宇宙物理入門

講義資料

第３章：ビリアル定理と自己重力系

Ver. 2

鶴 剛 (tsuru@cr.scphys.kyoto-u.ac.jp)

ジーンズ質量

ある星間ガス雲が重力収縮する条件は，個々の粒子が下記を満たすことである．

$$(\text{運動エネルギー}) + (\text{重力エネルギー} < 0) = E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{G}} < 0 \tag{3.1}$$

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle < G\frac{Mm}{R} \tag{3.2}$$

ここで粒子の速度と質量を v，m，星間ガスのサイズを R，質量を M である．<> は平均値の意味である．ガス雲の密度を ρ とし，オーダーの話なのでファクターを無視すると

$$v^2 < GR^2\rho \tag{3.3}$$

$$R > \frac{v}{(G\rho)^{1/2}} \tag{3.4}$$

が得られる．これは密度 ρ に対して，ガス雲のサイズがある値以上を超えると，重力収縮することを意味している．v は音速 C_{s} 程度だとすると，ガス雲のサイズの閾値と，さらに対応する質量は

$$R_{\mathrm{J}} = \frac{C_{\mathrm{s}}}{\sqrt{G\rho}} = 0.4\mathrm{pc}\left(\frac{C_{\mathrm{s}}}{0.2\mathrm{km\ s^{-1}}}\right)\left(\frac{n}{10^3\mathrm{cm^{-3}}}\right)^{-1/2} \tag{3.5}$$

$$M_{\mathrm{J}} = \frac{4\pi}{3}\rho\left(\frac{R_{\mathrm{J}}}{2}\right)^3 = 2M_{\odot}\left(\frac{C_{\mathrm{s}}}{0.2\mathrm{km\ s^{-1}}}\right)^3\left(\frac{n}{10^3\mathrm{cm^{-3}}}\right)^{-1/2} \tag{3.6}$$

$$C_{\mathrm{s}}^2 = \gamma P/\rho \propto T \tag{3.7}$$

- HI :T=100K, n=40個/cm3 → MJ = 3000M@ = 星団質量
- しかしこのままではここから収縮しない．星になれない．
- T=100K, n=1000個/cm3 → MJ = 3M@ = 恒星
- 大質量のガス雲が収縮 → 密度の高い場所に分裂 → さらに収縮
- 最終的には多数の恒星が誕生

ダイナミカルタイムスケール

半径 R から一定の加速度 a で収縮すると，収縮に要するタイムスケールは

$$R = a\tau_{\rm dyn}^2, \quad ma = G\frac{mM}{R^2} \tag{3.8}$$

$$\tau_{\rm dyn} = \left(\frac{R}{a}\right)^{1/2} = \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2} = \frac{1}{(G\rho)^{1/2}} \tag{3.9}$$

$G \sim 7 \times 10^{-8}{\rm cgs}$, $m_{\rm p} = 1 \times 10^{-24}{\rm g}$

- T=100K, n=40個/cm3 → τdyn = 2e+7 yr
- T=100K, n=1000個/cm3 → τdyn = 2e+6 yr
- 十分短い時間で星形成可能

星の静水圧平衡

静水圧平衡

$Mr(r)$ は，半径 r 以内のガスの質量

$$Mr(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \tag{3.12}$$

$$dMr(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr \tag{3.13}$$

球対称の星の内部のガスの運動方程式に対して，力学的に平衡状態にある場合は

$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{Mr(r)\rho(r)}{r^2} - \frac{dP(r)}{dr} = 0 \tag{3.10}$$

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{Mr\rho}{r^2} \tag{3.11}$$

星の中心温度

近似的な手法で，星内部の中心温度を見積もることが可能である．静水圧平衡の圧力勾配が星の中心から表面に掛けてほぼ一定だと見なす．その場合，星の中心圧力のおよその値は，静水圧平衡の圧力勾配の項の微分を

$$\frac{dP}{dr} \to -\frac{P_c}{R} \tag{3.14}$$

と近似できる．$Mr \to M$，$\rho \to \bar{\rho}$ とすると静水圧平衡の式は

$$\frac{P_c}{R} \sim G\frac{M\bar{\rho}}{R^2} \tag{3.15}$$

となる．中心温度 T_c に対して状態方程式 $P_c = nkT_c$ より

$$T_c = \frac{m}{k}\frac{P_c}{\bar{\rho}} \sim \frac{m}{k}\frac{GM}{R} \tag{3.16}$$

