

# 98年度課題研究 P6 レポート

池田 清

河野 誠

馬場 彩

1999年6月9日

# 目次

|          |                           |           |
|----------|---------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>X線発生装置に関する基礎実験</b>     | <b>2</b>  |
| 1.1      | X線発生装置からのX線のスペクトルの測定      | 2         |
| 1.2      | 制動放射であることの検証              | 3         |
| 1.3      | X線発生装置からのX線の拡がりの測定        | 4         |
| 1.3.1    | 実験の目的と実験方法                | 4         |
| 1.3.2    | 実験結果                      | 4         |
| <b>2</b> | <b>制動放射に関する理論</b>         | <b>8</b>  |
| <b>3</b> | <b>X線の偏光測定実験</b>          | <b>11</b> |
| 3.1      | 装置の配置                     | 11        |
| 3.2      | スペクトルの測定                  | 11        |
| 3.2.1    | 角度の決定                     | 12        |
| 3.2.2    | 偏光度の測定                    | 12        |
| 3.3      | データ解析                     | 12        |
| 3.4      | 結論                        | 13        |
| <b>A</b> | <b>Thomson 散乱について</b>     | <b>16</b> |
| <b>B</b> | <b>ターゲット内における多重散乱について</b> | <b>18</b> |
| <b>C</b> | <b>偏光率はなぜ変化するのか</b>       | <b>20</b> |

# 第 1 章

## X線発生装置に関する基礎実験

### 1.1 X線発生装置からのX線のスペクトルの測定

X線発生装置から出てくるX線のスペクトルを図1.1のような実験装置で観測を行なった。得られたスペクトルは図1.2のようなものになった。

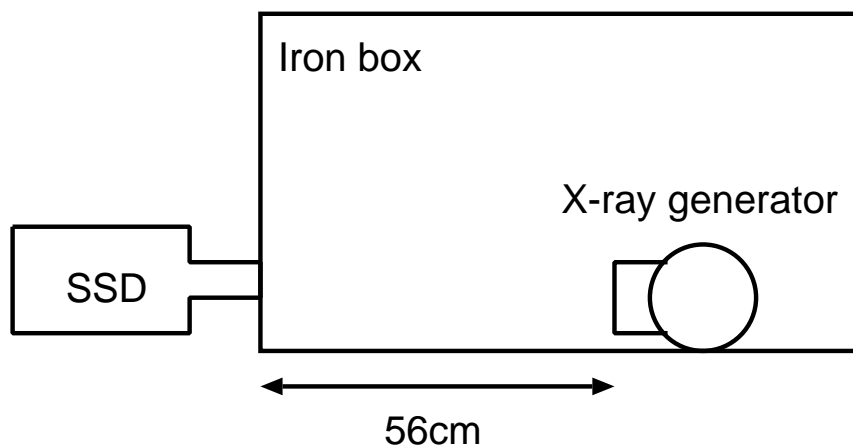


図 1.1: 実験装置

X線発生装置からのX線は、ターゲットであるタングステンに加速した電子を入射させることによってでてくる。そのスペクトルは、電子の制動放射による連続した成分と、タングステン自身からの特性X線によるラインから構成されている。タングステンからの特性X線のエネルギーは、図1.3のようであることが分かっている。タングステン以外にニッケルのラインが見えている、これはX線発生装置の容器の成分の2次X線である。(鉄のラインが見えていないこと、磁石につかないことから容器は、ステンレスではないと思われる。)

