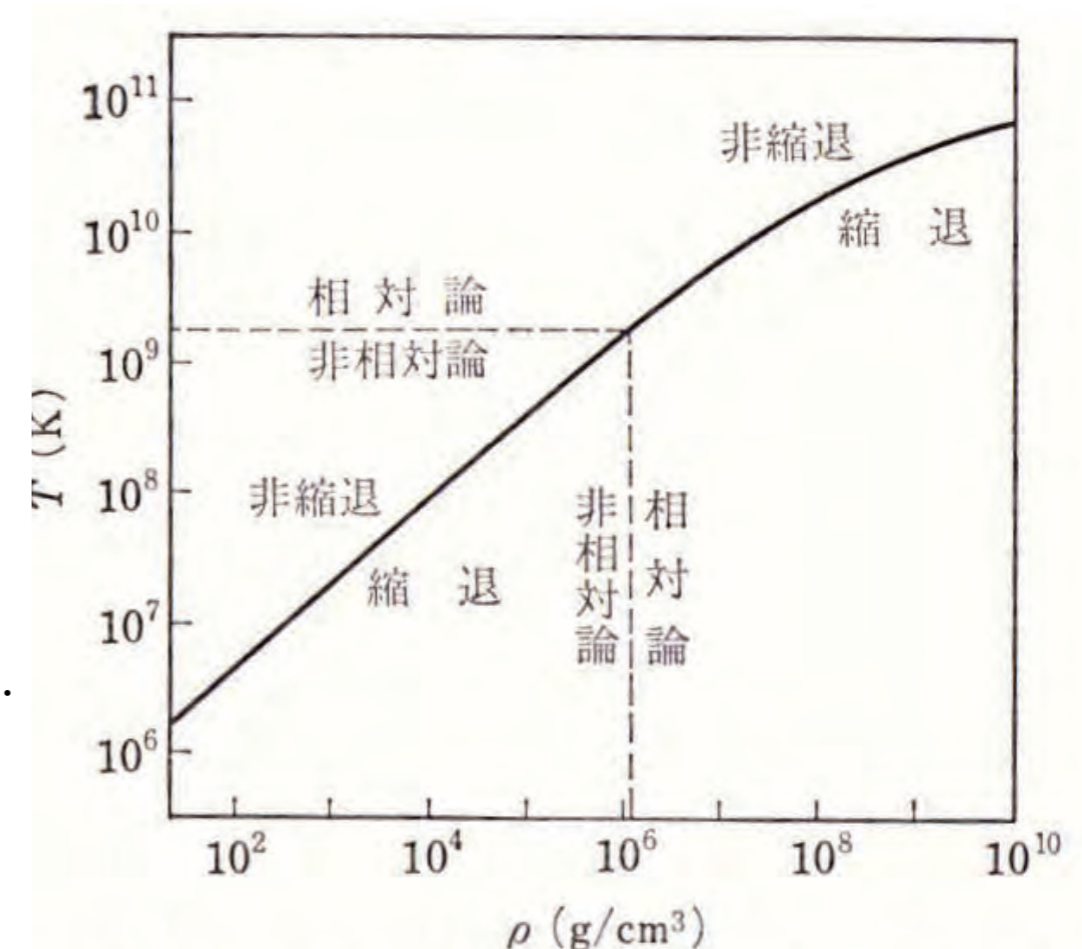


図 2.3 ρ - T 面におけるフェルミ気体 (電子の場合) の相対論-非相対論, 縮退-非縮退の領域

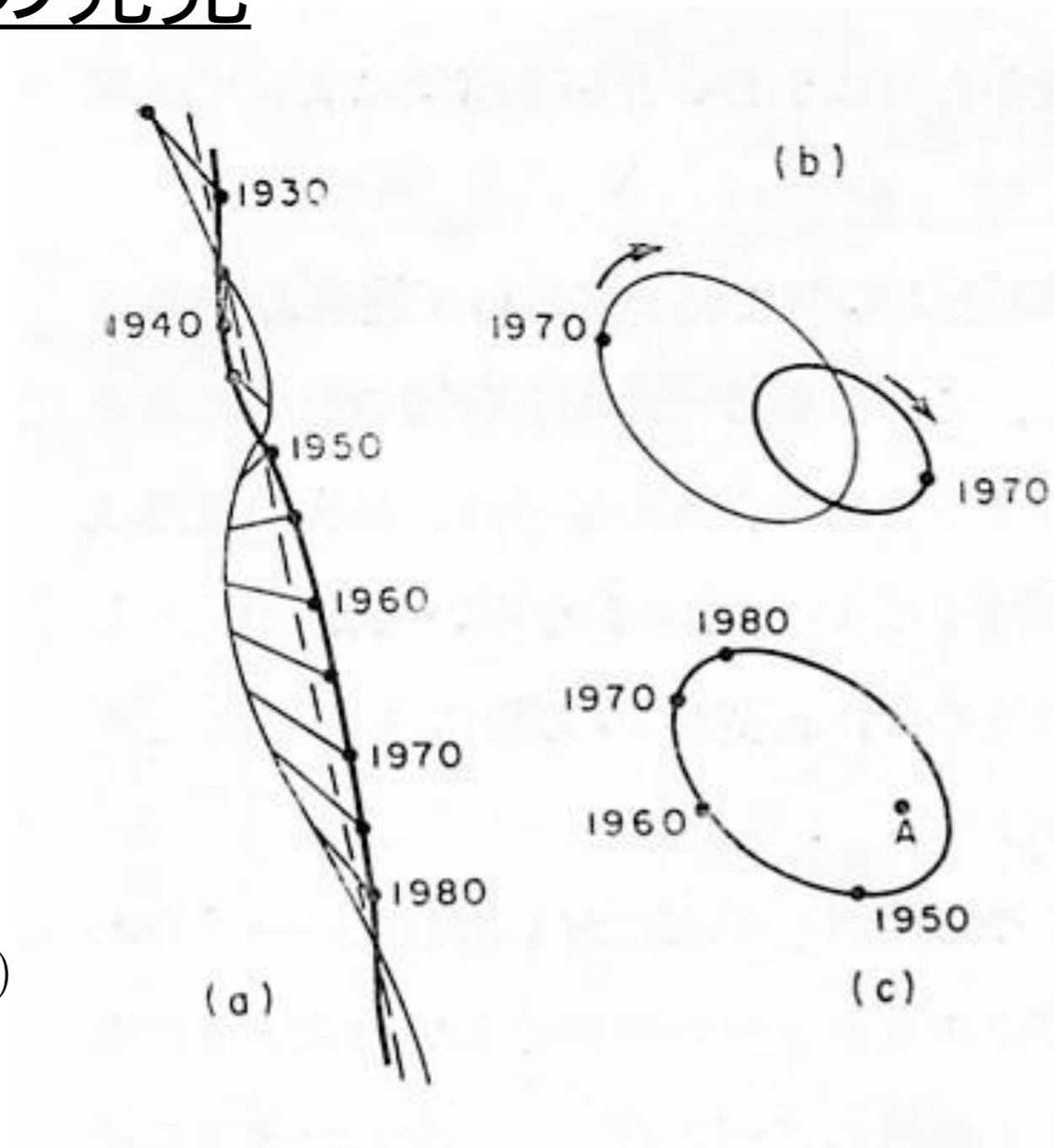
図 6.3: 温度-密度ダイヤグラム (佐藤・原 1983 図 2.3)