が得られる．

太陽の質量と半径は $M = 2 \times 10^{33}$[g]，$R = 7 \times 10^{10}$[cm] であり，プラズマなので m は電子と陽子の平均値，すなわち $m = 0.5m_{\rm p} = 0.8 \times 10^{-24}$[g] である．これより

$$T_c \sim \frac{0.8 \times 10^{-24}}{1 \times 10^{-16}} \cdot \frac{7 \times 10^{-8} \cdot 2 \times 10^{33}}{7 \times 10^{10}} \sim 2 \times 10^7 [\mathrm{K}] \tag{3.17}$$

が得られる．実際の値は 1.58×10^7[K] なので，ほぼ同じと言える．

ビリアル定理: 一般の場合

重力で束縛された系での、時間平均された重力エネルギーの総和と時間平均された運動エネルギーの簡単な関係。

3.3.1　一般の場合:(Adv.)

質点の位置、系の重力エネルギーを　$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ...\vec{r}_i, ...$　$\Omega(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ...\vec{r}_i, ...)$　とする。

運動エネルギーの総和 K は　$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$　運動方程式は　$m_i \dot{\vec{v}}_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial \vec{r}_i}$

ここで、重力エネルギーが

$\sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial \vec{r}_i}\vec{r}_i = \alpha \Omega$　である、という系を仮定する (α 次の同次式。ケプラー運動であれば、$\alpha = -1$)。

この系の場合、運動方程式を積分しなくても解くことが出来る。

運動方程式の両辺に $\vec{r}_i$ を掛けて $\sum_i$ を取ると、Ω は α の同次式なので

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{r}_i = -\sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i = -\alpha \Omega$$

両辺の時間平均を取ると、

$$-\alpha < \Omega >= -\alpha \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Omega dt \quad = \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{r}_i dt \quad = \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_i m_i \left\{ [\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i]_0^T - \int_0^T v_i^2 dt \right\}$$

となる。ここで、粒子は束縛されていて無限大には行かないとすると、$[\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i]_0^T$ は有限値なので、$\lim_{T\to\infty}$ の極限を取ると消える。

よって、　$-\alpha < \Omega > \quad = \quad -\sum_i < m_i v_i^2 >= -2 < K >$

$$< K > \quad = \quad \frac{\alpha}{2} < \Omega >= -\frac{1}{2} < \Omega > (\quad \alpha = -1)$$

ビリアル定理: 中心星

重力で束縛された系での、時間平均された重力エネルギーの総和と時間平均された運動エネルギーの簡単な関係。

中心星による重力場がドミナントの場合

単純な円軌道のケプラー運動の場合は、

$$\Omega = -G\frac{Mm}{r}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.28}$$

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \tag{3.29}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}\Omega \tag{3.30}$$

もう少し一般的には重力エネルギーは、

$$\Omega = -\sum_i G\frac{Mm_i}{r_i} \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{r}_i} = G\frac{Mm_i}{r_i^3}\vec{r}_i \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{r}_i}\cdot\vec{r}_i = G\frac{Mm_i}{r_i} \tag{3.33}$$

となるので、

$$\sum_i \frac{\partial\Omega}{\partial\vec{r}_i}\cdot\vec{r}_i = \sum_i G\frac{Mm_i}{r_i} = -1\times\Omega \tag{3.34}$$

となる。よって、

$$\alpha = -1 \tag{3.35}$$

$$< K >= -\frac{1}{2} < \Omega > \tag{3.36}$$

$$< K > + < \Omega >= -\frac{1}{2} < \Omega > + < \Omega >= \frac{1}{2} < \Omega >< 0 \tag{3.37}$$

であり、束縛されている。

ビリアル定理: 自己重力系

自己重力系の場合

まず、準備として

$$\frac{d^2(r_i^2)}{dt^2} = 2\left(\vec{r}_i\cdot\dot{\vec{v}}_i + v_i^2\right) \quad (3.38)$$

$$\vec{r}_i\cdot\dot{\vec{v}}_i = \frac{1}{2}\frac{d^2(r_i^2)}{dt^2} - \vec{v}_i^2 \quad (3.39)$$