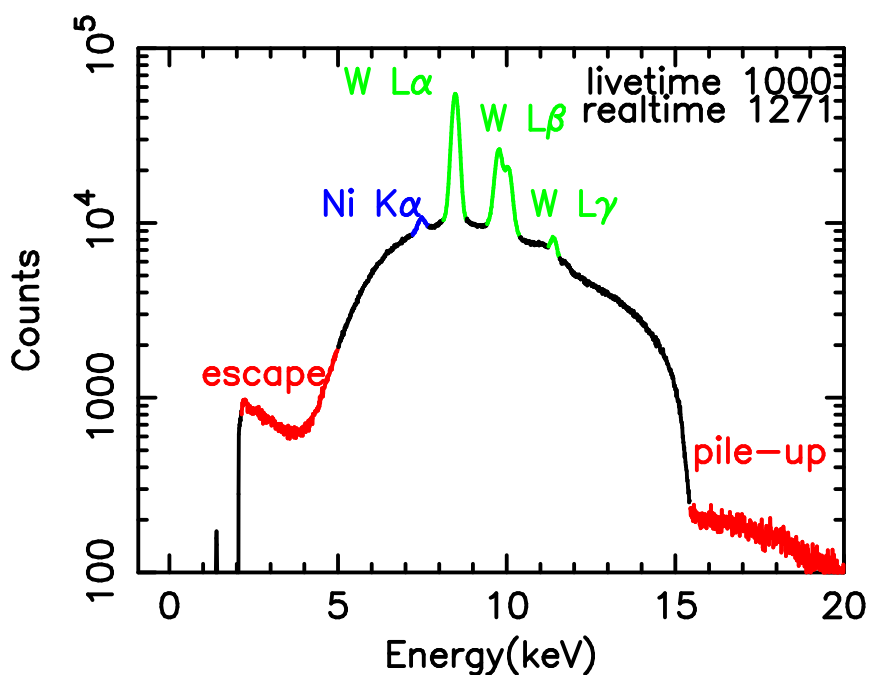


図 1.2: 生スペクトル

|             | エネルギー ( $keV$ ) | 強度  |
|-------------|-----------------|-----|
| $L\alpha_1$ | 8.400           | 100 |
| $L\alpha_2$ | 8.338           | 10  |
| $L\beta_1$  | 9.671           | 50  |
| $L\beta_2$  | 9.959           | 20  |
| $L\gamma_1$ | 11.29           | 10  |

図 1.3: タングステンの特性X線

## 1.2 制動放射であることの検証

見えている連続成分がもし制動放射であるならば、この連続成分の強度は制動放射の理論??に従っているはずである。しかし、実際に観測できるのは、X線発生装置の出力窓や SSD の観測窓についているベリリウムや X線発生装置と SSD の間にある空気によって吸収を受けた後のスペクトルである。では、吸収の補正を行えば、今見えている連続成分はどのようなになるだろうか。これを検証するために、まず測定した状況での SSD のベリリウムと空気の透過率を見積もった。これが、図 1.4 である。なお、X線発生装置のベリリウムの厚みが不明であったためその吸収は補正されていない。

escape についても考慮し、X線の 30% が escape を起こすと仮定して、この透過率を基に、我々はデータから吸収を受ける前の X線のスペクトルを再現した。

