

宇宙物理入門

講義資料

第13章：サイクロトロン・シンクロトロン

Ver. 1

鶴 剛 (tsuru@cr.scphys.kyoto-u.ac.jp)

全放射エネルギー

電子 (荷電粒子) が磁場のまわりを回転する半径を Lamor 半径 r_L 、回転周波数を "the frequency of rotation" 又は、"the frequency of gyration" と呼び、CGS-Gauss 単位系では角周波数 ω_B 又は ν_L は次のように書ける。

非相対論では、

$$F = \frac{1}{c} v B e \quad r_L = \frac{c \cdot m_e v}{e B} \quad 2\pi\nu_L = \omega_B = \frac{v}{r_L} = \frac{eB}{m_e c}$$

相対論的になると、 $m_e v$ を p 、すなわち $\gamma\beta m_e c$ に置き換えて、

$$r_L = \frac{c \cdot \gamma m_e c}{e B} = 3.3 \times 10^{13} \text{cm} \left(\frac{B}{1 \text{mG}} \right)^{-1} \left(\frac{pc}{10 \text{TeV}} \right) \quad 2\pi\nu_L = \omega_B = \frac{c}{r_L} = \frac{eB}{\gamma m_e c}$$

観測者が観測する加速度運動する相対論的粒子からの全放射エネルギーは

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \vec{a}' \cdot \vec{a}' = \frac{2q^2}{3c^3} \left(a'_{\text{para}}{}^2 + a'_{\text{perp}}{}^2 \right) = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 \left(a_{\text{para}}{}^2 + \gamma^2 a_{\text{perp}}{}^2 \right)$$

ここで 粒子の静止系を K' 、観測者の系を K とすると、

$$a'_{\text{para}} = \gamma^3 a_{\text{para}} \quad a'_{\text{perp}} = \gamma^2 a_{\text{perp}} \quad \text{を使用した.}$$

よって、磁場中を回転する粒子では $a_{\text{para}} = 0$ $a_{\text{perp}} = \omega_B v_{\text{perp}}$

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 \frac{q^2 B^2}{\gamma^2 m^2 c^2} v_{\text{perp}}^2 = \frac{2}{3} r_0^2 c \beta_{\text{perp}}^2 \gamma^2 B^2, \quad r_0 = \frac{q^2}{mc^2}$$

電子は等方的に分布しているとする

$$\langle \beta_{\text{perp}}^2 \rangle = \frac{\beta^2}{4\pi} \int \sin^2 \alpha d\Omega = \frac{2\beta^2}{3} \quad \text{なので} \quad P = \left(\frac{2}{3} \right)^2 r_0^2 c \beta^2 \gamma^2 B^2 = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B \quad U = \frac{B^2}{8\pi}$$