次に i 番目の粒子に対する運動方程式は、

$$m_i\dot{\vec{v}}_i = \sum_{j\neq i}\frac{Gm_im_j(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{|r_j-r_i|^3} \quad (3.40)$$

である。両辺に r_i をかけ、$\sum_i$ を取ると

$$\sum_i m_i\dot{\vec{v}}_i\cdot\vec{r}_i = \sum_i\sum_{j\neq i}Gm_im_j\frac{\vec{r}_i(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^3} \quad (3.41)$$

となる。この左辺に準備の式を当てはめると

$$(左辺) = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i\frac{m_ir_i^2}{2} - \sum_i m_iv_i^2 \quad (3.42)$$

となる．右辺は，

$$(右辺) = \sum_i\sum_{j\neq i}Gm_im_j\frac{\vec{r}_i(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^3} \quad (3.43)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}Gm_im_j\frac{(\vec{r}_i-\vec{r}_j)(\vec{r}_j-\vec{r}_i)}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^3} = -\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{Gm_im_j}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|} \quad (3.44)$$

となる．ただし

$$\frac{1}{2}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)(\vec{r}_i-\vec{r}_j) = \vec{r}_i\vec{r}_j - \frac{1}{2}\vec{r}_i^2 - \frac{1}{2}\vec{r}_j^2 \quad (3.45)$$

$$\vec{r}_i(\vec{r}_j-\vec{r}_i) = \vec{r}_i\vec{r}_j - \vec{r}_i^2 \quad (3.46)$$

なので、i と j の組み合わせ $\sum_i\sum_{j\neq i}$ をとるとこの 2 つの式の右辺同士は等しく、その結果左辺同士も等しいことになる．それを用いると上記の式変形が得られる。

(左辺) に戻り，長時間平均を取ると

$$< \frac{d^2}{dt^2}\sum_i\frac{m_ir_i^2}{2} > \to 0 \quad (3.47)$$

となる．従って，(左辺) = (右辺) から

$$< \sum_i m_iv_i^2 > = < \frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{Gm_im_j}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|} > \quad (3.48)$$

$$2 < K > = - < \Omega > \quad (3.49)$$

ビリアル定理: 流体

流体的な取り扱い

星の中心から半径 r に対する関数として圧力 P、密度 ρ、温度 T を考え、半径 r までに含まれる質量 M_r を以下のように定義する。

$$M_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr, \quad \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{3.54}$$

この星の半径を R、質量を M とし、これに以下の境界条件を課する。

$$r = 0 \quad \to \quad M_r = 0 \tag{3.55}$$

$$r = R \quad \to \quad M_r = M, \quad P = 0 \tag{3.56}$$

この時、力学平衡は

$$-G\frac{M_r \rho}{r^2} = \frac{dP}{dr} \tag{3.57}$$

と表せる。この両辺に $4\pi r^3$ を掛けて体積積分を行なうと、

$$\int_0^R -G\frac{M_r}{r^2}\rho(r) \cdot 4\pi r^3 dr = \int_0^R \frac{dP(r)}{dr} 4\pi r^3 dr \tag{3.58}$$

$$(\text{左辺}) = \int_0^R -G\frac{M_r}{r^2} 4\pi r^3 \rho(r) dr = \int_0^R -G\frac{M_r}{r} 4\pi r^2 \rho(r) dr = \Omega$$

. (右辺) は部分積分で

$$(\text{右辺}) = \left[4\pi r^3 P(r)\right]_0^R - 3\int_0^R 4\pi r^2 P(r) dr$$

$$\left[4\pi r^3 P(r)\right]_0^R = 0$$

なので，(左辺) = (右辺) より

$$\Omega = -3\int_0^R 4\pi r^2 P(r) dr$$

単位体積あたりの内部エネルギーを ε とすると一般に

$$P = (\gamma - 1)\varepsilon$$

右辺は

$$-3\int_0^R 4\pi r^2 P(r) dr = -3\int_0^R (\gamma - 1) \cdot 4\pi r^2 \varepsilon(r) dr = -3(\gamma - 1)U$$