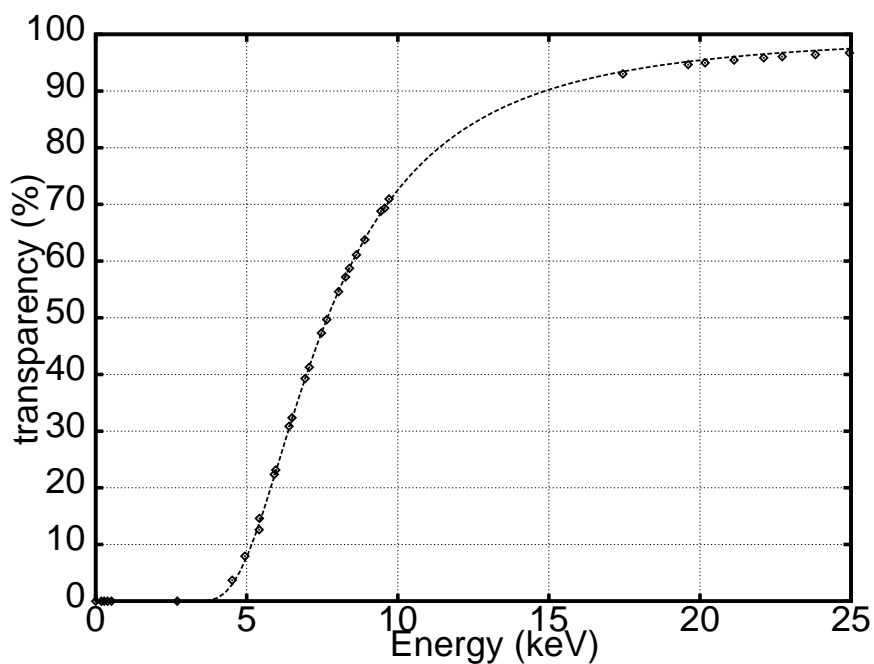


図 1.4: この実験装置におけるX線の全透過率

吸収を受ける前のスペクトルを計算して生スペクトルと重ねてみると図 1.5 のようになった。X線発生装置のベリリウムの吸収が補正されていない分低エネルギー側で理論より落ちているものと思われる。

### 1.3 X線発生装置からのX線の拡がりの測定

#### 1.3.1 実験の目的と実験方法

図 1.6 のような配置でX線発生装置に対して垂直方向と平行方向にX線発生装置から出てくるX線が、どのような角度分布を持っているのかを調べた。

#### 1.3.2 実験結果

垂直方向、平行方向に対するX線の角度分布はそれぞれ図 1.7、図 1.8 のようになった。

縦方向横方向共に  $\pm 12^\circ$  付近でX線の強度が急激に落ち込んでいる。後述することになるが、本実験の実験装置の構造から見てX線発生装置から出たX線はほぼターゲットに当たっていることがわかる。