白色矮星の発見

- 1844年ベッセル
シリウスのふらつき
→シリウスB?
Aと同程度の質量
- 1862年 クラーク
シリウスBの発見
→高温(白)で地球程度の大きさ
→密度はAの50万倍
- 1915-16年 一般相対論の発表
- 1925年 アダムス
21km/sの重力赤方偏移
→M/Rの決定
→確かに超高密度

$$g = \left(1 - \frac{r_g}{R}\right)^{1/2}$$

$$r_g = 3.0 \left(\frac{M}{M_\odot}\right) (\text{km})$$

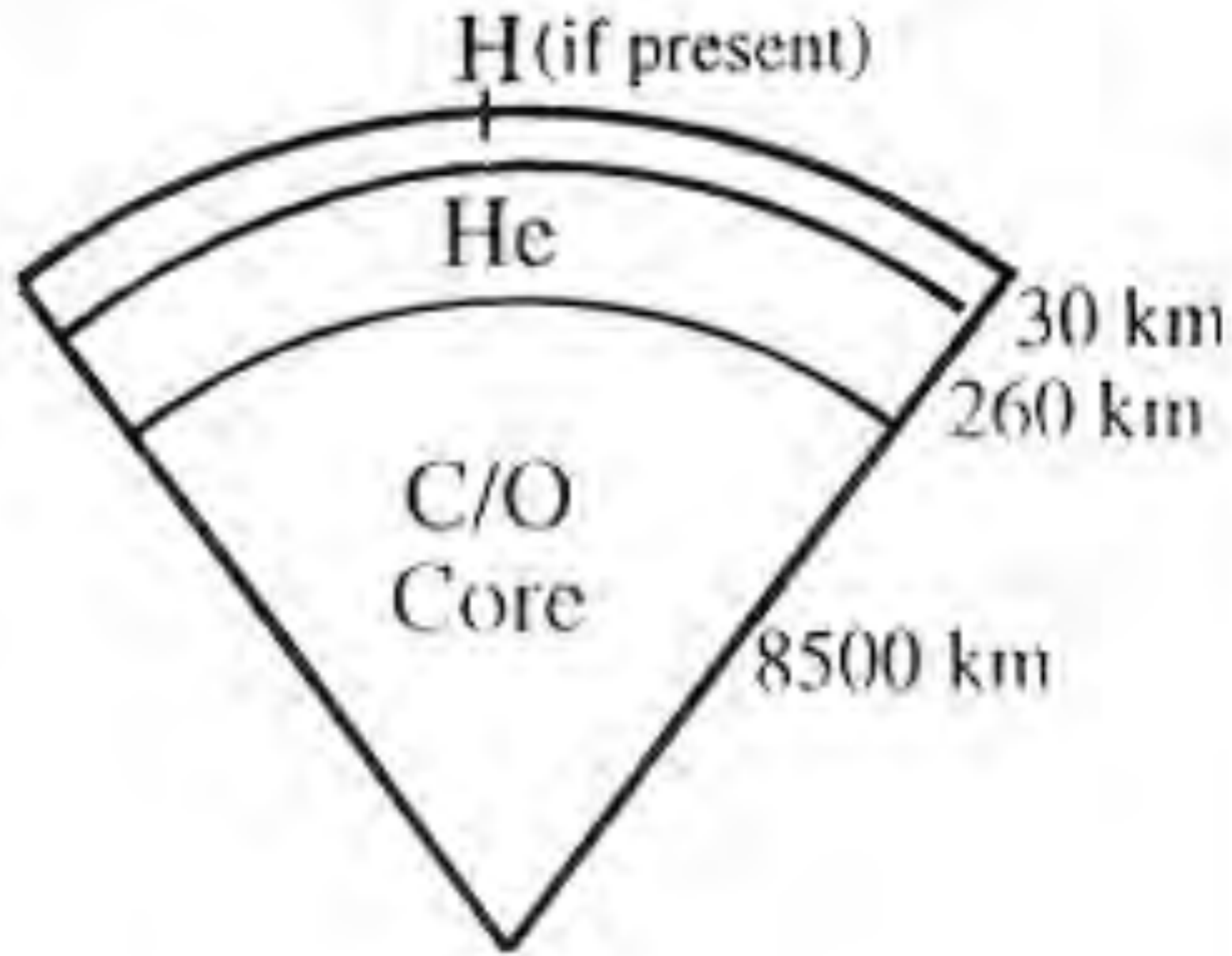


白色矮星の典型的な半径と質量は地球の半径程度で太陽質量である。従って、その密度は

$$R_{\text{WD}} \simeq R_\oplus = 6.37 \times 10^8 (\text{cm})$$

$$M_{\text{WD}} \simeq M_\odot = 1.99 \times 10^{33} (\text{g})$$

$$\rho_{\text{WD}} \simeq \frac{1.99 \times 10^{33}}{(4\pi/3) (6.37 \times 10^8)^3} = 1.8 \times 10^6 (\text{g/cm}^3)$$



Cross Section of a Typical White Dwarf

白色矮星の構造: 質量と半径の関係 (非相対論)

温度が0で完全に縮退したフェルミ気体であっても圧力が存在する。

この「縮退圧」で重力を支えていることが可能になる。

フェルミ気体が電子の場合が白色矮星である。白色矮星の質量 M と半径 R の関係を導出する。

非相対論的な場合

白色矮星の総エネルギーを E_{WD} は、内部エネルギー (Internal Energy) E_U と重力エネルギー E_G の合計
電子密度 n は白色矮星の内部で一様と仮定し、電子の総数を N_e とする

$$E_{WD} = E_U + E_G \quad M = N_e \mu_e m_p$$

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{N_e}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

μ_e は核子による電子1個あたりの質量である。現実に存在する白色矮星では $\mu_e = 2$ である。

一様な密度を持つ星の重力エネルギーは

$$E_G = -\frac{3}{5} \frac{M^2}{R}$$

完全縮退したフェルミ気体の内部エネルギーは、簡単のためにすべての電子がフェルミエネルギーを持つと仮定すると、

$$E_U = N_e \cdot \varepsilon_F = N_e \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{h}{m_e} n^{2/3} = N_e^{5/3} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right) \frac{h}{m_e} \frac{1}{R^2} = \left(\frac{M}{\mu_e m_p} \right)^{5/3} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{5/3} \frac{h}{m_e} \frac{1}{R^2}$$

白色矮星の総エネルギーを E_{WD} は、

$$E_{WD} = E_U + E_G = \left(\frac{M}{\mu_e m_p} \right)^{5/3} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{5/3} \frac{h}{m_e} \frac{1}{R^2} - \frac{3}{5} \frac{M^2}{R}$$

質量を固定した場合、

内部エネルギーは $+1/R^2$ に比例し、重力エネルギーは $-1/R$ に比例する。

R の小さい領域では、必ず正になり、一方で、 R の大きな領域では負であり、 R が大きくなるにつれば0に漸近する (図 6.4(a))。

白色矮星の半径は最も全エネルギーの低い R_0 になる。

R_0 は E_{WD} の R 微分が 0 になる値として求めるられる。

$$\left(\frac{dE_{WD}}{dR} \right) (R = R_0) = -2 \left(\frac{M}{\mu_e m_p} \right)^{5/3} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{5/3} \frac{h}{m_e} \frac{1}{R_0^3} + \frac{3}{5} \frac{M^2}{R_0^2} = 0$$

$$R_0 = \frac{10}{3} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{5/3} \frac{1}{(\mu_e m_p)^{5/3}} \frac{h}{m_e} \frac{1}{M^{1/3}}$$

質量が大きくなると半径はむしろ小さくなる

白色矮星の構造: 質量と半径の関係 (相対論)