最終的に 重力エネルギーと内部エネルギーの関係式

$$\Omega = -3(\gamma - 1)U$$

理想気体では、$\gamma = 5/3$ なので、

$$\Omega = -2U$$

$$E = U + \Omega = \frac{1}{2}\Omega = -U < 0$$

安定に存在し得る。

一方、$U > 0$ であるから、$E < 0$ を満たすためには

$$-(3\gamma - 4) < 0$$

$$\gamma > 4/3$$

となる。$\gamma = 4/3$ は光子気体、相対論的気体である。

自己重力系の例：銀河団

自己重力系の例：銀河団

銀河団の質量，半径，メンバー銀河の運動速度 (分散) をそれぞれ M，R，$\bar{v}$ とするとビリアル定理より

$$
\begin{aligned}
2\langle K\rangle &= -\langle \Omega\rangle \\
M\bar{v}^2 &= \frac{1}{2}\frac{M^2}{R} \\
M &= \frac{2}{G}\bar{v}^2 R = \frac{6}{G}\bar{v_{||}}^2 R
\end{aligned}
$$

である (銀河団は一様密度ではないので，前述の式とは違うことになる)．ここで，$\bar{v_{||}}$ は視線方向の速度 (分散) であり，等方的なら $\bar{v}^2 = 3\bar{v_{||}}^2$ の関係がある．$\bar{v_{||}} = 1000\mathrm{km/s}$, $R = 1\mathrm{Mpc} = 3\times10^{24}\mathrm{cm}$, $G = 7\times10^{-8}\mathrm{cgs}$ を使うと，$M = 3\times10^{48}\mathrm{g} = 1\times10^{15}M_{\odot}$ が得られる．この値はバリオンの質量 (銀河の総質量と X 線プラズマの質量の合計) より約 1 桁大きい．従って見えていない質量"Missing Mass"が存在し，暗黒物質"Dark Matter"と呼ばれている．

負の比熱

負の比熱

自己重力系でもそうで無い系でも構わないが、

$$E = K + \Omega = -K < 0 \tag{3.62}$$

$$\text{or} \quad E = U + \Omega = -U \tag{3.63}$$

$$K = 1 \tag{3.64}$$

$$K : \Omega : E = 1 : -2 : -1 \tag{3.65}$$

$$E \downarrow \Rightarrow K \uparrow, \Omega \downarrow\downarrow \tag{3.66}$$

なので、全エネルギーから輻射などによりエネルギーを抜くと、逆に運動エネルギーまたは内部エネルギーは上昇してしまう。つまり、常識とは逆にエネルギーを抜くと温度が上昇することになる。この負の比熱は宇宙では重大な意味を持つこととなる。原始星では、輻射によりエネルギーを失い収縮することで逆に中心核の温度は上昇し、最終的には熱核反応がはじまるのは、これが原理である。

一旦，恒星として熱核反応が起こっている状況で，平衡状態から何らかの理由でより多くの輻射が起こると，星が重力的に収縮し内部の温度が上がる．その結果，中心での熱核反応のレートが上昇し，内部の圧力が上昇する．このことで再び星はふくれ元の状態に戻る．つまり負のフィードバックがかかっており，安定的に燃焼できることがわかる．

鉄まで進んだ場合は，もはや核融合によってエネルギーを取り出せなくなる．そうすると，星中心が重力収縮によって高温になると，吸熱反応の鉄の光分解が起こってしまい，超新星爆発が起こる。

太陽のエネルギー源

太陽の光度 $L_\odot$ と質量 $M_\odot$ は以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
L_\odot &= 3.9 \times 10^{33}\ (\mathrm{ergs\ sec^{-1}}) \\
M_\odot &= 2.0 \times 10^{33}\ (\mathrm{g})
\end{aligned}
$$

年齢 τ は地球の化石などから

$$\tau = 4.6 \times 10^9\ (\mathrm{yr}) = 1.5 \times 10^{17}\ (\mathrm{sec})$$

太陽で単位質量あたりに単位時間当たりに生産しているエネルギーは

$$
\begin{aligned}
\frac{L_\odot}{M_\odot} &= 1.9\ (\mathrm{ergs/sec/g}) \\
\frac{L_\odot}{M_\odot} \times 47 \times 10^8 (\mathrm{yr}) &= 3 \times 10^{17} (\mathrm{ergs/g})
\end{aligned}
$$