サイクロトロンからシンクロトロンへ

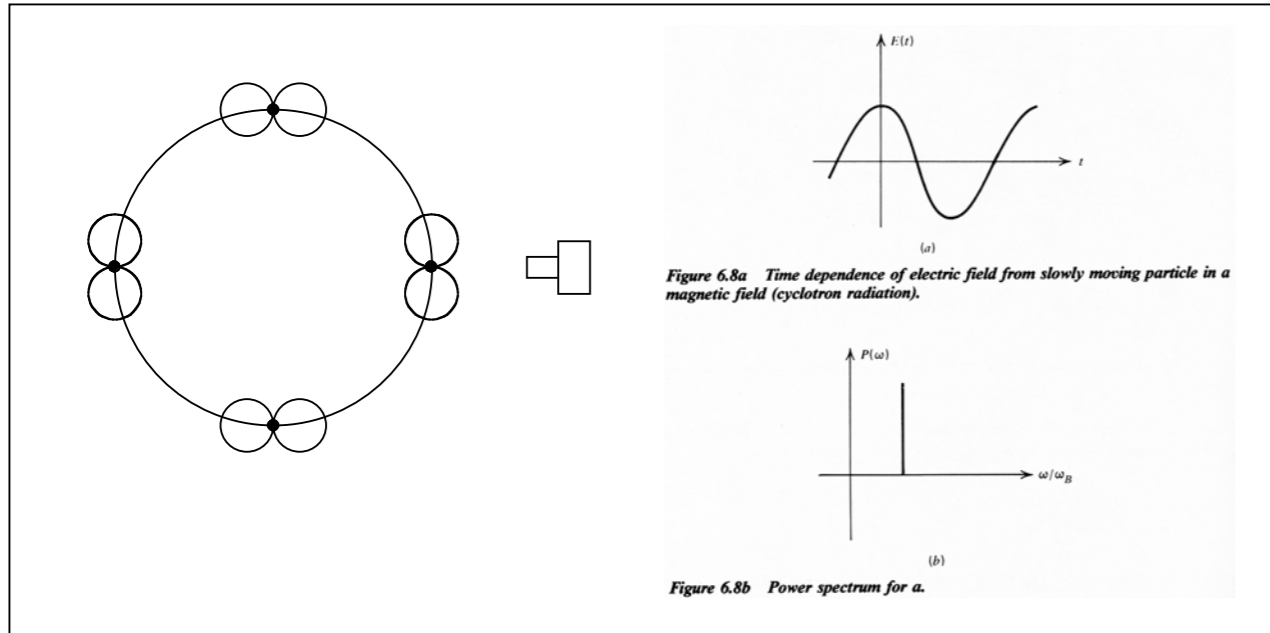


図 13.1: Cyclotron

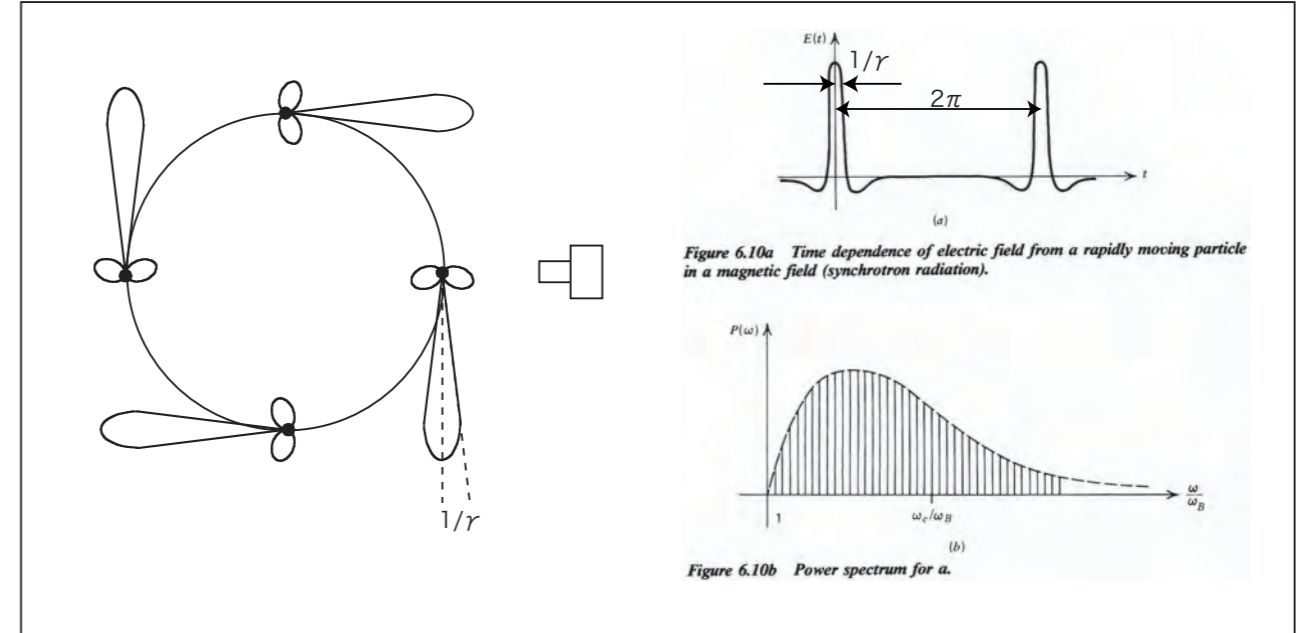


図 13.3: Synchrotron

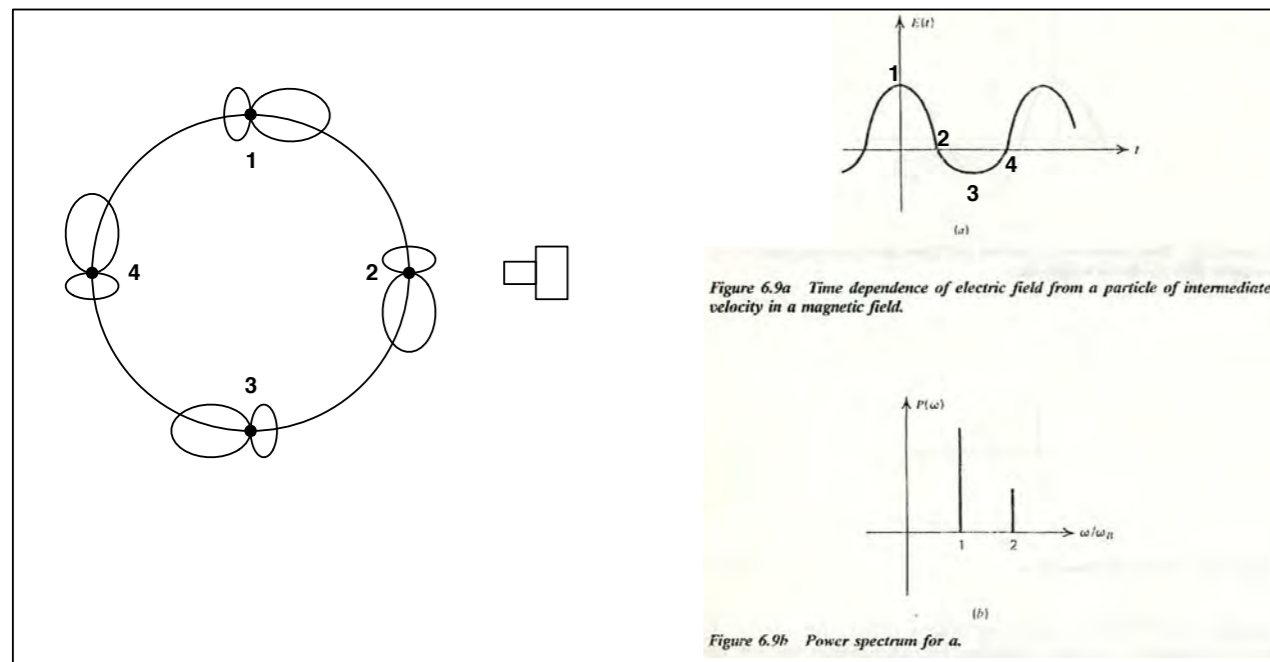


図 13.2: Cyclotron から Synchrotron への移行状態

サイクロトロンは非相対論的であるが、もう少し電子の速度が高くなり、相対論的に近づくと進行方向へのビーミング効果が徐々に現れる。その結果、スペクトルには倍波や3倍波が登場する。さらに電子の速度が高くなり、相対論的になった状態をシンクロトロンと呼ぶ。進行方向の前後に放射していた電場が前方で鋭くビーミングをする。その結果、フーリエスペクトルをとると大量の高調波成分が現れ、最終的にはお互いの分離がなくなり連続波となる。