相対論的な場合

質量を上げていくと半径は小さくなるという事は、密度は高くなり、その結果どこかの時点でフェルミエネルギーは必ず相対論的になる。内部エネルギーを下記の式に変更する必要がある。

$$E_U = N_e \cdot \varepsilon_F = N_e \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} hc n_e^{1/3} = N_e^{4/3} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{1/3} hc \frac{1}{R} = \left(\frac{M}{\mu_e m_p} \right)^{4/3} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{1/3} hc \frac{1}{R}$$

$$E_{WD} = E_U + E_G = \left(\frac{M}{\mu_e m_p} \right)^{4/3} \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{1/3} hc \frac{1}{R} - \frac{3}{5} \frac{M^2}{R}$$

となる。内部エネルギーも重力エネルギーも R に対する依存性は同じ $1/R$ となる。符号は両者で違うので、質量を与えると、半径によらず全エネルギーは正の値をとるか (図 6.4(b)), 負の値をとるか (図 6.4(c)), しかない。内部エネルギーの質量依存性は $M^{4/3}$ であるのに対し、重力は M^2 である。従って、質量が小さければ、全エネルギーは必ず正になり、大きければ必ず負になる。

まず、質量が小さく全エネルギーが正の値をとる場合を考える。ある半径からスタートすると、全エネルギーが正なので半径が大きくなっていく。すると密度が下がって行き、必ずどこかで相対論的から非相対論的状態に移行する。そうなれば前項で見た通り、内部エネルギーの半径依存性は $1/R^2$ にかわることで、安定な解が登場する。従って、その質量では白色矮星として存在できる事になる。別の言い方をすると、ここでのスタートポイントは図 6.4(a) の R のとても小さい領域であり、その領域は相対論的だった、と言っても良い。

一方、質量が大きく全エネルギーが負の値をとる場合を考える。この場合は、半径が小さいほど全エネルギーがより小さく (大きな負の値) をとるので、半径はより小さくなっていく。質量が小さい場合とは違い、どこかで非相対論的状態になるわけでもない。どこまでも小さくなる。すなわち電子の縮退圧で支えられた白色矮星としては存在出来ない事を意味する。

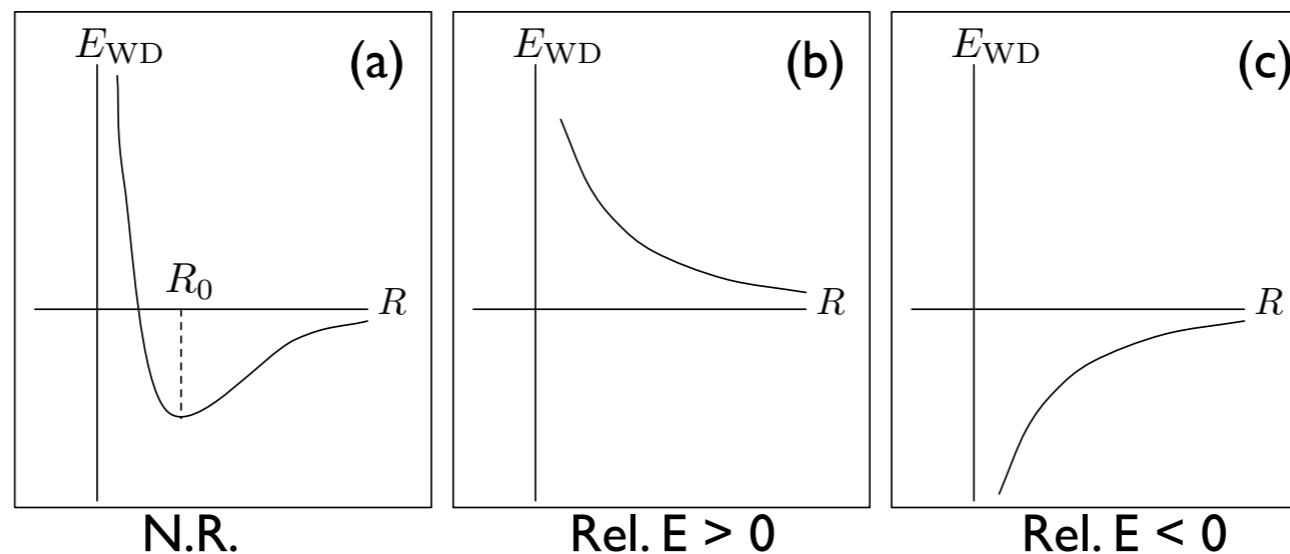


図 6.4: 質量を固定した場合の白色矮星の半径と全エネルギーの関係。(a) N.R. 非相対論的完全縮退, (b) Rel. $E_i > 0$ 相対論的完全縮退で全エネルギーが正の場合, (c) Rel. $E_i < 0$ 相対論的完全縮退で全エネルギーが負の場合。

チャンドラセカール限界質量

ここまでの思考実験から、白色矮星には最大の質量 M_{\max} が存在する事がわかる。 M_{\max} は、相対論的な場合の $E_{\text{WD}} = 0$ で決まる。つまり、

$$E_{\text{WD}} = E_{\text{U}} + E_{\text{G}} = \left(\frac{M_{\max}}{\mu_e m_p}\right)^{4/3} \left(\frac{9}{32\pi^2}\right)^{1/3} hc \frac{1}{R} - \frac{3}{5} \frac{M_{\max}^2}{R} = 0$$

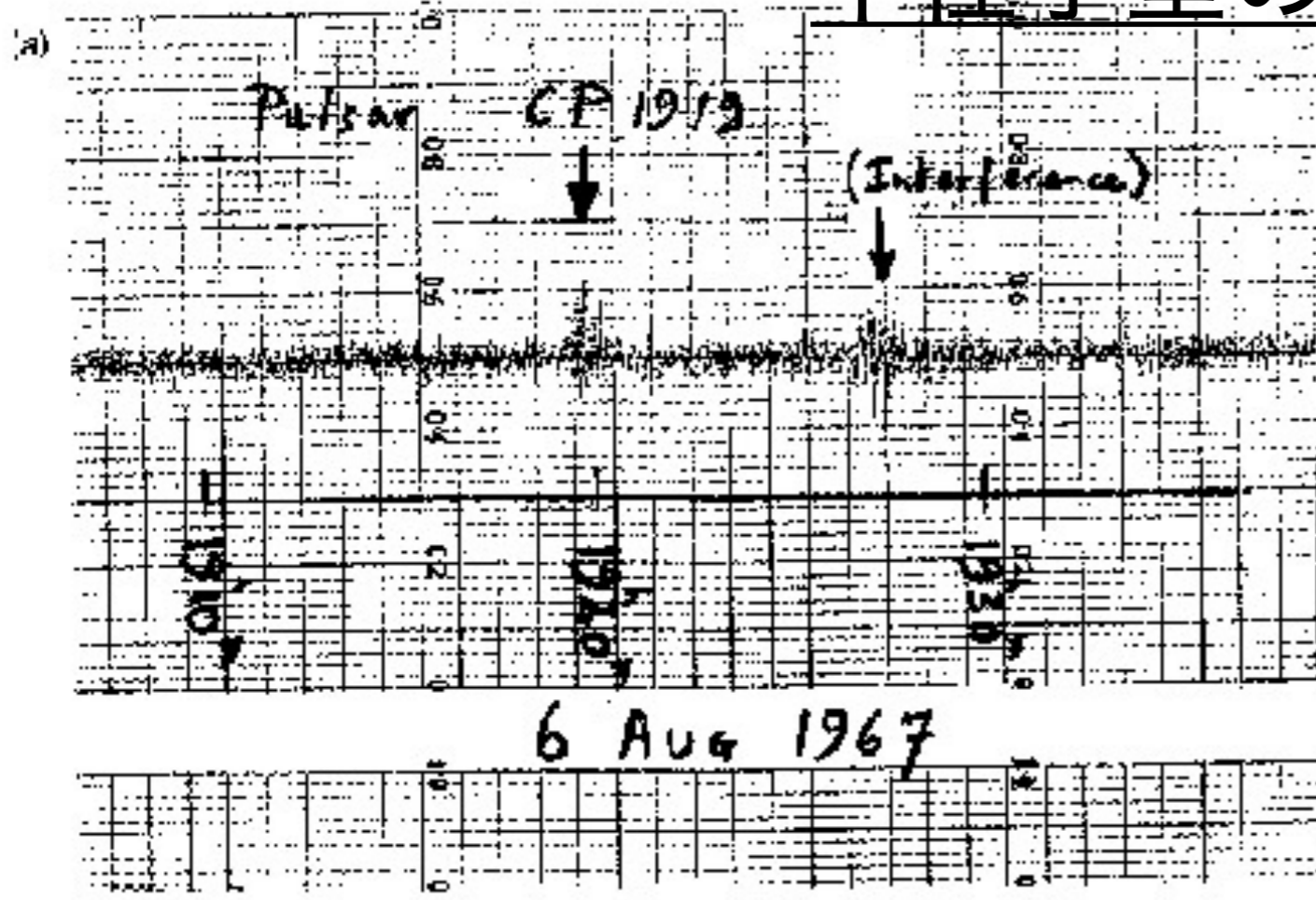
$$M_{\max} = \left(\frac{9}{32\pi^2} \frac{5^3}{3^3}\right)^{1/2} \frac{1}{(\mu_e m_p)^2} \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} = \left(\frac{9}{32\pi^2} \frac{5^3}{3^3}\right)^{1/2} \frac{1}{(2 \cdot 1.67 \times 10^{-24})^2} \left(\frac{6.63 \times 10^{-27} \cdot 3.00 \times 10^{10}}{6.67 \times 10^{-8}}\right)^{3/2}$$