化学エネルギー: 化学エネルギーの効率は、1g で 1×10^{13}ergs である。従って、太陽全体で

(3.80) $$E_{\mathrm{chemi}} = M_\odot \cdot 1 \times 10^{13}\mathrm{ergs/g} = 2 \times 10^{46}\mathrm{ergs}$$

(3.81) $$\tau_{\mathrm{chemi}} = E_{\mathrm{chemi}}/L_\odot = 5 \times 10^{12}\ (\mathrm{sec}) = 2 \times 10^5 (\mathrm{yr})$$

重力エネルギー: 質量 M の天体が、無限遠から半径 R の大きさまで収縮したとすると、単位質量あたりの重力エネルギーは $-GM/R$ なので、全体ではおよそ GM^2/R が解放される。これに太陽のパラメータを入れる。

(3.82) $$E_{\mathrm{G}} = G\frac{M_\odot^2}{R_\odot} = 6.67 \times 10^{-8} \frac{4 \times 10^{66}}{6.96 \times 10^{10}} = 3.8 \times 10^{48}\ (\mathrm{ergs})$$

(3.83) $$\tau_{\mathrm{G}} = E_{\mathrm{G}}/L_\odot = 9.83 \times 10^{14}\ (\mathrm{sec}) = 3.1 \times 10^7\ (\mathrm{yr})$$

核エネルギー: 図 3.1 から、水素がヘリウムになる場合は、$E/m_{\mathrm{p}} = 9 \times 10^{18}\mathrm{ergs\ sec^{-1}}$ という効率が得られる。従って、太陽全体では

(3.84) $$E_{\mathrm{Nuc}} = M_\odot \times 9 \times 10^{18}\ (\mathrm{ergs\ sec^{-1}}) = 1.8 \times 10^{52}\ (\mathrm{ergs})$$

(3.85) $$\tau_{\mathrm{Nuc}} = E_{\mathrm{Nuc}}/L_\odot = 4.6 \times 10^{18}\ (\mathrm{sec}) = 1.5 \times 10^{11}\ (\mathrm{yr})$$

となる。従ってまかなえる。実際の太陽で核融合を行う質量は全太陽質量の 10%程度なので、1.5×10^{10} (yr) が実際の寿命であるが、やはりこれでも賄うことが可能である。

水素の核融合反応

p-p チェーン　太陽質量もしくは，それより小さい質量の恒星で主要な役割を果たす反応．単位時間・単位体積あたり の反応速度は，$\propto n^2T^4$ である．

