宇宙物理入門
講義資料

第４章：輻射の物理の基礎とブラックボディ

Ver. 0

鶴 剛 (tsuru@cr.scphys.kyoto-u.ac.jp)

Specific Intensity (or Brightness)

Specific Intensity (輻射強度) or Brightness (輝度) I_ν の定義

小さい面積 dA に対して垂直方向の小さい立体角 $d\Omega$ に対して、単位時間、単位周波数当たりで流れている (その場所で湧き出しがあるという意味ではない) エネルギーを dE とすると、Specific Intensity or Brightness I_ν は以下のように書ける。

Specific Intensity or Brightness I_ν

$$I_\nu = \frac{dE}{dA dt d\nu d\Omega} (\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{ster}^{-1}\text{Hz}^{-1})$$

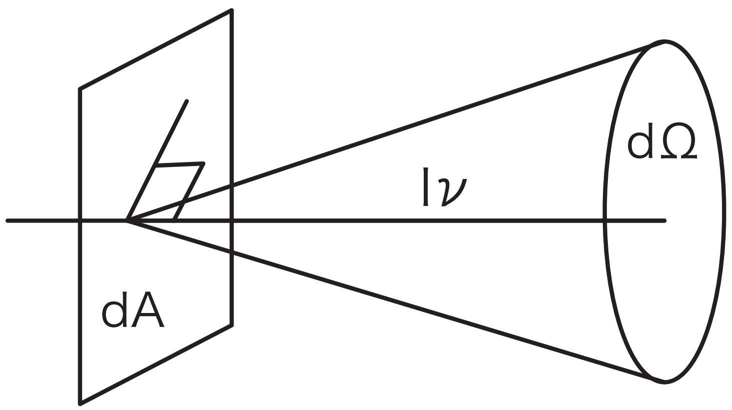


図 4.1: Speciftc Intensity

I_ν を周波数で積分したトータル Intensity

$$I(\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{ster}^{-1}) = \int I_\nu d\nu$$

I_ν の全方向の平均を J_ν

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi}\int I_\nu d\Omega (\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{ster}^{-1}\text{Hz}^{-1})$$

Pressure, Energy Density

圧力

面積 dA に与える圧力は、輻射の通る方向に対してなす角度 θ をかけて、エネルギーと運動量の関係 $E = pc$ から

$$p_\nu(\text{dynes cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}) = \frac{1}{c}\int I_\nu \cos^2\theta d\Omega \qquad p(\text{dynes cm}^{-2}) = \int p_\nu d\nu$$

Radiatioin Energy Density u_ν

Specific Intensity or Brightness I_ν は

$$I_\nu = \frac{dE}{dAdtd\Omega}(\text{ergs sec}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{ster}^{-1}\text{Hz}^{-1})$$

これは $dV = dAcdt$ の体積に存在するフォトンが dA を通って出ていったものなので、$d\Omega$ 方向に進んでいる単位周波数あたりの輻射のエネルギー密度 $u_\nu(\Omega)$

$$u_\nu(\Omega) = \frac{I_\nu}{c}(\text{ergs cm}^{-3}\text{ster}^{-1}\text{Hz}^{-1})$$

Ω を全部積分すると、単位周波数あたりの輻射エネルギー密度は

$$u_\nu = \int u_\nu(\Omega)d\Omega = \frac{1}{c}\int I_\nu d\Omega(\text{ergs cm}^{-3}\text{Hz}^{-1}) = \frac{4\pi}{c} J_\nu(\text{ergs cm}^{-3}\text{Hz}^{-1})$$

全輻射エネルギー密度 u

$$u = \int u_\nu d\nu(\text{ergs cm}^{-3})$$

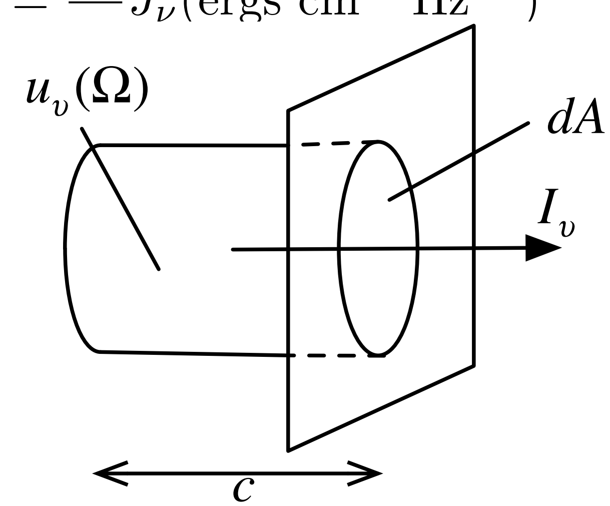


図 4.2: Radiation Energy Density と Specific Intensity の関係

Flux, Luminosity

Flux の定義

輻射が dA から角度 θ 方向へ出ていく場合には、実行的な面積が dA が $\cos\theta dA$ になるので、単位時間あたり、単位周波数あたりに放出されるエネルギーは

$$dF_\nu(\mathrm{ergs\ sec^{-1}cm^{-2}ster^{-1}Hz^{-1}}) = I_\nu \cos\theta d\Omega$$

立体角で積分する。 $$F_\nu(\mathrm{ergs\ sec^{-1}cm^{-2}Hz^{-1}}) = \int I_\nu \cos\theta d\Omega$$

I_ν が等方的な場合，単位面積あたりに単位時間に単位周波数あたりに放出されるエネルギーは

$$F_\nu = \int_{\theta<\frac{\pi}{2}} I_\nu \cos\theta d\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} I\nu \cos\theta \cdot 2\pi \sin\theta d\theta = \pi I_\nu$$

F_ν を周波数で積分したトータル Flux は $$F(\mathrm{ergs\ sec^{-1}cm^{-2}}) = \int F_\nu d\nu$$

Luminosity (球対称)

観測者が観測する Flux F'_ν 　距離 D に位置する相手の天体の光度 Luminosity L

通常の恒星の様に球対称に放出

$$F'_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi D^2}$$

半径 R の球対称の恒星表面上での単位面積あたりに単位時間に単位周波数あたりに放出されるエネルギーは $F_\nu = \pi I_\nu$

$$L_\nu = 4\pi R^2 F_\nu = 4\pi^2 R^2 I_\nu$$

Luminosity (ディスク)

降着円盤の様に半径 R の円盤上の場合は、ディスク法線と観測者方向がなす角度を θ

Luminosity と観測者が観測する Flux の関係

$$F'_\nu = \frac{L_\nu \cdot \cos\theta}{2\pi D^2}$$

Radiation Transfer: Emission

Emission

Specific Intensity が短い距離 ds を通過する場合、その場所で湧き出された放射、すなわち Emission が加わると、波長 ν において単位長さ当たりの Specific Intensity の変化量 dI_ν は、

$$dI_\nu = j_\nu ds = \frac{P_\nu}{4\pi} ds = \frac{\epsilon_\nu \rho}{4\pi} ds$$

自発的放射が単位体積 dV、単位立体角方向 $d\Omega$、単位時間 dt に流れ出す輻射で作られている場合，*Spontenious Emission Coefficient* j を次のように定義する。

$$j_\nu = \frac{dE}{dV dt d\nu \cdot d\Omega} (\mathrm{ergs\ sec^{-1} cm^{-3} ster^{-1} Hz^{-1}})$$

$$j = \int j_\nu d\nu = \frac{dE}{dV dt \cdot d\Omega} (\mathrm{ergs\ sec^{-1} cm^{-3} ster^{-1}})$$

等方的にエネルギーを放射している場合，単位体積 dV から単位時間 dt に 4π 方向に放射する単位周波数あたりのエネルギー P_ν を以下のように定義する.