$$= 5.3 \times 10^{33} [\text{gm}] = 2.7 M_{\odot}$$

この最大質量をチャンドラセカールリミットと呼ぶ。

以上の計算は、密度を一様に行っている、全ての電子はフェルミエネルギーをとるとして内部エネルギーを得ている。実際には、密度は一様ではなく、 $N = 3$ のポリトロップとなる。これを用いると、チャンドラセカールリミットは $1.4 M_{\odot}$ となる。

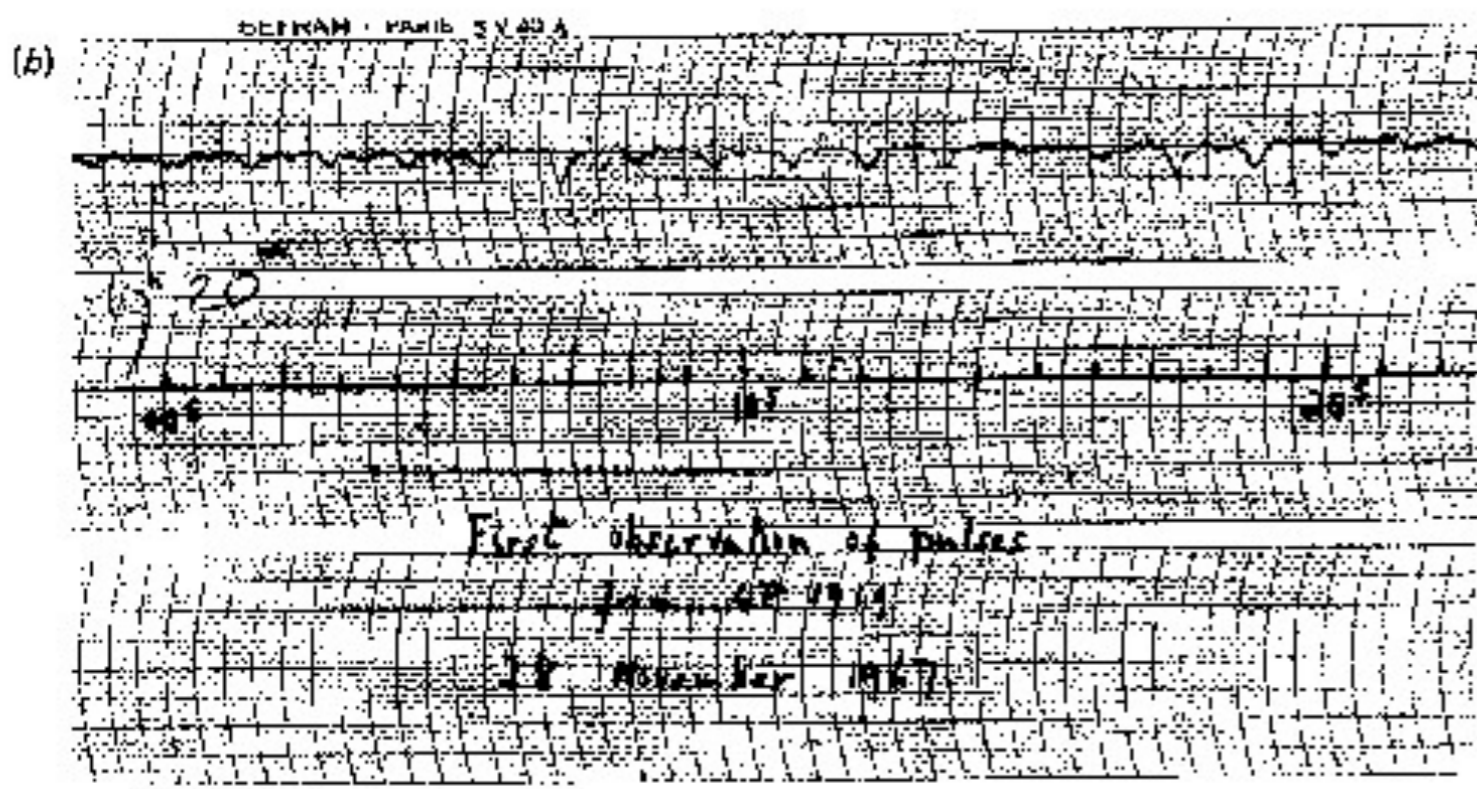
中性子星の発見



1967.8.6

Herwish and Bell

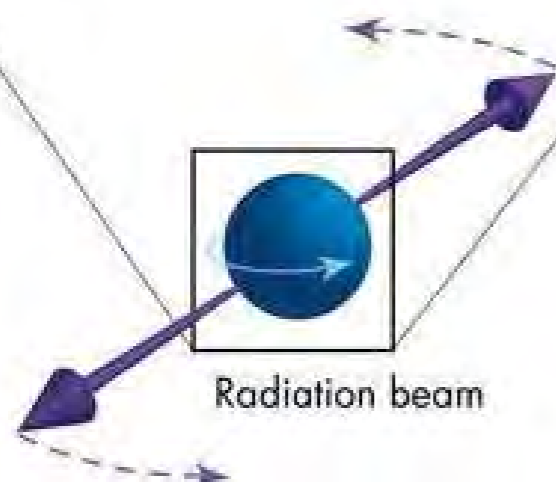
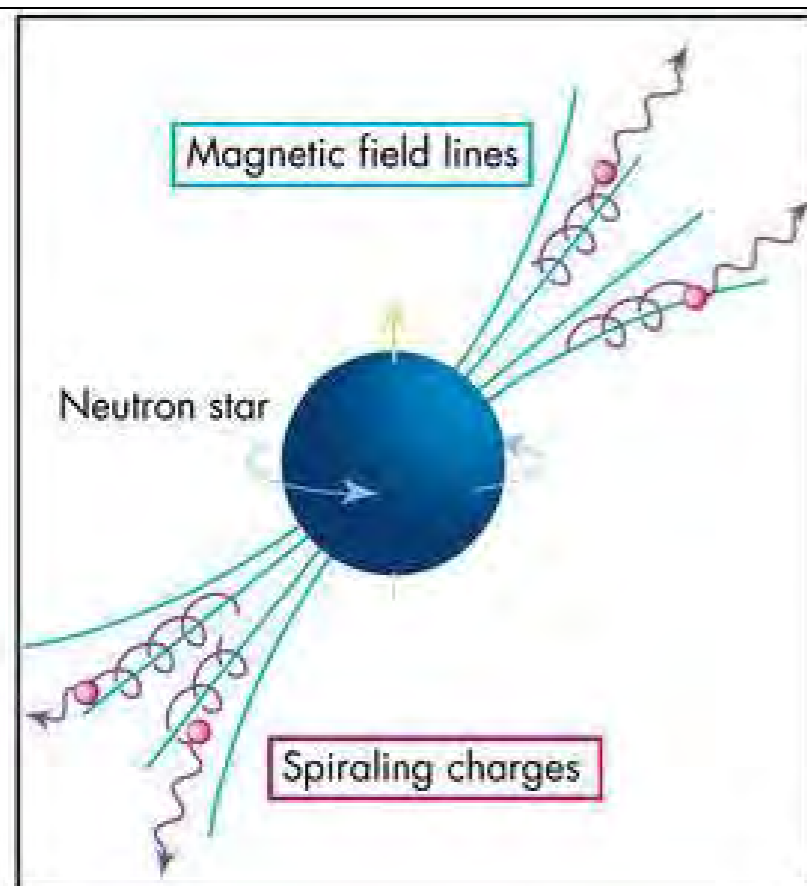
1.337sec



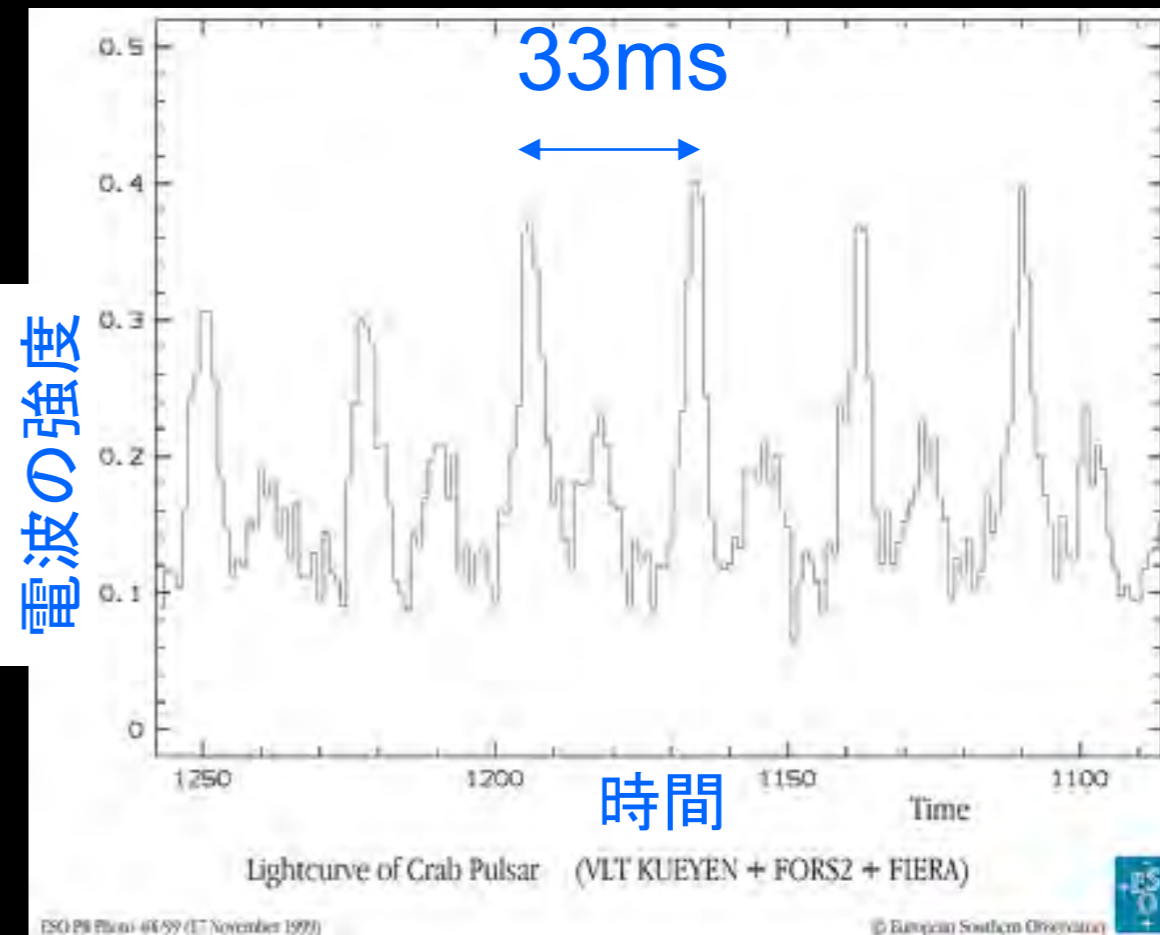
<http://www.jb.man.ac.uk/%7Epulsar/Education/Tutorial/tut/node3.html#SECTION00012000000000000000>

中性子星の発見

- かに星雲(1054年に爆発した超新星爆発の残骸)の中心にあるパルサー
- 周期: 33ms



B



<http://www.mhhe.com/physsci/astronomy/army/instructor/graphics/ch14/1409.html>より

<http://www.eso.org/outreach/press-rel/pr-1999/pr-17-99.html>より