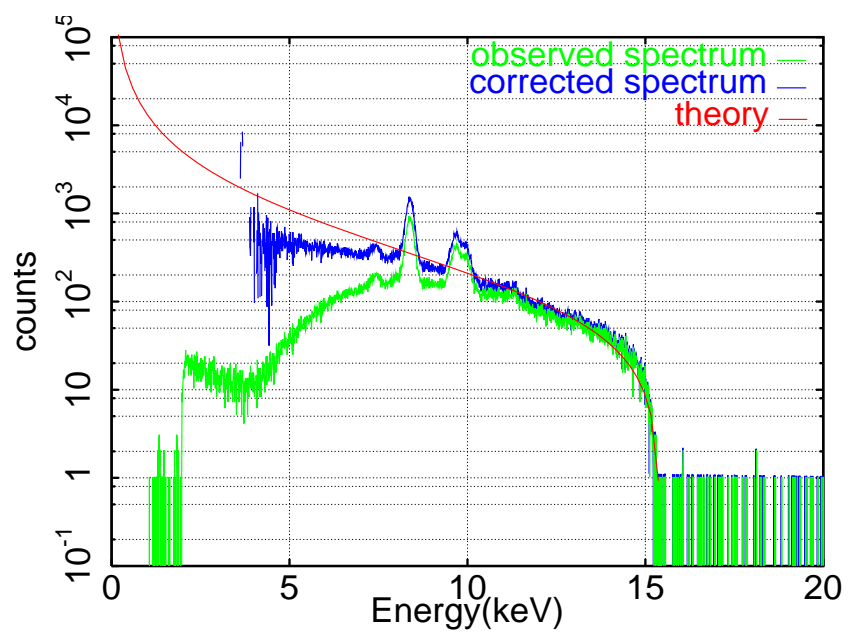


図 1.5: スペクトル

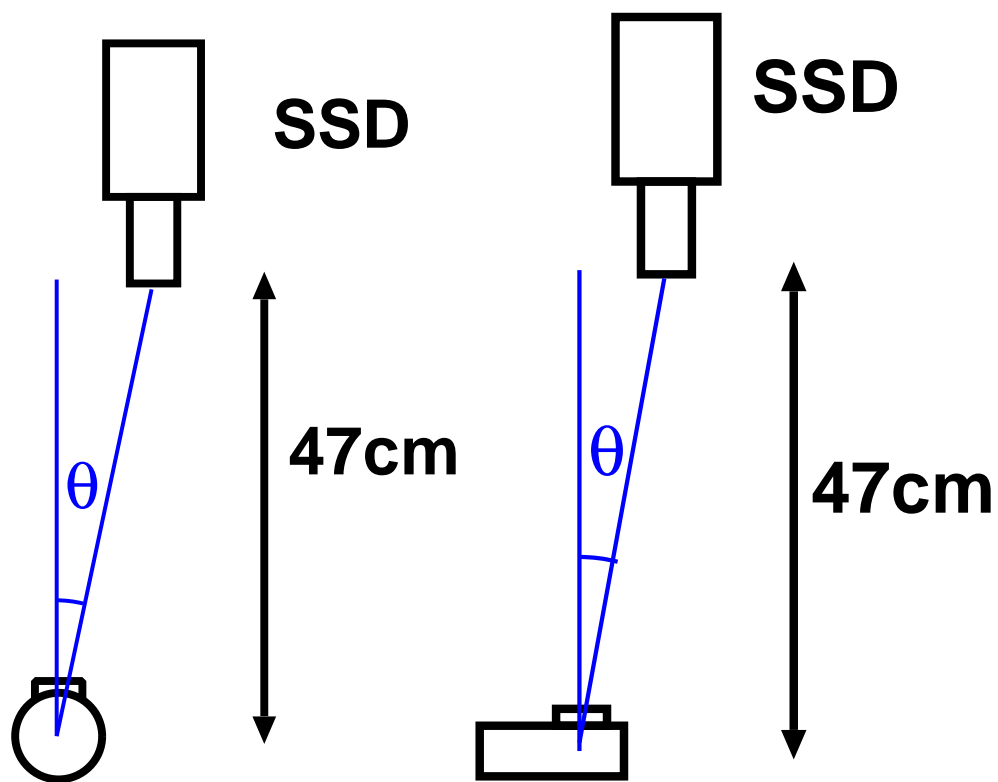


図 1.6: X線の角分布を調べる。

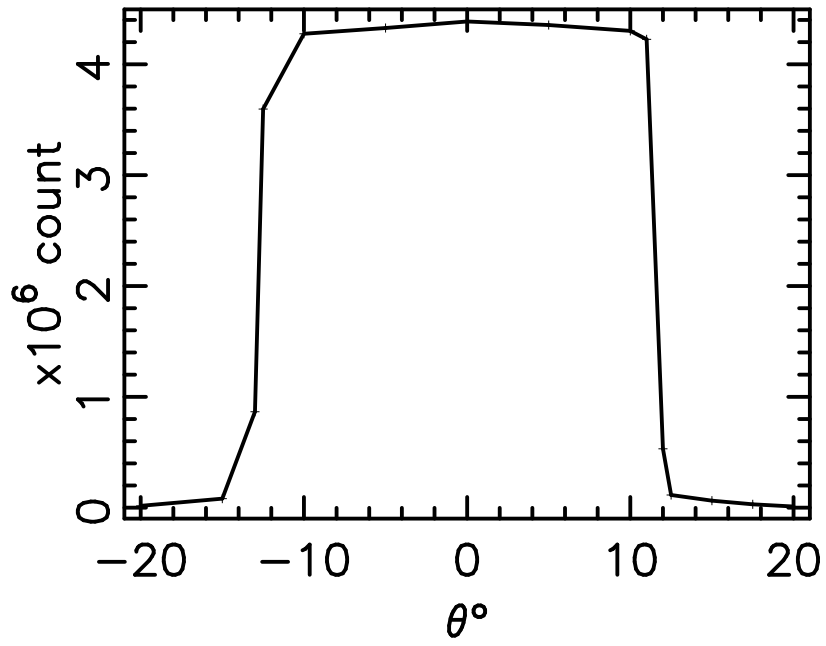


図 1.7: 垂直方向の角分布

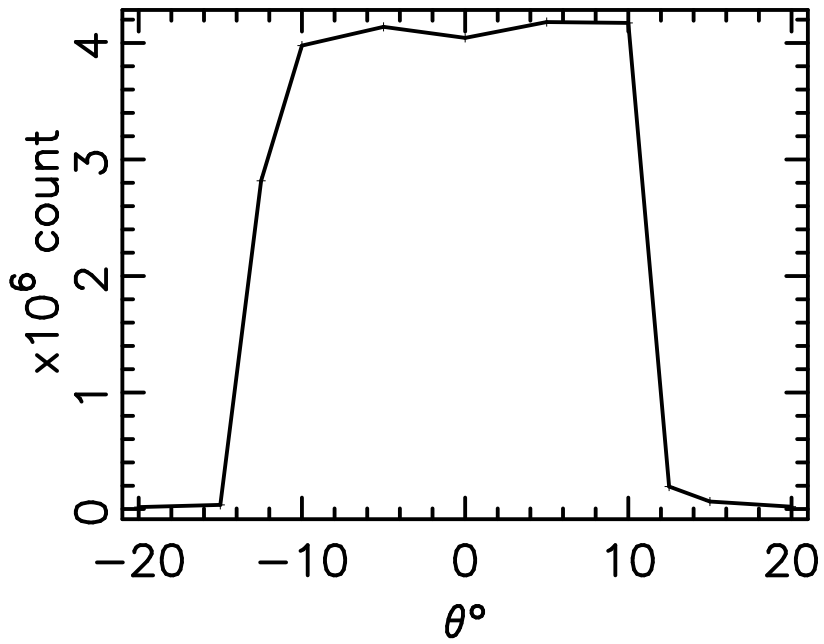


図 1.8: 平行方向の角分布



## 第 2 章

### 制動放射に関する理論

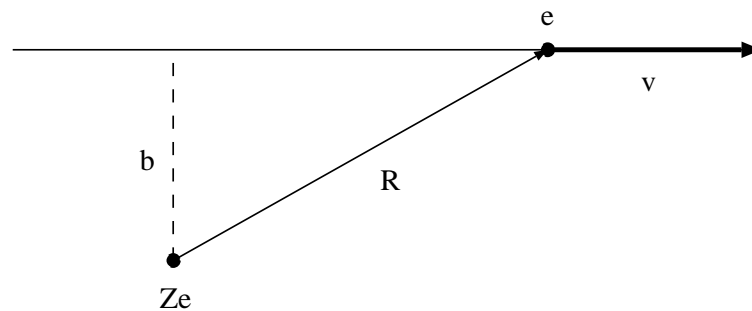


図 2.1: イオンの側を通り過ぎる電子

荷電粒子がクーロン場の中で力を受けることによって引き起こされる放射を、制動放射と呼ぶ。今回は、電子とイオンによる制動放射について考えてみよう。簡単のため、イオンは電子に比べて十分重いので動かないとし、電子はほとんどまっすぐ進むとする。(図 2.1 参照。) この系の dipole moment  $\mathbf{d}$  は  $\mathbf{d} = -e\mathbf{R}$  であるのでその 2 階微分をとって、

$$\ddot{\mathbf{d}} = -e\dot{\mathbf{v}} \quad (2.1)$$

$\ddot{\mathbf{d}}$  のフーリエ変換は  $-\omega^2 \hat{\mathbf{d}}(\omega)$  であることを利用して eq.(2.1) をフーリエ変換すると、

$$-\omega^2 \hat{\mathbf{d}}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}} e^{i\omega t} dt \quad (2.2)$$

イオンと電子が相互作用をする時間  $\tau$  は、

$$\tau \sim \frac{b}{v} \quad (2.3)$$

のオーダーである。もし、 $\omega\tau \gg 1$  なら積分の中の振動項は非常に速く振動するので、積分は 0 になる。また、もし  $\omega\tau \ll 1$  なら振動項はほぼ定数であるので、積分には関与しない。これをまとめて、

$$\hat{\mathbf{d}}(\omega) = \begin{cases} \frac{e}{2\pi\omega} \Delta \mathbf{v} & \omega\tau \ll 1 \\ 0 & \omega\tau \gg 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

ここで、 $\Delta \mathbf{v}$  は衝突による電子の速度変化である。双極放射の公式にこれを当てはめると、

$$\frac{dW}{d\omega} = \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi c^3} |\Delta \mathbf{v}|^2 & \omega\tau \ll 1 \\ 0 & \omega\tau \gg 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