$$P_\nu = \frac{dE}{dV dt d\nu} (\mathrm{ergs\ sec^{-1} cm^{-3} Hz^{-1}})$$

ミクロな放射過程に結びつける

時間 dt、質量 ρdV、周波数幅 $d\nu$ あたりの輻射放射量 *Emissivity* ϵ_ν $(\mathrm{ergs\ sec^{-1} gm^{-1} Hz^{-1}})$

ある立体角 $d\Omega$ 方向への輻射エネルギー $\frac{dE}{dV dt d\nu \cdot d\Omega} = \frac{\epsilon_\nu \rho}{4\pi}$

通常は等方的なので 4π 方向を積分した輻射エネルギーとして $\frac{dE}{dV dt d\nu} = \epsilon_\nu \rho$

単位体積からのわき出る放射エネルギー P_ν，*Spontenious Emission Coefficient* j_ν，わき出しの物 理を決める係数 ϵ_ν の関係をまとめる

$$P_\nu = \epsilon_\nu \rho (\mathrm{ergs\ sec^{-1} cm^{-3} Hz^{-1}})$$

$$j_\nu = \frac{1}{4\pi} P_\nu (\mathrm{ergs\ sec^{-1} cm^{-3} ster^{-1} Hz^{-1}}) = \frac{\epsilon_\nu \rho}{4\pi}$$

Radiation Transfer: Absorption

Absorption

Specific Intensity I_ν が ds を通過する際に、吸収される

波長 ν における単位長さ当たりに吸収される比率、吸収係数 $Absorption\ Coefficiency$ α_ν

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds \qquad \alpha_\nu \quad (\mathrm{cm}^{-1})$$

ミクロな吸収素過程

波長 ν における粒子一つ当たりの吸収断面積を $\sigma_\nu(\mathrm{cm}^2)$ とし、粒子の個数密度を n とする

$$dI_\nu = -n\sigma_\nu I_\nu ds$$

$$\alpha_\nu = n\sigma_\nu$$

粒子の個数密度 n の代わりに、質量密度 $\rho(\mathrm{gm\ cm}^{-3})$ を使っても構わない。質量吸収定数 κ_ν

$$\alpha_\nu = \rho\kappa_\nu \qquad \kappa_\nu \quad (\mathrm{cm}^2\mathrm{gm}^{-1})$$

ところで、$Emission$ と言っているが、ここでは $Spontenious\ Emission$ のみのことであり、$Stimulated\ Emission$ は含んでいない。$Spontenious\ Emission$ は、放射の追加分 dI_ν が、入射してきた I_ν に無関係な放射のこと。

一方、$Stimulated\ Emission$ は、放射の追加分が ds に対して入射してきた I_ν に比例する放射のこと。一方、$absorption\ coefficient \alpha_\nu$ は、吸収物質の密度に比例している形で与えられているので、この $Stimulated\ Emission$ は、実は $absorption\ coefficient$ にマイナスの符合を持つ係数として含まれていることになる。

Radiation Transfer: Column Density

Column Density

体積密度 n を視線方向に距離で積分した面密度 Column Density N

$$N = \int n(s) ds \quad (\mathrm{cm}^{-2})$$

質量面密度

$$\Sigma = \int \rho(s) ds \quad (\mathrm{gm\ cm}^{-2})$$

Radiation Transfer: Transfer Equation

吸収と放出の両方を合わせると、ある距離を通過した時の Specific Intensity の変化率

$$\textit{Transfer Equation} \qquad \frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu$$

The Radiation Transfer Equation: Emission Only

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu$$

これを積分すると、

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^{s} j_\nu(s')ds'$$

The Radiation Transfer Equation: Absorption Only

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha I_\nu$$

これを積分すると、

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0)\exp\left[-\int_{s_0}^{s} \alpha_\nu(s')ds'\right]$$

吸収係数が場所によって変化しない場合は、

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \sigma_\nu n \\ I_\nu(s) &= I_\nu(s_0)\exp\left[-\sigma_\nu \int_{s_0}^{s} n(s')ds'\right] \\ &= I_\nu(s_0)\exp\left(-\sigma_\nu N\right) \end{aligned}$$

柱密度 (Column Density) N (個/cm^2)

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \kappa_\nu \rho \\ I_\nu(s) &= I_\nu(s_0)\exp\left[-\kappa_\nu \int_{s_0}^{s} \rho(s')ds'\right] \\ &= I_\nu(s_0)\exp\left(-\kappa_\nu \Sigma\right) \end{aligned}$$

質量柱密度 Σ (gm/cm^3)

Radiation Transfer: Optical Depth, Mean Free Path

Optical Depth and Absorption

光の強度変化として、波長 ν での光学的厚さ *Optical Depth* τ_ν

$$d\tau_\nu \quad = \quad \alpha_\nu ds \qquad\qquad \tau_\nu(s_0 \to s) \quad = \quad \int_{s_0}^{s} \alpha_\nu(s')ds'$$

Optical Depthτ_ν を通過した輻射の強度

$$I_\nu(s) \quad = \quad I_\nu(s_0)\exp\left[-\int_{s_0}^{s} \alpha_\nu(ds')ds'\right] \quad = \quad I_\nu(s_0)\mathrm{e}^{-\tau_\nu(s_0 \to s)}$$

$\tau_\nu = 1$ 程度の厚みを通り過ぎると Specific Intensity は 1/e に弱くなる。

Optical Depth が短い、長いことを Optically Thin とか Optically Thick という

光源に対する視線上に吸収体を挿入した場合

Optically Thin だと、吸収体はほとんどすけすけでほぼ透明

Optical Thick の場合は、おおよそ Optical Depth $\tau_\nu \sim 1$ の場所が見えている。

Mean Free Path, Atteniation Length

光子が平均的に吸収されずに進める光学的深さを、

進める光学的深さの期待値が 1 になる場所だと考えて計算する

$$\langle\tau_\nu\rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu \exp\left(-\tau_\nu\right) d\tau_\nu = 1$$

期待値が 1 になる物理的距離 l_ν

$$\langle\tau_\nu\rangle \quad = \quad \alpha_\nu l_\nu = n\sigma_\nu = 1 \qquad\qquad l_\nu \quad = \quad \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{n\sigma_\nu} = \frac{1}{\rho\kappa_\nu} \quad [\mathrm{cm}]$$

l_ν のことを、*Mean Free Path*、平均自由行程

Intensity が 1/e になる場所なので、*Atteniation Length* とも呼ぶ。

Radiation Transfer: Source Function

Source Function 吸収と放出の両方がある場合

Source Function $S_\nu \equiv \dfrac{j_\nu}{\alpha_\nu}$

Transfer Equation は

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \qquad d\tau_\nu = \alpha_\nu ds$$

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$$

$\mathcal{I} = I_\nu \mathrm{e}^{\tau_\nu}$、$\mathcal{S} = S_\nu \mathrm{e}^{\tau_\nu}$ と置く

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\tau_\nu} = \mathcal{S} \qquad \mathcal{I}(\tau_\nu) = \mathcal{I}(0) + \int_0^{\tau_\nu} \mathcal{S}(\tau'_\nu) d\tau'_\nu$$

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\mathrm{e}^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} \mathrm{e}^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu$$

S_ν が一定値

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\mathrm{e}^{-\tau_\nu} + (1 - \mathrm{e}^{-\tau_\nu}) S_\nu = S_\nu + \mathrm{e}^{-\tau_\nu}\left(I_\nu(0) - S_\nu\right)$$

Radiation Transfer: Source Function

Optically Thin: $\tau_\nu \ll 1$ の極限

$$I_\nu(\tau_\nu) \quad = \quad I_\nu(0) + \tau_\nu S_\nu \quad = \quad \tau_\nu S_\nu \quad (if I_\nu(0) = 0)$$