33msecという短い周期から、星の密度は原子核並み

中性子星の発見

Herwish と Bell によって 1967 年に世界で最初に発見された電波パルサーの周期は 1.337sec
PSR B1957+20 (Black Widow Pulsar) は 1.6074 msec (second fastest) である。

この天体のサイズはパルス周期 1.6msec に光速を掛けた値である、480 km よりも小さくなければならない。
速く回転すると遠心力が大きくなる。最後は重力に打ち勝ってしまうと、星としてはバラバラになる。

そうならない 条件として重力が遠心力を勝っているという条件を科すことで密度に制限が付けられる。

天体の質量、半径、密度、回転周期 (= パルス周期、スピン周期) をそれぞれ M 、 R 、 ρ 、 T とする。

テスト粒子の質量を m とすると、重力が遠心力を打ち勝つ条件は

$$G \frac{Mm}{R^2} > \frac{mv^2}{R}$$

v は星表面の回転速度であり、 $v = 2\pi R/T$ である。

$$G \frac{M}{R^2} > \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

これを実現可能なのは、ブラックホールを除けば原子核で作られた中性子星 (水素原子核の密度は $10^{14-15} \text{ g cm}^{-3}$) だけである。

中性子星の構造：縮退圧

密度が上昇すると、電子のフェルミエネルギーが上昇するので、電子と陽子が合体し、中性子になる方が安定となる。
 中性子の縮退圧で支えられる星が誕生 中性子星は巨大な原子核とも思える