単一エネルギー電子からのシンクロトロン放射

ピッチ角 α で磁場を回転する単一のエネルギーの電子から放射されるシンクロトロン輻射スペクトルは次のように書ける。

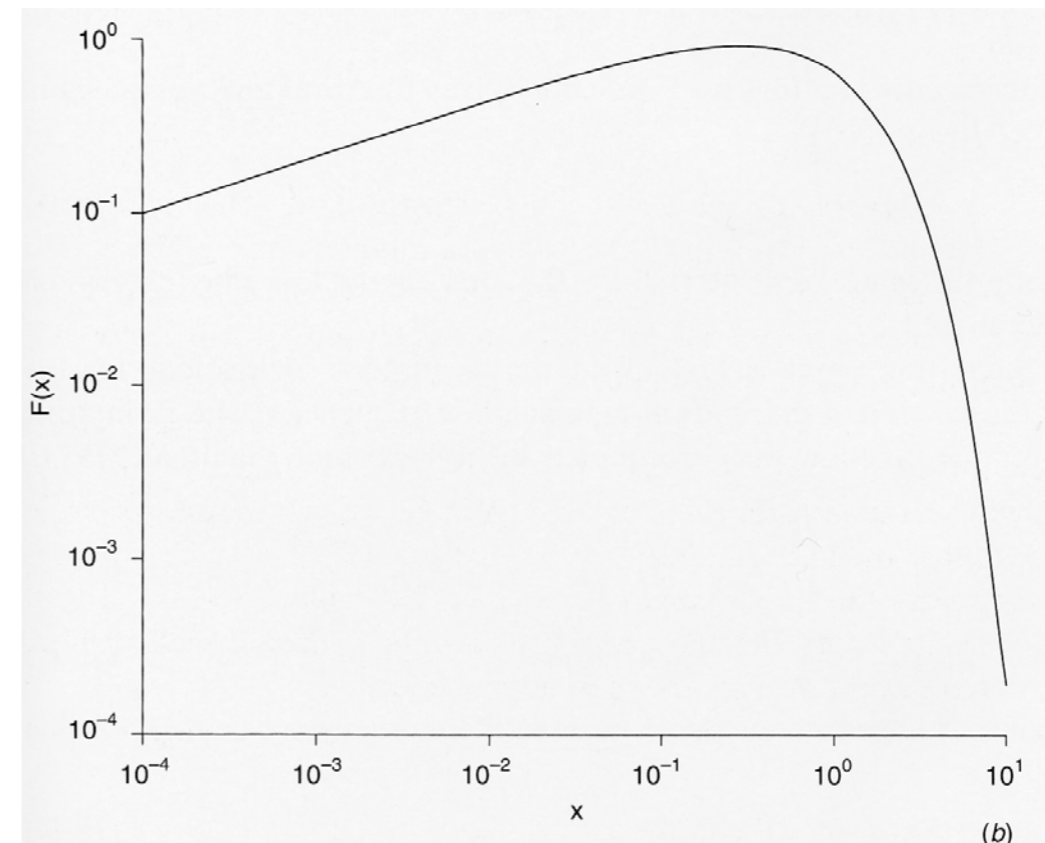
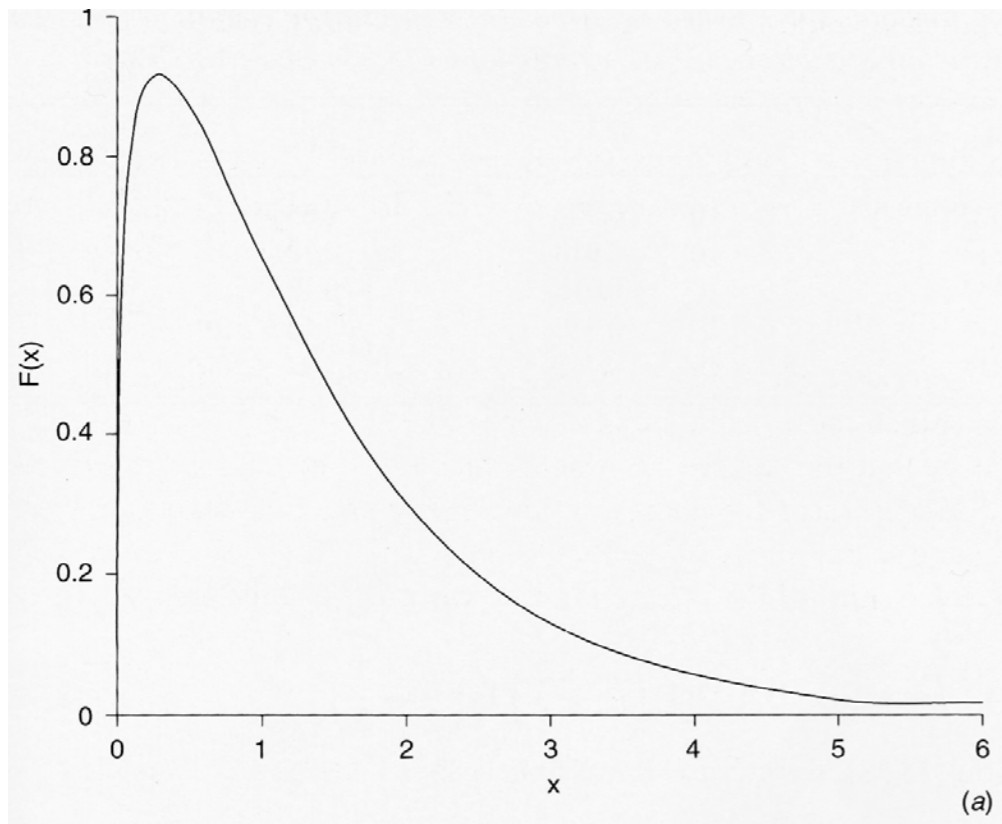
$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^2 B \sin \alpha}{2\pi mc^2} F(x) \quad F(x) \sim \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} \quad (\text{at } x \ll 1)$$

$$\sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-x} x^{1/2} \quad (\text{at } x \gg 1)$$

$$\omega_c \equiv \frac{3}{2}\gamma^3 \left(\frac{eB}{\gamma mc}\right) \sin \alpha = \frac{3}{2}\gamma^3 \omega_B \sin \alpha$$

ω_c は”Critical Frequency” と呼ばれる。これは、シンクロトロンのビーミングの部分をフーリエ変換して出てくる周波数に対応する。すなわち、 $\sin \alpha = 1$ の場合、ローレンツ因子が γ である時のピークの時間幅が $\Delta t \simeq 1/\omega_c$ にほぼ対応する。

$F(x)$ を示す。ピークが $x = 0.29$ すなわち $\omega = 0.29\omega_c$ に来る。



べき関数型の電子エネルギースペクトルの場合

電子のエネルギースペクトルを $N(E)$ 又は $N(\gamma)$ と表す。電子がべき関数型のエネルギースペクトルを持つ場合、

$$N(E)dE = N_0 E^{-p} dE \quad N(\gamma)d\gamma = N_0 \gamma^{-p} d\gamma$$

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^3 N_0 B \sin \alpha}{2\pi mc^2 (p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{mc\omega}{3eB \sin \alpha}\right)^{-(p-1)/2}$$

電子のスペクトル $-p$ に対し、シンクロトロン放射の傾きは:

$$\alpha = -\frac{p-1}{2}, \Gamma = -\frac{p+1}{2}$$