Intensity は放射物体の光学的厚みに比例する。例えば、これはオーロラを思い浮かべると良い。

オーロラはその後方の 星が透けて見えている。

オーロラの厚みが厚くなると、それに従って明るさも明るくなる。

三次元的に考えると、光度は体積に比例することになる。

Opticall Thick: $\tau_\nu \gg 1$ の極限

$$I_\nu(\tau_\nu) \quad = \quad S_\nu$$

Intensity は放射物体の光学的厚みによらず、一定。

例えば、太陽を思い浮かべると良い。

太陽の後方にある星は全く見えない。太陽の中心部も見えず、ごく表面のみが見えている。

厚さをどんなに厚くしても、もは明るさは変化しない。

三次元的に考えると、光度は表面積に比例することとなる。

$S_\nu = 0$ **: Emission** がない場合

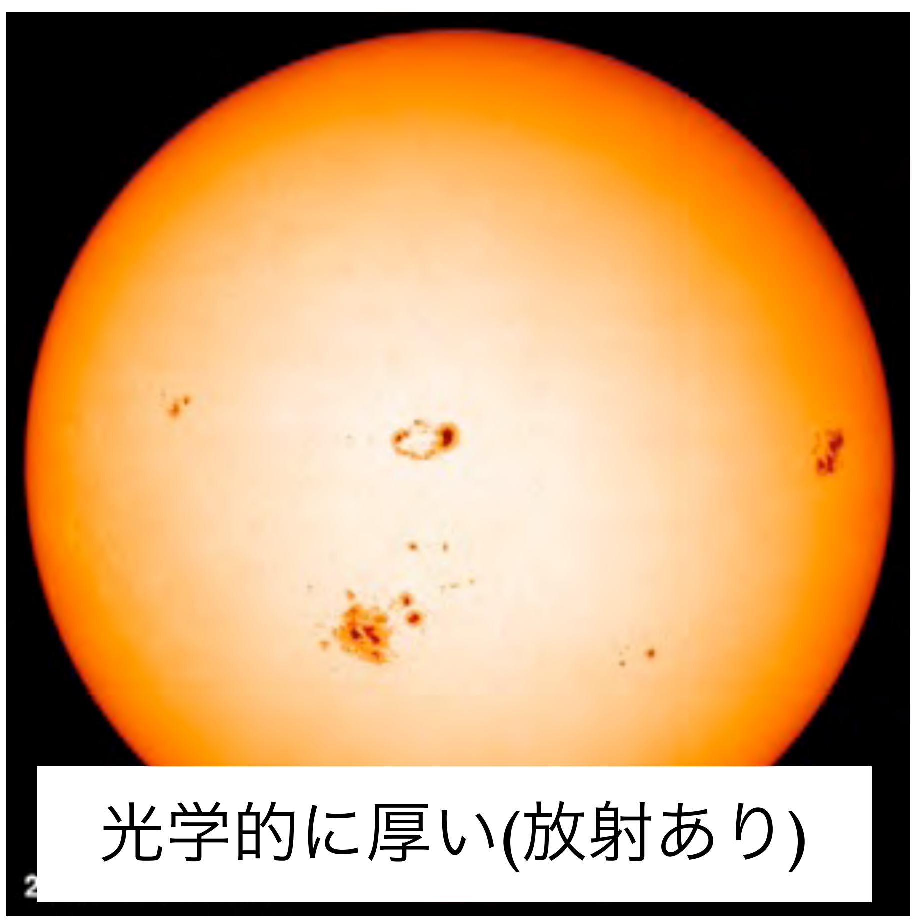
普通の吸収の形になる.

$$I_\nu(\tau_\nu) \quad = \quad I_\nu(0)\mathrm{e}^{-\tau_\nu}$$

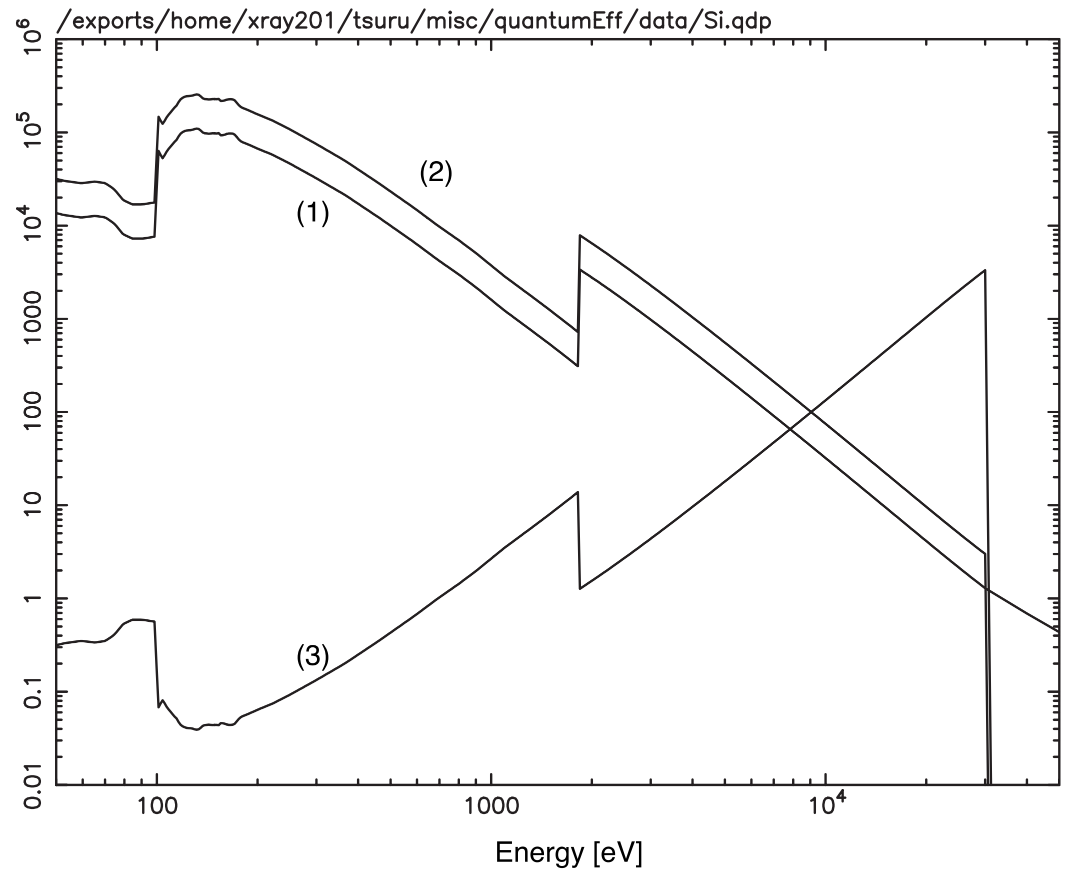
Radiation Transfer: Optical Depth, Mean Free Path

光学的に薄い

光学的に厚い(吸収のみ)



光学的に厚い(放射あり)



シリコンの (1) 吸収係数 $\alpha_\nu = \rho\kappa_\nu$[1/cm] (2) 質量吸収係数 κ_ν[cm^2/gm]、(3)Atteniation Length l_ν[cm]。

光子の熱力学と黒体放射: Plank Spectrum

Planck Spectrum

体積 $L_x \times L_y \times L_z = V$ の中を考えた場合、運動量空間での状態数 g を求める。
x 方向の運動量空間に存在するモードの数は、L_x/h であり、光子のスピン自由度は 2
ある大きさの運動量 $p \sim p+dp$ を持つ光子の状態数は

$$g(\vec{p})d^3\vec{p} = \left(\frac{L_x}{h}\right)\left(\frac{L_y}{h}\right)\left(\frac{L_z}{h}\right) \times 2dp_x dp_y dp_z = 2\frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp$$