中性子星中の中性子は安定に存在している。

中性子に対して数%程度の個数密度を持つ陽子と電子が存在している。

中性子が崩壊して電子を放出したくても、そこには既に縮退した電子が存在するために、パウリの排他律により崩壊できない

中性子もフェルミ粒子なので電子と全く同じ議論から、完全縮退した中性子の縮退圧で支えられた星や、そのチャンドラセカールリミットを得る事が出来る。図 6.5 は、電子または中性子の縮退圧で支えられた星の密度と質量の関係である。この図から分かる通り、中性子の縮退圧で支えられた星の最大質量は $0.7M_{\odot}$ である (白色矮星よりも低い)。一方で、実際に観測されている中性子星の質量はこの値よりも大きく、 $1.4M_{\odot}$ 付近である。このことは、中性星では縮退圧以外の圧力が働いている事がわかる。その力は核力であり、その大きさが中性子星の質量や半径が決まることになる。別の言い方をすれば、中性子星の質量や半径を観測する事で、中性子星のような状況での核力の状態を調べる事が可能になる。

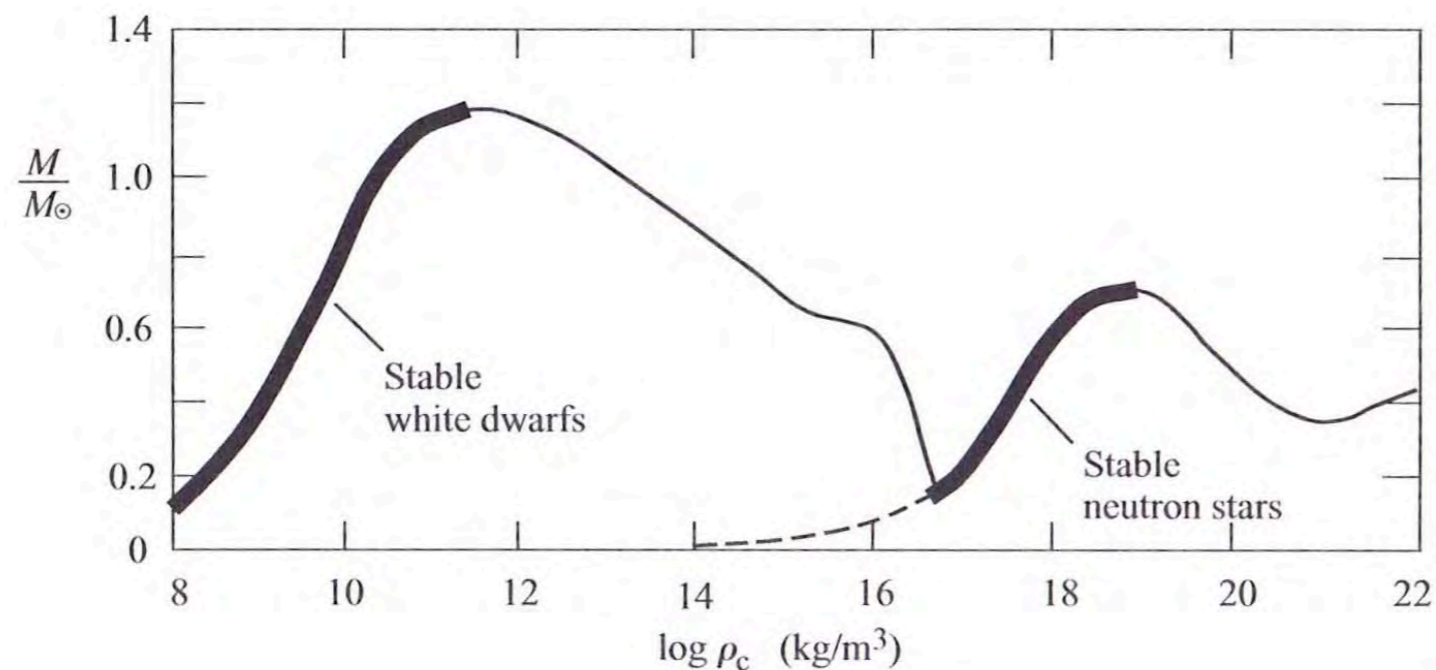
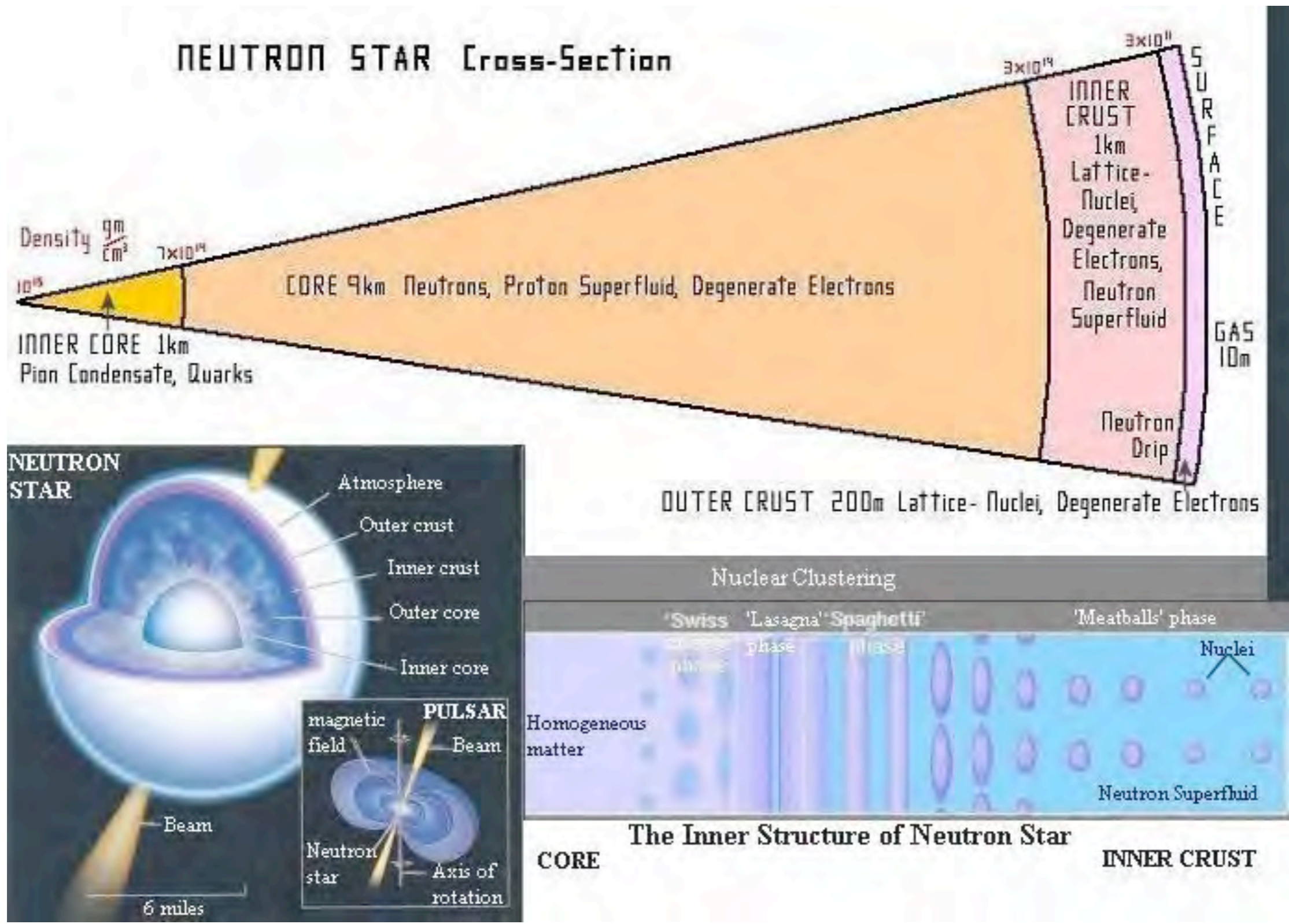