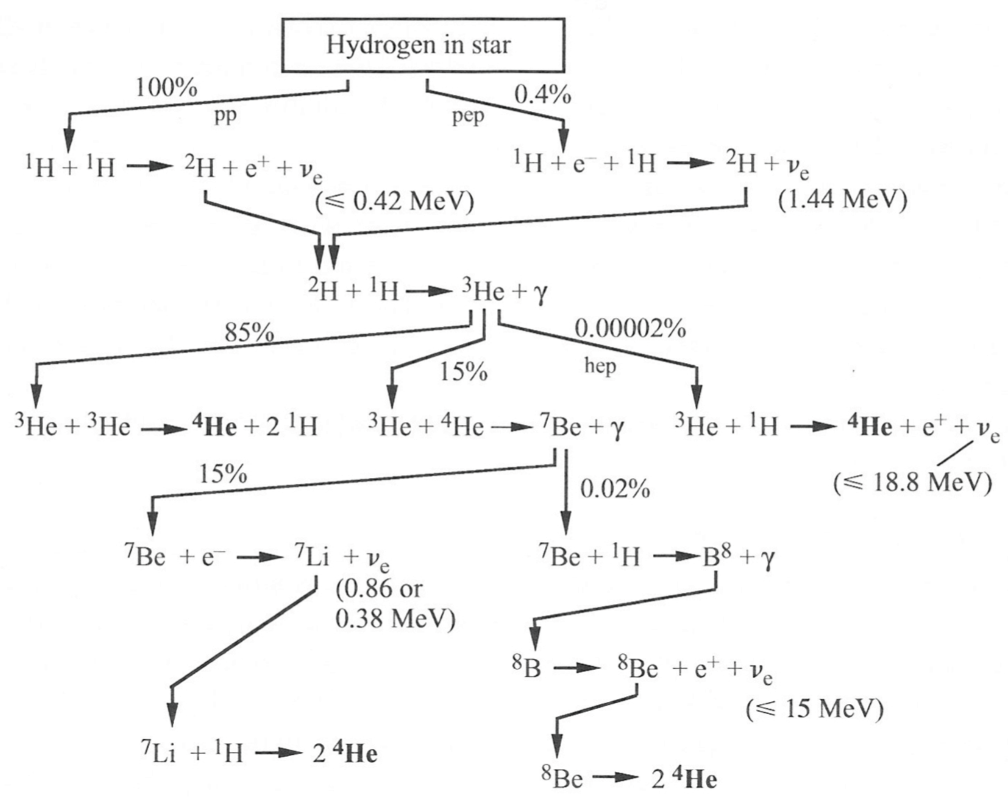
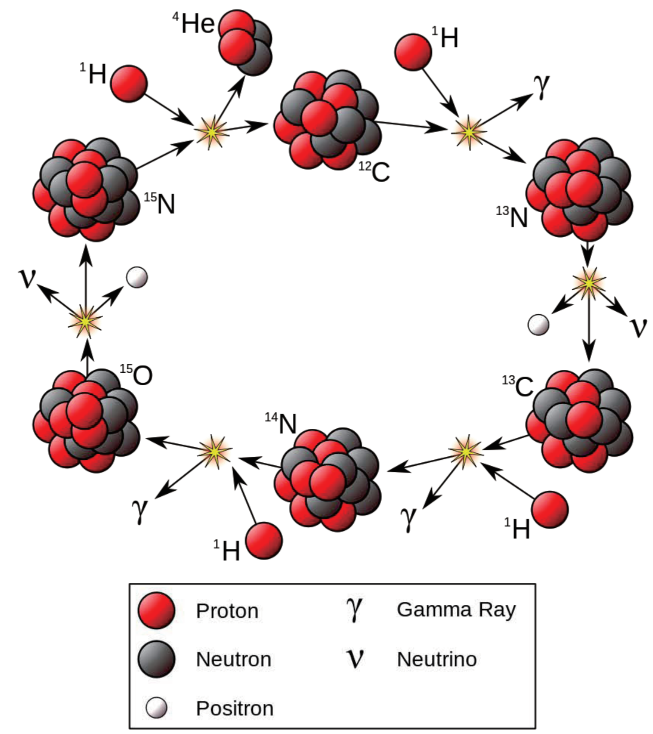


図 3.2: pp チェイン

CNO サイクル　太陽よりも大きな質量を持つ恒星で主要な役割を果たす反応．^{12}C が触媒の役割を果たしている．単位 時間・単位体積あたりの反応速度は，$\propto n^2T^{15}$ である．



$^{12}C + {}^1H$	$\rightarrow$	$^{13}N + \gamma$	
^{13}N	$\rightarrow$	$^{13}C + e^+ + \nu_e$	(β decay)
$^{13}C + {}^1H$	$\rightarrow$	$^{14}N + \gamma$	
$^{14}N + {}^1H$	$\rightarrow$	$^{15}O + \gamma$	
^{15}O	$\rightarrow$	$^{15}N + e^+ + \nu_e$	(β decay)
$^{15}N + {}^1H$	$\rightarrow$	$^{12}C + {}^4He$	

$$4\,{}^1H \rightarrow {}^4He + 3\gamma + 2e^+ + \nu_e$$

C, N, O は増減せず触媒の働きを行う．

CNO サイクル (http://ja.wikipedia.org/wiki/CNO サイクル, Hale Bradt 「Astrophysics Processes」p71)

p-p チェーンと CNO サイクルのどちらの場合も，温度に強く依存し，正の相関を持つ．一方，恒星は負の比熱を持つので，負のフィードバックがかかる．既に述べた通り，恒星として熱核反応が起こっている状況で，平衡状態から何らかの理由でより多くの輻射が起こると，星が重力的に収縮し内部の温度が上がる．その結果，中心での熱核反応のレートが上昇し，内部の圧力が上昇する．このことで再び星はふくれ元の状態に戻る．つまり負のフィードバックがかかっており，安定的に燃焼できる．