$p = h\nu/c$ なので、周波数空間で書き換える

$$g(\nu)d\nu = 2\frac{4\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$$

$g(\nu)$ は体積 V の中を 4π 方向を飛んでいる光子を合計している
単位体積 dV に単位立体角 $d\Omega$ 辺り方向 へ飛ぶ光子の状態密度 ρ_s を求めるには $V4\pi$ で割ってやり

$$\rho_s dV d\nu d\Omega = \frac{g(\nu)}{V4\pi}dV d\nu d\Omega = \frac{2\nu^2}{c^3}dV d\nu d\Omega \quad [\text{個}/\mathrm{cm}^3/\mathrm{Hz}/\mathrm{str}]$$

光子は Bose-Einstein 統計なので、分布関数は

$$f_{\mathrm{BE}}(h\nu) = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_{\mathrm{B}}T}\right) - 1}$$

エネルギー密度 $u_\nu(T,\Omega)$

$$u_\nu(T,\Omega)dV d\nu d\Omega = h\nu \cdot \rho_s \cdot f_{\mathrm{BE}}(h\nu) \cdot dV d\nu d\Omega = \frac{2h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T) - 1}dV d\nu d\Omega$$

熱輻射の場合の Specific IntensityI_ν を $B_\nu(T)$ と書く

$$B_\nu(T)d\nu = I_\nu d\nu = u_\nu c\, d\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T) - 1}d\nu \qquad B_\lambda(T)d\lambda = \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_{\mathrm{B}}T) - 1}d\lambda$$

Rayleigh-Jeans Law

B_ν の長波長側、または $h\nu \ll k_{\mathrm{B}}T$ の近似$\qquad B_\nu^{\mathrm{RJ}}(T) = \dfrac{2\nu^2}{c^2}k_{\mathrm{B}}T$

Wien Law

B_ν の短波長側、または $h\nu \gg k_{\mathrm{B}}T$ の近似$\qquad B_\nu^{\mathrm{W}}(T) = \dfrac{2h\nu^3}{c^2}\exp\left(\dfrac{-h\nu}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$

光子の熱力学と黒体放射: Plank Spectrum

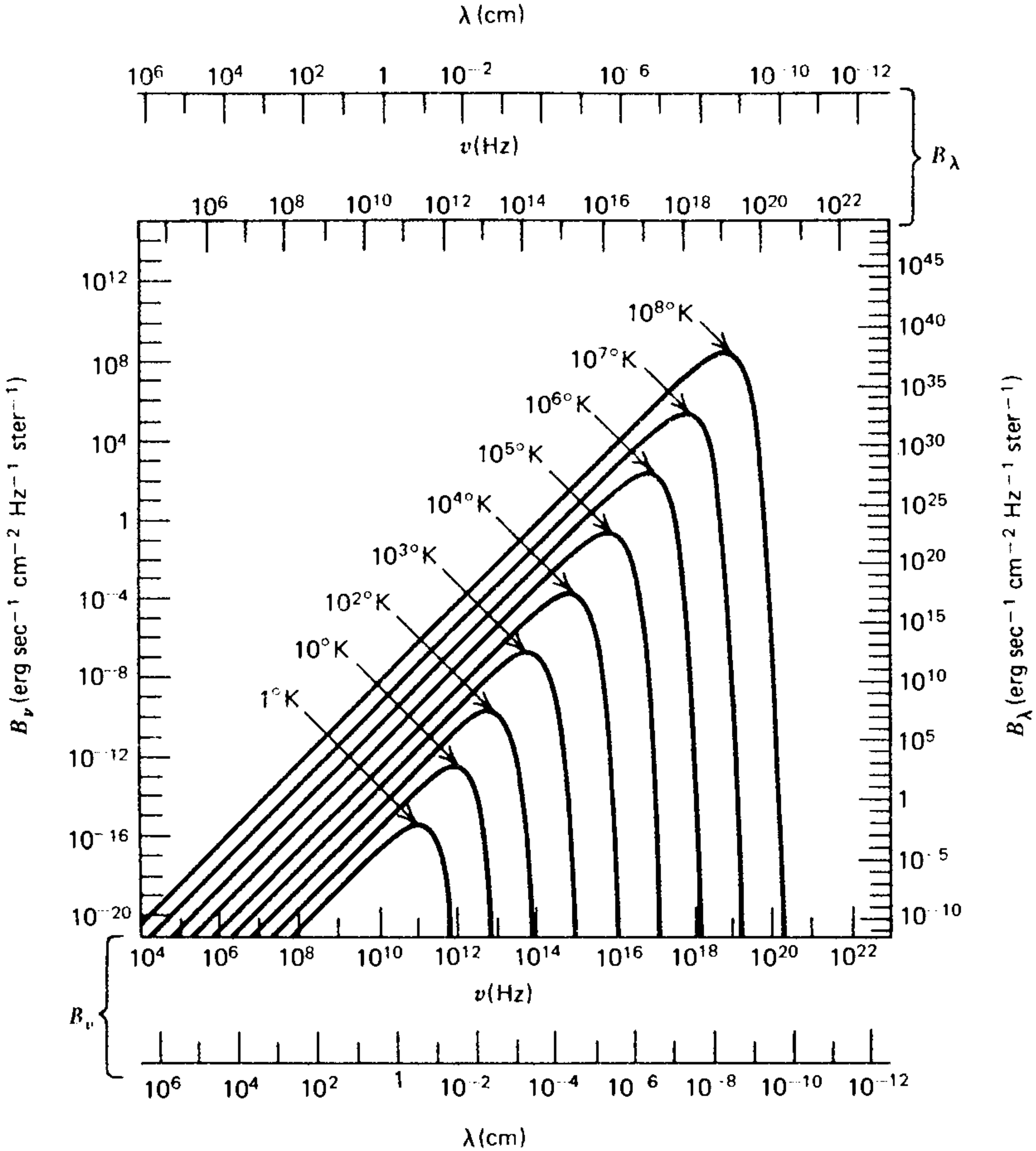


図 4.5: 黒体輻射のスペクトル

光子の熱力学と黒体放射: S.-B.

Stefan-Boltzmann Law

$$u_\nu(T,\Omega)d\nu d\Omega = \frac{2h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/k_\mathrm{B}T)-1}d\nu d\Omega$$ を周波数で積分する。

$$u(T) = \int u_\nu(T,\Omega)d\nu d\Omega = \int_{4\pi} d\Omega \int_0^\infty \frac{2h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/k_\mathrm{B}T)-1}d\nu = \frac{8\pi^5 k_\mathrm{B}^4}{15c^3h^3}T^4 = aT^4(\mathrm{ergs\ cm^{-3}})$$

$$a = 7.57\times10^{-15}(\mathrm{ergs\ cm^{-3}deg^{-4}})$$

内部が黒体輻射をしている箱に単位面積の穴を開けた場合に出てくる全輻射

$$F(T) = \int I_\nu \cos\theta d\Omega d\nu = \int_{2\pi}\cos\theta \int B_\nu(T)d\nu = \pi\int \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_\mathrm{B}T)-1}d\nu$$

$$= \frac{2\pi^5 k_\mathrm{B}^4}{15c^2h^3}T^4 = \sigma T^4 = \frac{ac}{4}T^4(\mathrm{ergs\ cm^{-2}sec^{-1}})$$

$$\sigma = \frac{ac}{4} = 5.67\times10^{-5}(\mathrm{ergs\ cm^{-2}sec^{-1}deg^{-4}})$$

Kirchhoff's Law for Thermal Emission

上で示した状態は熱平衡になっているので、この様な輻射場を持つ箱を薄い壁で 2 つ繋いでも、状態は変化しない。この調子で薄い壁で隔てた箱を何個繋いでも同じことで、Optical Thick $\tau_\nu=\infty$。

一方、Optical Thick $\tau_\nu=\infty$ の場合、$I_\nu = S_\nu$ であった。よって、熱平衡に達している場合には、

$$S_\nu = B_\nu(T) \text{—平衡で流れている量} \qquad j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T) \text{—放射と吸収の釣合}$$