Figure 4.11. Mass of compact stars as a function of central density ρ_c for equations of state known as HW (1958) and OV (1939). The rising portions of the curve (heavy lines) are the regions where stable white dwarfs and neutron stars could exist. For these equations of state the maximum masses for white dwarfs and neutron stars would be 1.2 and $0.7 M_{\odot}$, respectively. Nuclear forces, not included, would raise the maximum mass of a neutron star to about $2 M$. [From S. Shapiro and S. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, Wiley Interscience, 1983, p. 244]

図 6.5: 電子または中性子の縮退圧で支えられた星の密度と質量の関係

中性子星の構造：縮退圧

実際の中性子星の内部構造は図 6.6 の様になっている。外殻は、格子を組んだ固体の原子核で、中性子過剰となっている。内殻は、原子核と中性子の共存状態。自由中性子の部分は、超流動状態であると考えられている。さらに、内側はクォーク物質でできている。おおよそ半径 10km、質量が $1.4M_{\odot}$ である。

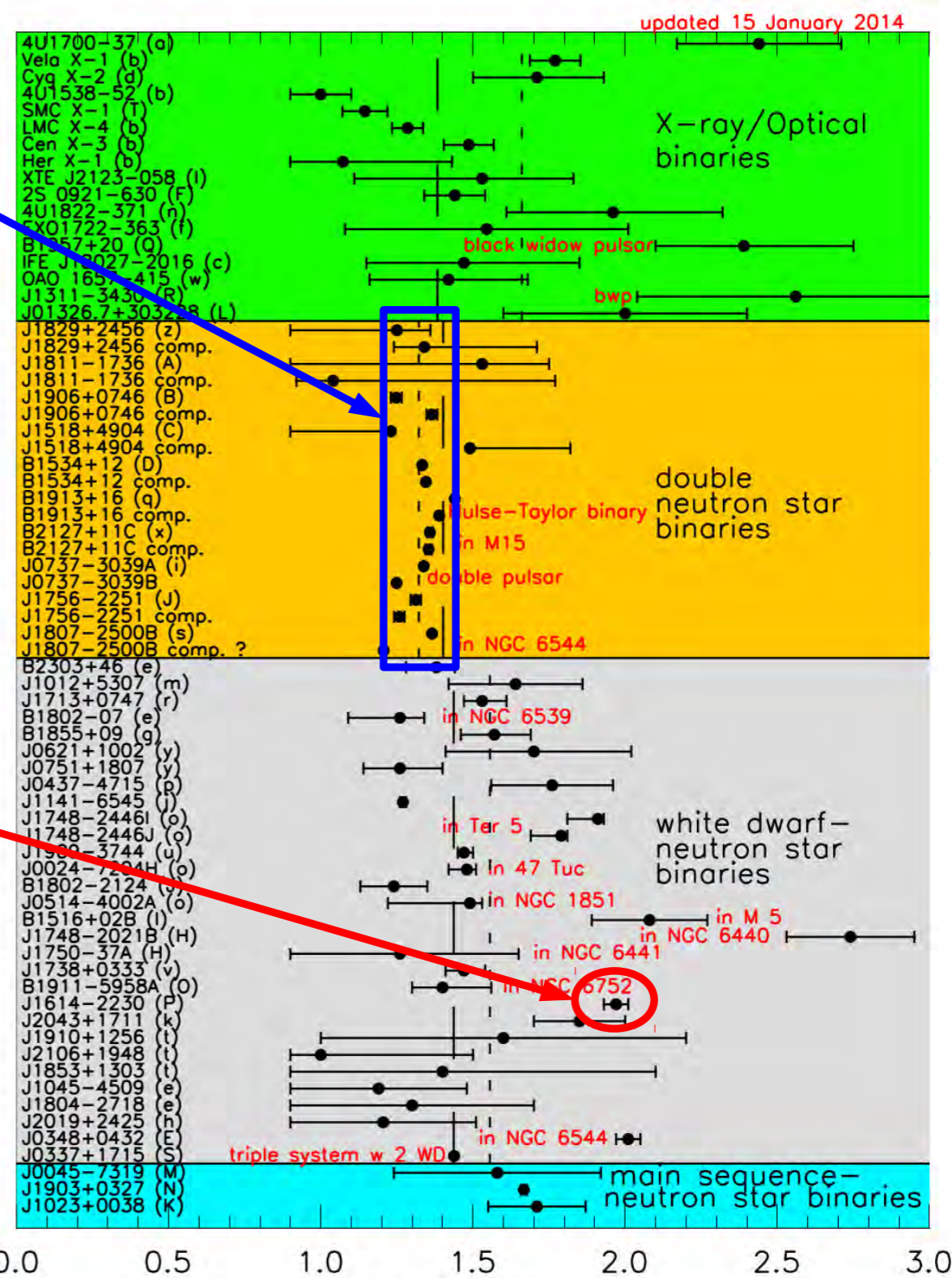


中性子星質量の観測結果

- 精度よく測れる中性子星連星では $1.4 M_{\odot}$ に集中
- 通常の星や白色矮星との連星の場合は一般には誤差が大きい。
- 最近(2010年)、重い中性子星の質量が精度よく観測された
 $M_{NS} = 1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$

Demorest et al. ('10)