鉄の光分解

$M > 12M_\odot$ の場合に合成される Fe は，元素の中で最もエネルギー状態が低い安定な元素である (図 3.1)．つまり核融合でも核分裂でも，エネルギーを取り出すことが出来ない．つまり，恒星中心でのエネルギーの発生が止まってしまう．そうすると重力による収縮が始まり，恒星中心の温度が上昇する．温度が上昇することは，多数の高エネルギー光子が作られることを意味する．Fe はこの光子を吸収し，下の式で He に分解される．

$$^{56}\mathrm{Fe} + 多数の\gamma \to 13\,^{4}\mathrm{He} + 4\mathrm{n} \tag{3.87}$$

これを「鉄の光分解」と呼ぶ．この反応は吸熱反応なので，星の中心部分は下がり，その結果重力収縮がより進み，温度が上昇し，鉄の光分解がさらに進む．つまり，正のフィードバックが掛かることになり，重力崩壊が一気に進む．ほぼフルーフォールであり，タイムスケールは $\sim 1\mathrm{sec}$ である．外層から落ち込むガスは中心部分で急激に止められ，衝撃波が発生する．衝撃波の内側は高温高密度となり，そのガス圧によって外層全体を吹き飛ばす．これを「重力崩壊型超新星爆発」と呼ぶ．一方中心からは，中性子星やブラックホールが誕生する．

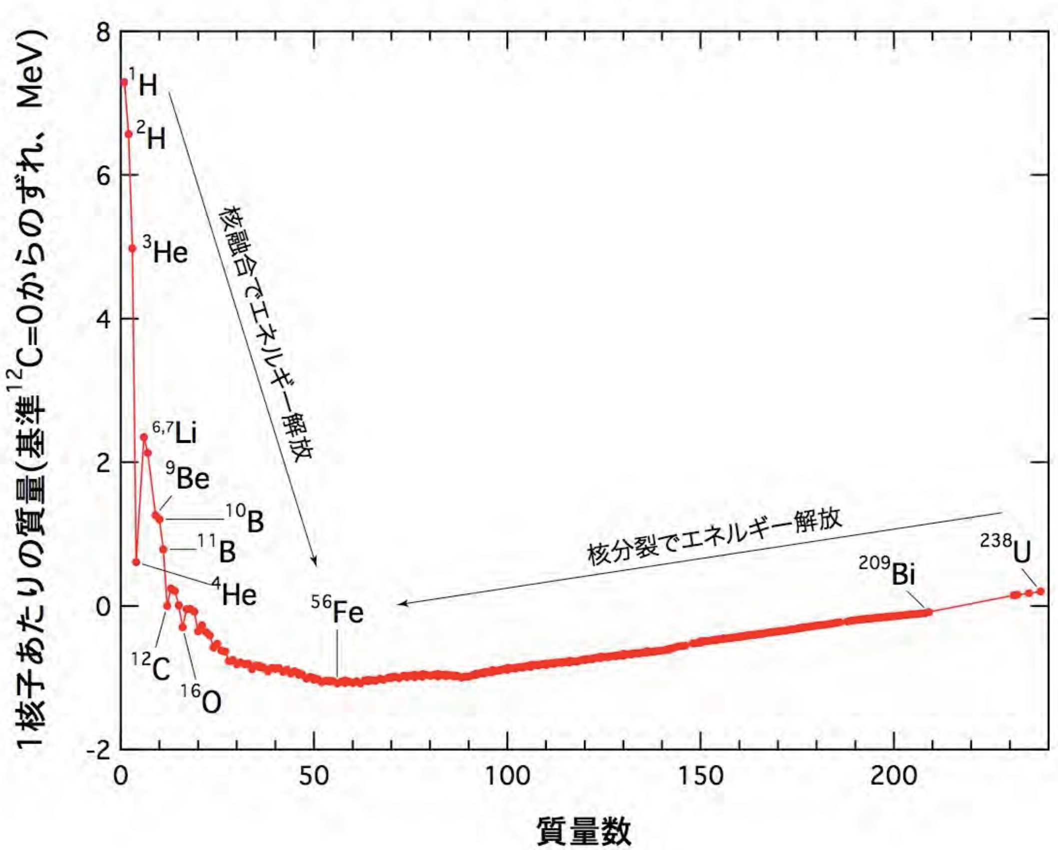


図 3.1: 核子あたりの質量の差