ここで示した議論は、光子の輻射メカニズムによっていない。熱的な平衡状態になった場合には、プラズマからの熱制動輻射、衝突電離輝線、固体からの輻射、たぶんシンクロトロンなど、放射メカニズムに関わらず熱的平衡にあれば成り立つ。

光子ガス: 状態方程式と断熱指数

状態方程式

理想気体と光子気体に関して、

$$
\begin{aligned}
P_{\rm g} &= \frac{2}{3}u_{\rm g} \\
P_{\rm ph} &= \frac{2}{c}\int I_\nu \cos^2\theta d\Omega = \frac{2}{c}\int J_\nu d\nu \int \cos^2\theta d\Omega = \frac{1}{3}\frac{4\pi}{c}\int J_\nu d\nu = \frac{1}{3}u_{\rm ph}
\end{aligned}
$$

2/3 と 1/3 の違いは、運動量とエネルギーの関係が理想気体および光子気体で 2 倍違うから

$$
p_{\rm g} = \frac{2E}{v} \qquad p_{\rm ph} = \frac{h\nu}{c} = \frac{E}{v}
$$

熱的な気体では

$$
\begin{aligned}
u_{\rm g} &= \frac{3}{2}nk_{\rm B}T, \quad P_{\rm g} = nk_{\rm B}T \longrightarrow P_{\rm g} = \frac{2}{3}u_{\rm g} = nk_{\rm B}T \\
P_{\rm ph} &= \frac{1}{3}u_{\rm ph} = \frac{a}{3}T^4
\end{aligned}
$$

断熱指数

$dS=0$ の断熱変化させた時に、P と $n \propto 1/V$ が $P \propto V^{-\gamma} \propto n^\gamma$ と表される時に、γ を断熱指数と呼ぶ。

断熱指数を使って P と u の関係を書くと

$$
P = (\gamma - 1)u
$$

状態方程式と比較し理想気体は $\gamma = 5/3$、光子気体は $\gamma = 4/3$ となる。

$$
u \propto n^\gamma \propto V^{-\gamma}
$$

光子のエネルギー密度　$u_{\rm ph} \propto V^{-4/3} \propto L^{-4}$

理想気体の熱エネルギー　$u_g \propto V^{-5/3} \propto L^{-5}$

輻射と物質のエネルギー密度

太陽

太陽表面`

$$
\begin{aligned}
u_{\rm ph}(T) &= aT^4 \\
&= 7.57 \times 10^{-15} \times 6000^4 \\
&\sim 10 ({\rm ergs\ cm^{-3}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{\rm g}(T) &= \frac{3}{2} n k_{\rm B} T \\
&= \frac{3}{2} 10^{17} \times 1.38 \times 10^{-16} \times 6000 \\
&\sim 10^5 ({\rm ergs\ cm^{-3}})
\end{aligned}
$$

太陽中心`

$$
\begin{aligned}
u_{\rm ph}(T) &= aT^4 \\
&= 7.57 \times 10^{-15} \times (1.5 \times 10^7)^4 \\
&\sim 4 \times 10^{14} ({\rm ergs\ cm^{-3}})
\end{aligned}
$$

ガス密度は $100{\rm gr\ cm^{-3}} = 6 \times 10^{25}$ なので、

$$
\begin{aligned}
u_{\rm g}(T) &= \frac{3}{2} n k_{\rm B} T \\
&= \frac{3}{2} 10^{25} \times 1.38 \times 10^{-16} \times 1.5 \times 10^7 \\
&\sim 3 \times 10^{16} ({\rm ergs\ cm^{-3}})
\end{aligned}
$$

熱エネルギーという意味で、物質の方が大きく、さらに静止エネルギーも含めると全く問題にならない。

光学的に厚い大気からの輝線と吸収線

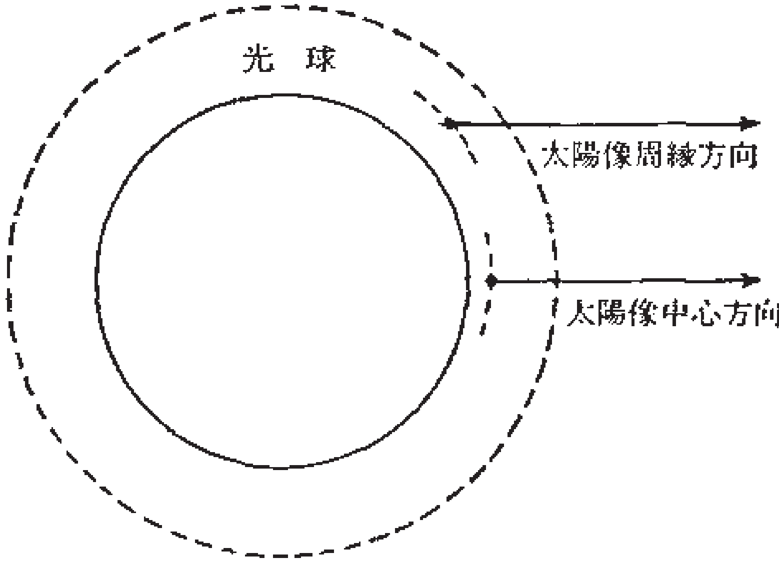
温度構造が無い場合

傾いていても、Brightness は一定値なので、同じ明るさの円盤が見えるだけ。

温度構造がある場合：太陽の例

太陽は外側に行くほど温度が下がる構造を持っている。
太陽の中心付近では実際に深さが物理距離 l_ν の場所の大気を観測している；
周囲では太陽が球体であるため、太陽表面と観測者を結ぶ角度が垂直からずれるので、
物理距離 l_ν より浅い場所の温度構造を見ることになる。

観測している波長での吸収係数 α_ν はわかっているものとする
周辺減光を観測することで太陽表面での情報が得られる。



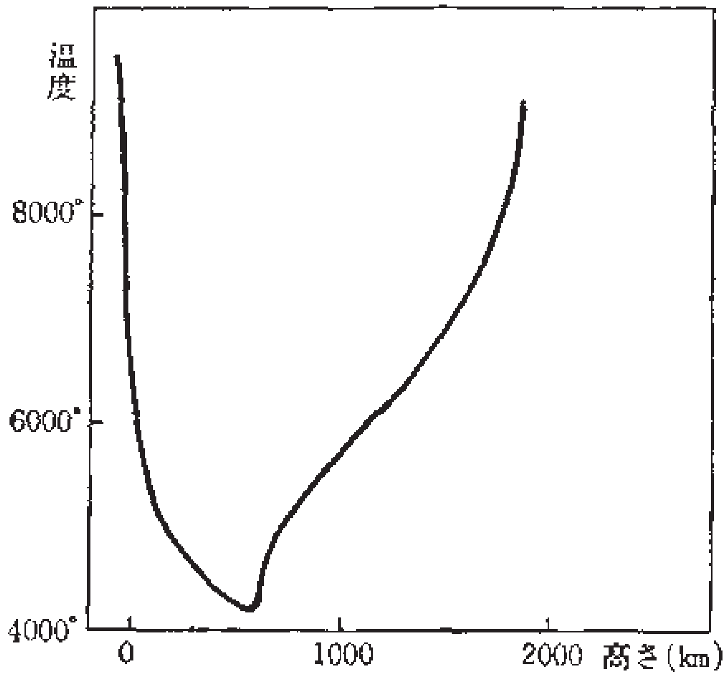


図 4.7: 太陽の周辺減光を利用して大気モデル。

光学的に厚い大気からの輝線と吸収線

「吸収線」と呼ばれるもの

太陽の「吸収線」という言い方を一般的に行なうが、これは必ずしも正しくない (図 4.8)。

基本は Optical Depth $\tau_\nu = 1$ に対応する物理距離 l_ν の大気の黒体輻射を見ている。
他の周波数に比べ輝線の周波数 ν_0 では吸収係数が大きいため、Optical Depth $\tau_\nu = 1$ に対応する物理距離 l_ν が小さいので、深さが浅い場所を観測することになる。