中性子星の質量は
 $M_{NS} = (1-2) M_{\odot}$

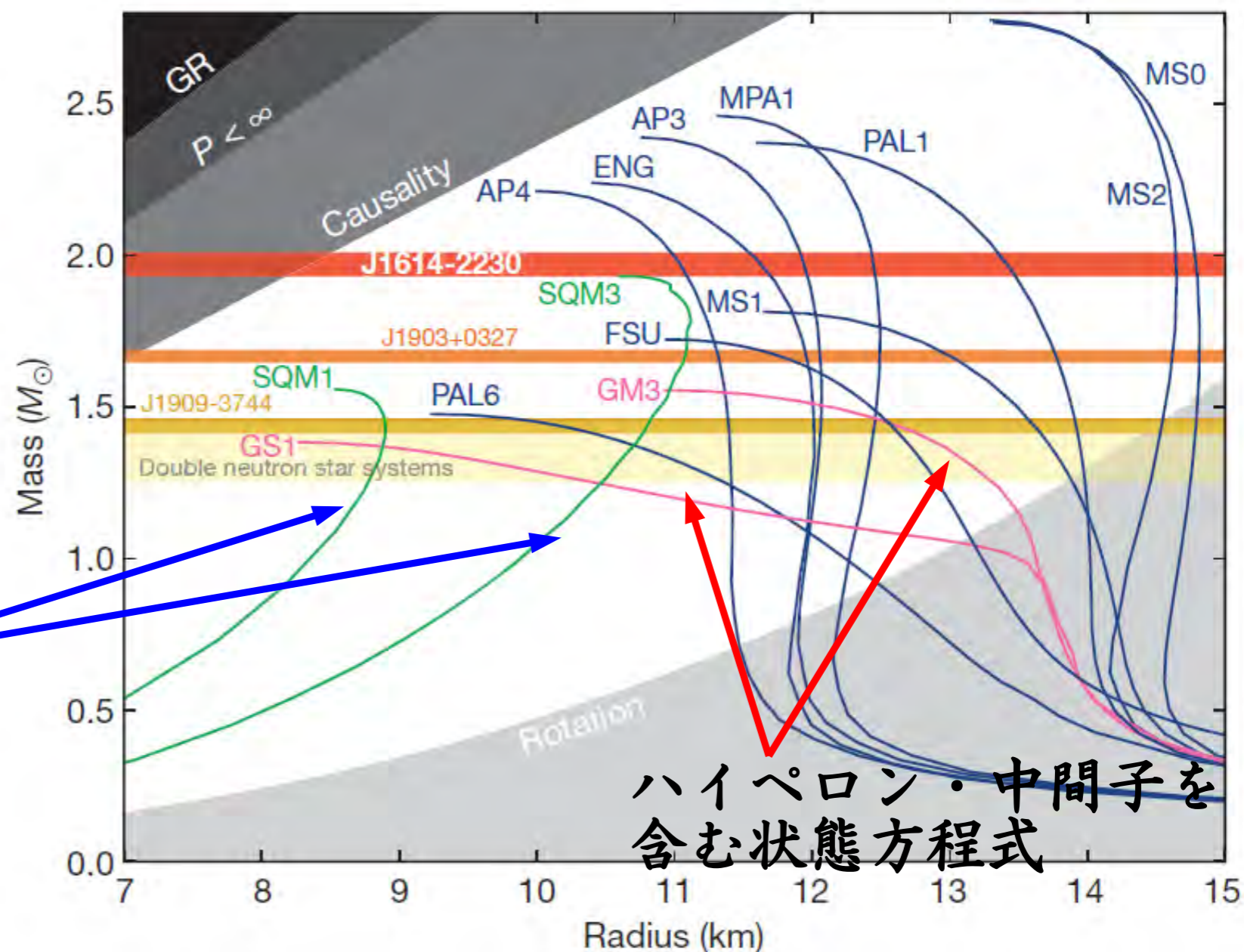


Lattimer ('14)

重い中性子星パズル

- 2010年の大ニュース：重い中性子星の発見
→ 核子以外のハドロンを含む状態方程式を棄却(?)

クォーク物質
状態方程式



Demorest et al. ('10)

ブラックホール

ブラックホールの半径と質量

シュバルツシルト半径 r_g がブラックホールの半径だと考えて、様々なブラックホールの密度を求める。

$$r_g = 2G \frac{M}{c^2} = 2.95 \times 10^5 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ (cm)}$$

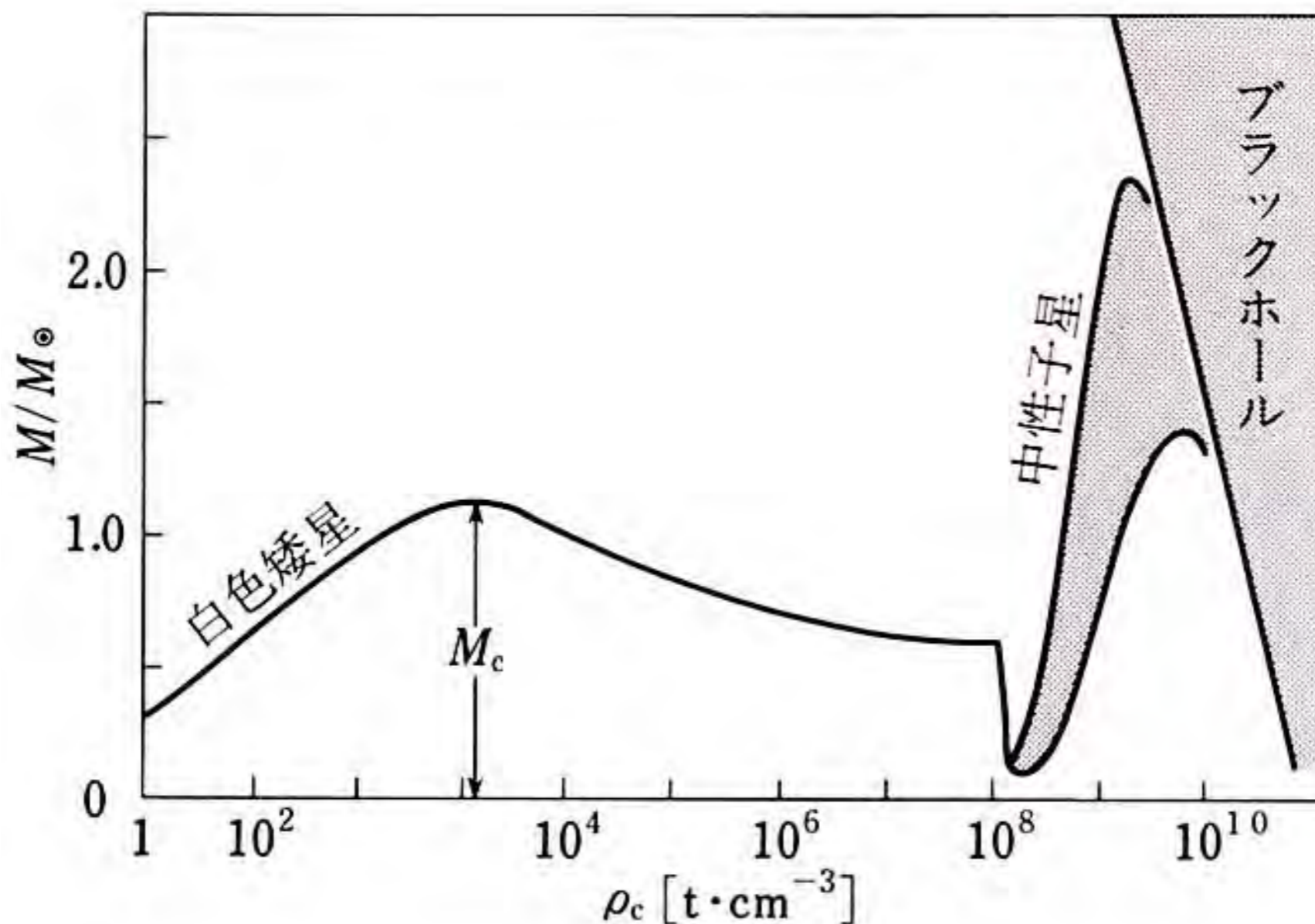
$$\rho = \frac{M}{(4\pi/3)r_g^3} = \frac{3}{32} \frac{c^6}{\pi G^3 M^2} \propto M^{-2} = 1.85 \times 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2}$$

M	R	ρ
$1M_\odot$	2.95(km)	$1.85 \times 10^{16}(\text{g/cm}^3)$
$10M_\odot$	29.5(km)	$1.85 \times 10^{14}(\text{g/cm}^3)$
$10^6 M_\odot$	$2.95 \times 10^{11}(\text{km}) = 1.97 \times 10^{-2}(\text{AU})$	$1.85 \times 10^4(\text{g/cm}^3)$
$10^8 M_\odot$	1.97(AU)	$1.85(\text{g/cm}^3)$
$10^9 M_\odot$	19.7(AU)	$0.0185(\text{g/cm}^3)$

表 6.1: ブラックホールの質量に対する半径、密度の値

コンパクト星：質量と密度のまとめ

図 6.6: 中性子星の内部構造



白色矮星および中性子星の質量と中心密度の関係。 M_c は電子捕獲を考慮した場合の白色矮星の限界質量。

図 6.7: コンパクト星の中心密度と半径の関係