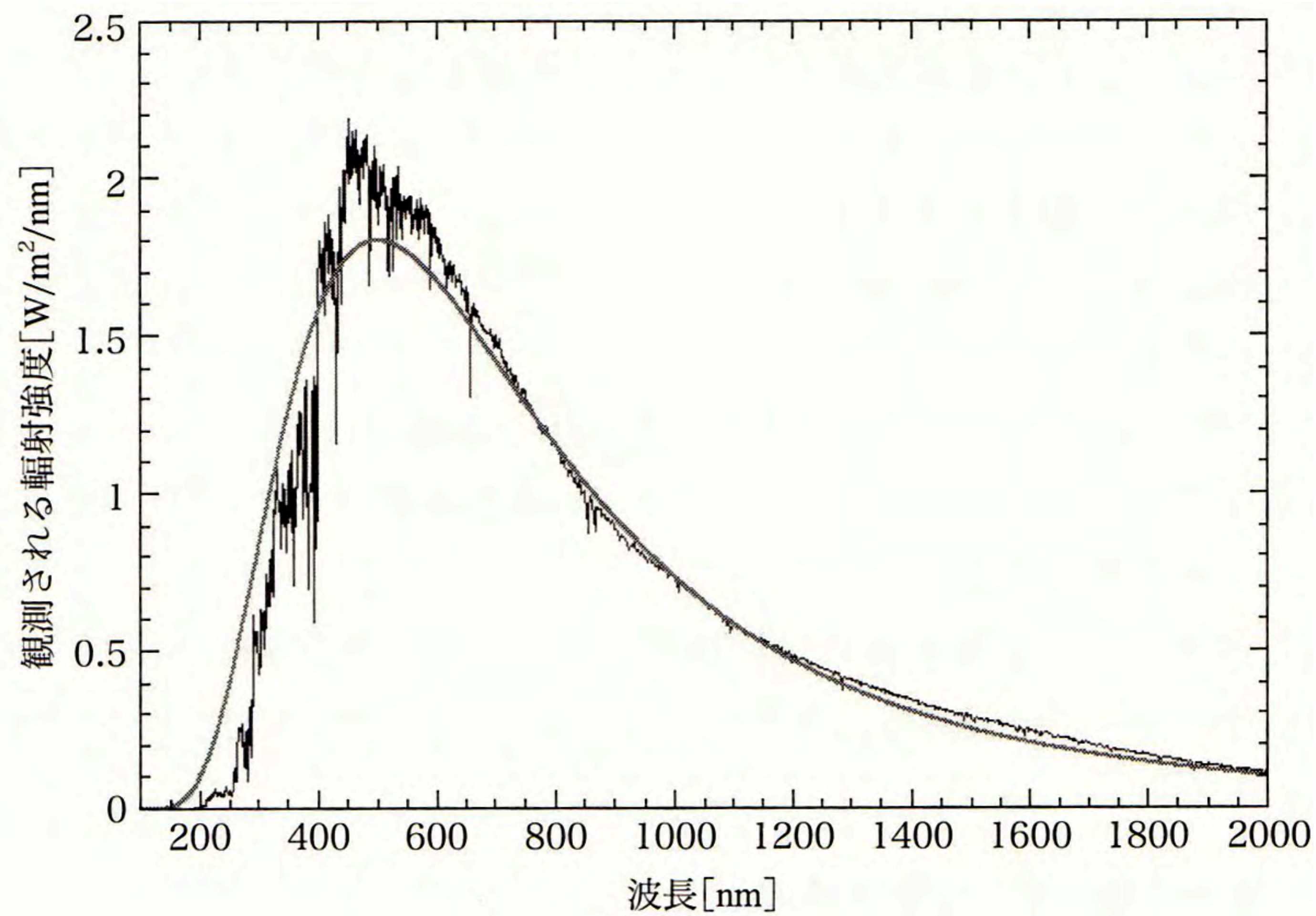
太陽表面大気は温 度構造を持ち、深さが浅くなるにつれて温度が下がる。
よって、輝線 ν_0 ではこの様に温度の低い浅い場所を見ていることになる。

$$\frac{dE}{dAdt} = B_\nu(T)d\Omega$$

B_ν の形は輝線でもそうでなくても同じで、T が違うだけ。

輝線の波長では T が低い場所を見ているので、その $B_\nu(T)$ は、輝線の波長からずれた場所の $B_\nu(T)$ よりも小さい

差を見ると 吸収線の様に見えるだけである。



太陽スペクトル (ギザギザの実線) と 5777K の黒体輻射スペクトル (滑らかな実線)。「超・宇宙を解く」図 13.1

アインシュタインのA係数とB係数

Einstein 係数 A_{21}、B_{12}、B_{21} を以下のように定義する。

1) 輻射と相互作用する二つの準位

輻射と相互作用している (例えば) 原子の 2 つの状態について、Level 1、Level 2 があり、そのエネルギー差 $\Delta E = h\nu$ とする。Level 1, 2 それぞれの状態数を g_1、g_2、それぞれの準位の状態にある原子の数を n_1、n_2 とする。

2) 自然放出係数 $A_{21}(\mathrm{sec}^{-1})$:

$A_{21} =$ 単位時間あたりに Level 2 に居る原子が、$h\nu$ の光子を放出し Level 1 に落ちる確率。

3) 吸収係数 $B_{12}(\mathrm{ergs}^{-1}\mathrm{cm}^2\mathrm{str\ Hz})$:

$B_{12}J_\nu =$ 単位時間あたりに Level 1 に居る原子が、$h\nu$ の光子を吸収し Level 2 に上がる確率。

4) 誘導放出係数 $B_{21}(\mathrm{ergs}^{-1}\mathrm{cm}^2\mathrm{str\ Hz})$:

$B_{21}J_\nu =$ 単位時間あたりに Level 2 に居る原子が $h\nu$ の光子に誘導され、$h\nu$ の光子を放出して Level 1 に落ちる確率。

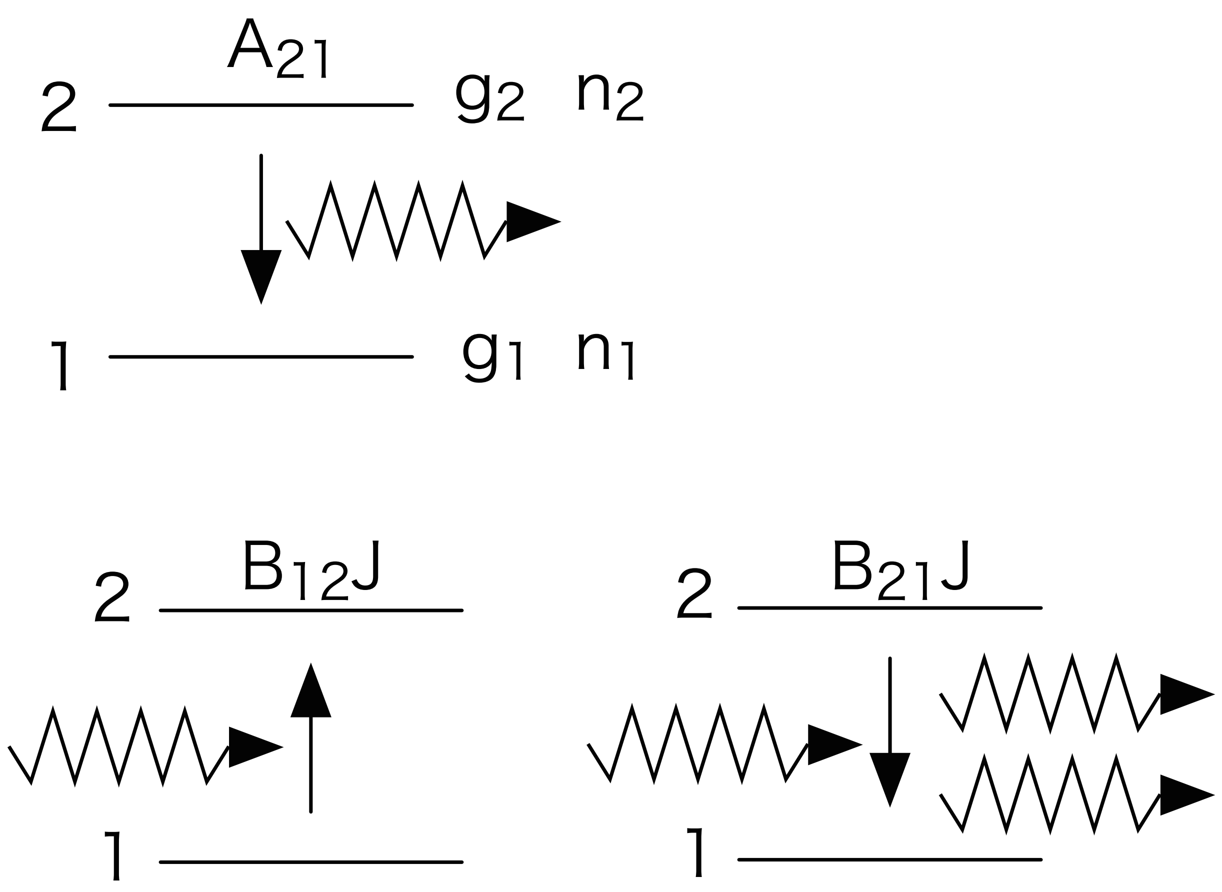


図 4.10: アインシュタインの A 係数と B 係数

アインシュタインのA係数とB係数

平衡状態であるなら、

$$n_1 B_{12} J_\nu = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} J_\nu \qquad J_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}$$

平衡に加えて、熱平衡状態を仮定

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp(-E_1/k_\mathrm{B}T)}{g_2 \exp(-E_2/k_\mathrm{B}T)} = \frac{g_1 \exp(-E_1/k_\mathrm{B}T)}{g_2 \exp(-(E_1 + h\nu)/k_\mathrm{B}T)} = \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu/k_\mathrm{B}T)$$

$$J_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21}) \exp(h\nu/k_\mathrm{B}T) - 1}$$

熱平衡なのだから、この式の J_ν と次に示す Planck の式の B_ν は同じ形をしている。

$$B_\nu(T) = I_\nu = u_\nu c = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_\mathrm{B}T) - 1}$$

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \qquad A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}$$

Einstein の関係

この式を導く際には熱平衡を仮定したが、この関係の中には温度 T が入っていない。
A_{21}、B_{12}、B_{21} はミクロ な過程のみで決まっている。ミクロ過程は、系全体が熱平衡かどうかを気にしない。
よって、この式自体は熱平衡とは関係なく成立する。

この 3 つの係数の内、一つを決めれば自動的に後 2 つの値も決まる。つまり、放出と吸収の素過程を計算する場合、一番計算しやすい係数を具体的に計算し、残りはこの係数で計算する。

ある波長の光子に対して、吸収係数 B_{12} が大きい物質は自動的にその光子に対する自然放出係数と誘導放出係数は高いことになる。
赤外線を吸収しやすい服は赤外線を放出しやすいと言うことで、逆も真。

吸収しやさは光子の波長依存性があるので、ある波長で吸収しやすいからと言って、別の波長での放出係数が高い、ということではない。

アインシュタインのA係数とB係数

第 2 量子化

$\vec{k}$ の状態に居る光子が n_k 個ある状態を $|n_k>$ と書くと、生成消滅演算子 $a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}}$ を使って、吸収する確率と、生成する確率を以下の通りに書ける。

$$|<n_k-1|a_{\vec{k}}|n_k>|^2 = |<n_k-1|\sqrt{n_k}|n_k-1>|^2 = n_k \to B_{12}J_\nu \tag{4.187}$$

$$|<n_k+1|a^\dagger_{\vec{k}}|n_k>|^2 = |<n_k+1|\sqrt{n_k+1}|n_k+1>|^2 = n_k+1 \to B_{21}J_\nu + A_{21} \tag{4.188}$$

吸収する確率は光子の数に比例する (B_{12})。一方で放射する確率は光子の数に比例する成分 (B_{21}) と、自然に放射される成分 (A_{21}) の 2 つの成分が自然に出てくる。つまり、Planck の式や Einstein 係数は量子論をきちんと反映されていることが分かる。

幾つかの例

地球における太陽輻射による熱流入と黒体輻射の平衡

地球は太陽の輻射を受けて加熱され、自身の黒体輻射により冷却する。その平衡状態を解いて、地球の温度を求める。

単位時間に地球が受けるエネルギーは

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\oplus} = \frac{\pi R_{\oplus}^2}{4\pi D^2} L_{\odot} = 1.6 \times 10^{24} (\mathrm{ergs\ sec^{-1}})$$

$$L_{\odot} = \sigma T^4 4\pi R_{\odot}^2 = 4 \times 10^{33} (\mathrm{ergs\ sec^{-1}})$$

$$D = 1\mathrm{AU} = 1.5 \times 10^{13} (\mathrm{cm})$$

$$R_{\oplus} = 6 \times 10^{8} (\mathrm{cm})$$

これが地球表面で再熱化され黒体放射となり、その輻射と釣り合う。

地球の表面温度を (昼側も夜側共に)$T_{\oplus}$

$$L_{\oplus} = \sigma T_{\oplus}^4 4\pi R_{\oplus}^2 = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\oplus} = 1.6 \times 10^{24} (\mathrm{ergs\ sec^{-1}})$$

$$T_{\oplus} = 278(\mathrm{K}) = 5^{\circ}\mathrm{C}$$

ビニールハウスと地球温暖化

ビニールも二酸化炭素も可視光には透明だが、赤外では不透明。すなわち放射係数が 0 ではない。よって、6000K の可視光を受け地球地表が温められ、300K に再熱化され、赤外線で熱放射する。しかし、地表の上に赤外で灰色体の二酸化炭素がかぶさっているために、効率良く熱放射をすることができない。ガラスも同じであり、車も同じこと。

幾つかの例

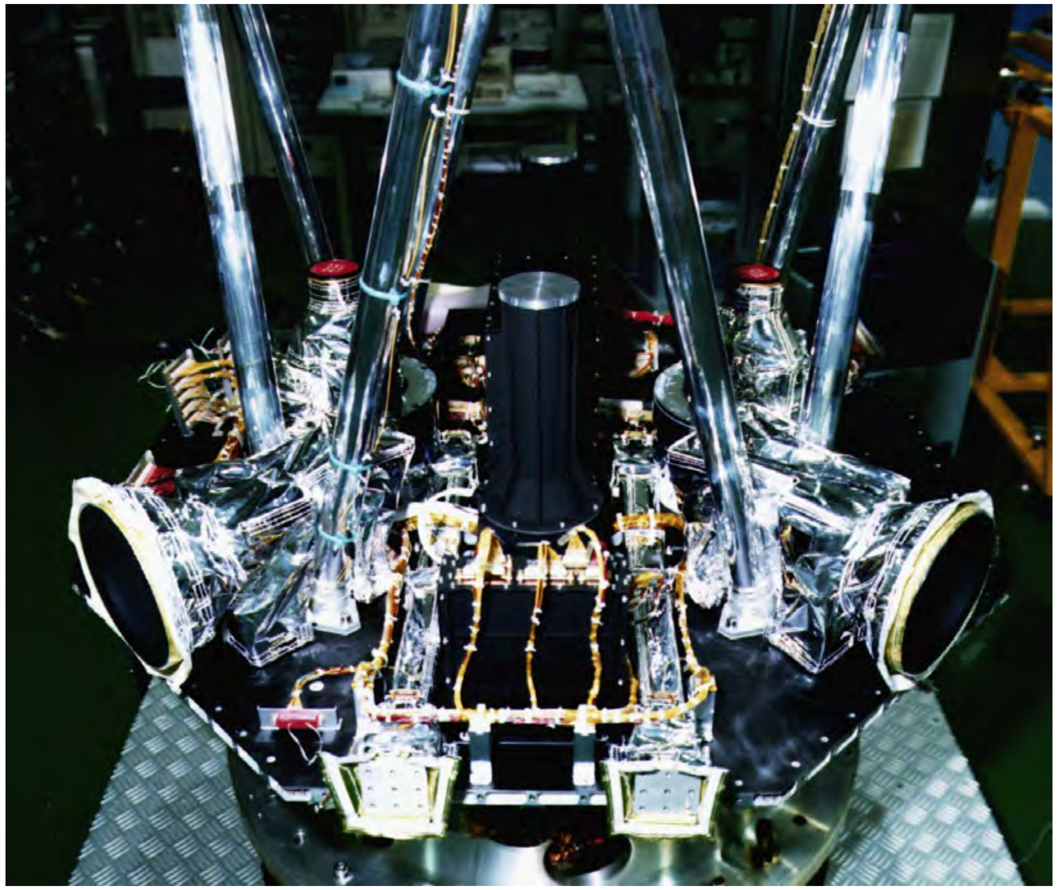


図 4.11: 「あすか」衛星のベースプレート。常温に保ちたい GIS は黒く塗装することで、黒体に近付け、冷却をしたい SIS や STT は MLI を巻き、熱的な結合を切っていることがわかる。

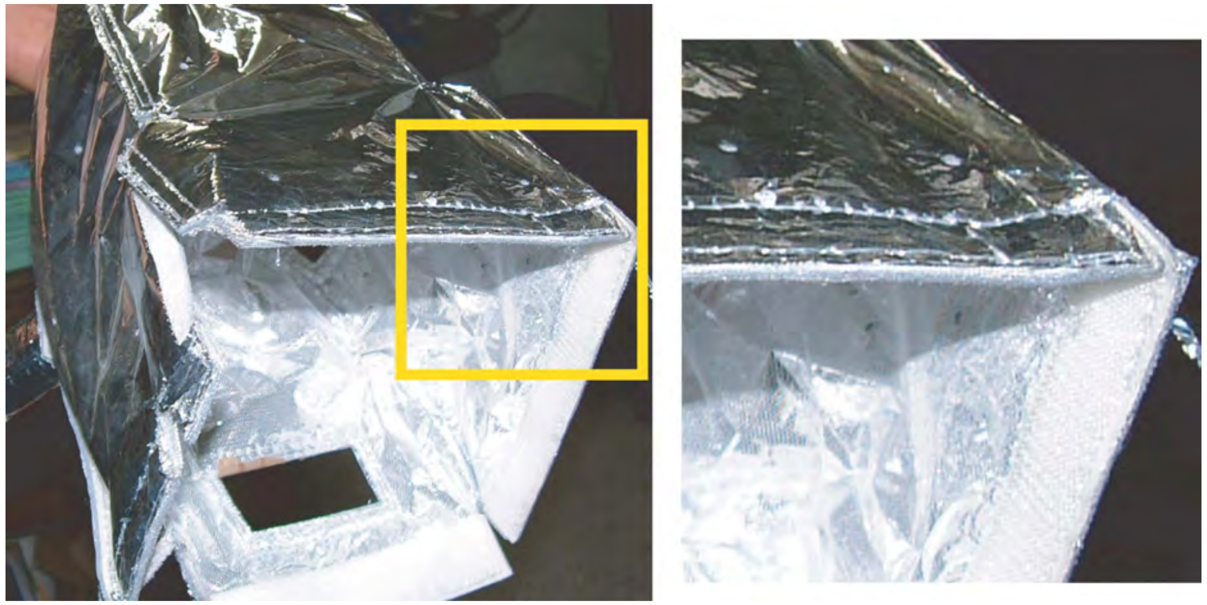


図 4.12: Multi Layer Insulator。両面が表の様にアルミコーティングされたフィルムが、裏面に見えるメッシュに挟れ、数層に重ねられている。

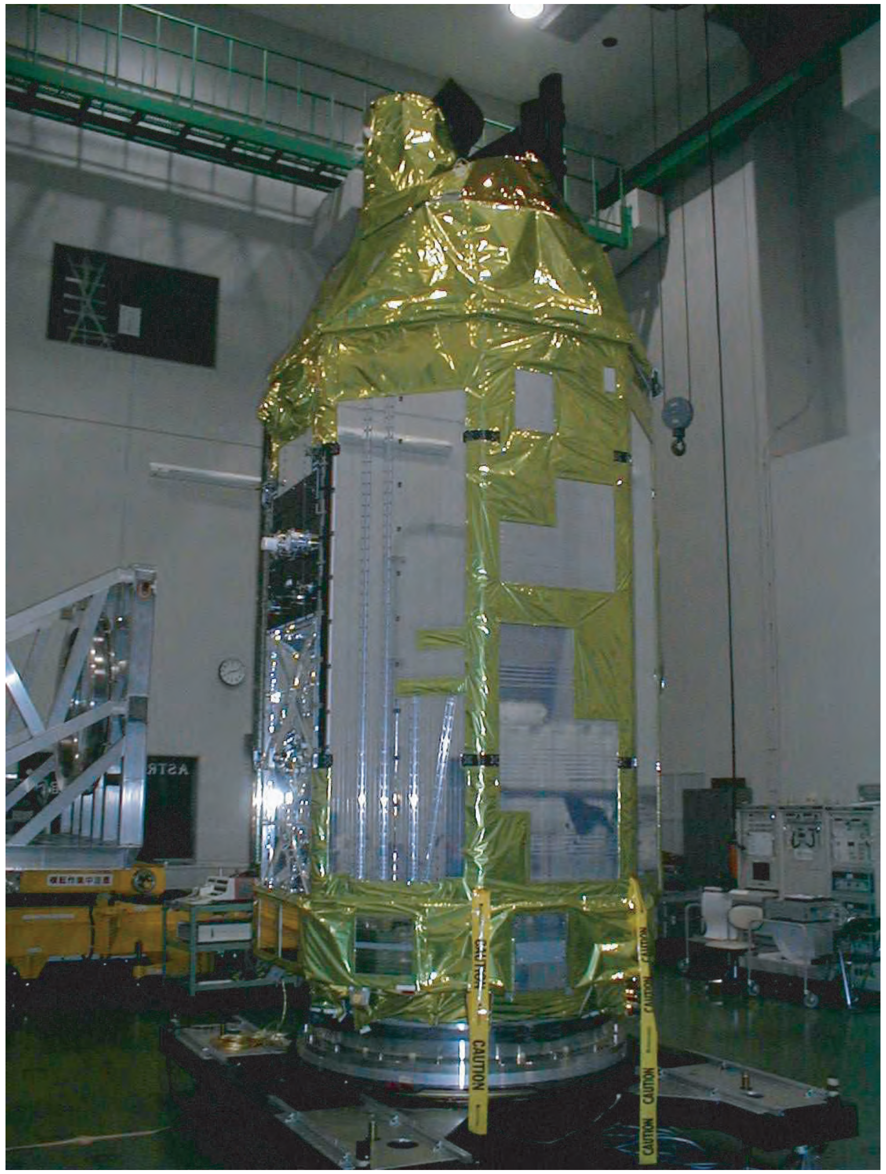


図 4.13: SAP を取り除いた AstroE 衛星。金色の部分が MLI、銀色の部分はラジエーターで銀蒸着テフロンである。