さて、ここで  $\Delta \mathbf{v}$  を見積もってみよう。電子の軌跡はほとんどまっすぐなので、速度変化は軌跡に垂直なはずである。そこで、クーロン場から受ける力の内軌跡に垂直な成分を積分する。

$$\Delta v = \frac{Ze^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2Ze^2}{mbv} \quad (2.6)$$

これを用いて、

$$\frac{dW(b)}{d\omega} = \begin{cases} \frac{8Z^2 e^6}{3\pi c^3 m^2 v^2 b^2} & b \ll \frac{v}{\omega} \\ 0 & b \gg \frac{v}{\omega} \end{cases} \quad (2.7)$$

となる。今度は、電子密度  $n_e$ 、イオン密度  $n_i$ 、電子の速度  $v$  の時の放射のスペクトルを考えてみよう。一つのイオンに対しての電子のフラックスは、 $n_e v$  である。また、イオンに衝突パラメータ  $b$  で衝突し得る場所の面積は一つのイオンにつき  $2\pi b db$  である。従って、単位時間あたり単位体積あたり単位周波数あたりの放射エネルギーは

$$\frac{dW}{d\omega dV dt} = n_e n_i 2\pi v \int_{b_{min}}^{\infty} \frac{dW(b)}{d\omega} b db \quad (2.8)$$

となる。ここで、 $b_{min}$  は衝突パラメータの最小値である。この積分を見積もるには eq.(2.7) の条件だけでは十分ではない。しかし、十分に良い近似をすることはできるので、eq.(2.7) の  $b \ll \frac{v}{\omega}$  の解を eq.(2.8) に代入しよう。

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega dV dt} &= \frac{16e^6}{3c^3 m^2 v} n_e n_i Z^2 \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} \\ &= \frac{16e^6}{3c^3 m^2 v} n_e n_i Z^2 \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

ここで、 $b_{max}$  は  $b \ll \frac{v}{\omega}$  の近似が成り立たなくなる  $b$  である。 $b_{max}$  の大きさについては、単に

$$b_{max} \equiv \frac{v}{\omega} \quad (2.10)$$

として構わない。 $b_{min}$  の見積りに関しては、2通りの方法がある。まず最初の方法は、電子がまっすぐ進むと言う近似が成り立たなくなる  $b$  の値である。この時  $\Delta v \sim v$  であるので、

$$b_{min}^{(1)} = \frac{2Ze^2}{mv^2} \quad (2.11)$$

となる。2番目の方法は、電子が古典的な軌跡を描いて進むと言う近似が成り立たなくなる場合である。不確定性原理は、

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

であった。ここで、 $\Delta x \sim b$ 、 $\Delta p \sim mv$  とすると、

$$b_{min}^{(2)} = \frac{\hbar}{mv} \quad (2.12)$$

$b_{min}^{(1)} \gg b_{min}^{(2)}$  のときは古典的描写が成り立ち、 $b_{min} = b_{min}^{(1)}$  である。また、 $b_{min}^{(1)} \ll b_{min}^{(2)}$  のときは、 $b_{min} = b_{min}^{(2)}$  である。

どのような場合でも簡便に記述できるように、Gaunt factor  $g_{ff}(v, \omega)$  を次のように導入する。

$$\frac{dW}{d\omega dV dt} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3 m^2 v} n_e n_i Z^2 g_{ff}(v, \omega) \quad (2.13)$$

これと eq.(2.9) を比較すると、

$$g_{ff}(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \quad (2.14)$$

最後に、制動放射のスペクトルがどのような形になるかを考えておこう。eq.(2.9) で  $\omega$  に依存する部分は、 $b_{max}$  のみである。したがって、eq.(2.10) を eq.(2.9) に代入して

$$\frac{dW}{d\omega} \propto -\ln \omega \quad (2.15)$$

となる。

## 第 3 章

### X線の偏光測定実験

#### 3.1 装置の配置

実験装置を図 3.1 のように配置した。Turn Table は水平に回転するようになっている。ポリエチレンによる Thomson 散乱の角度依存を利用することで、X線の偏光を観測できる。

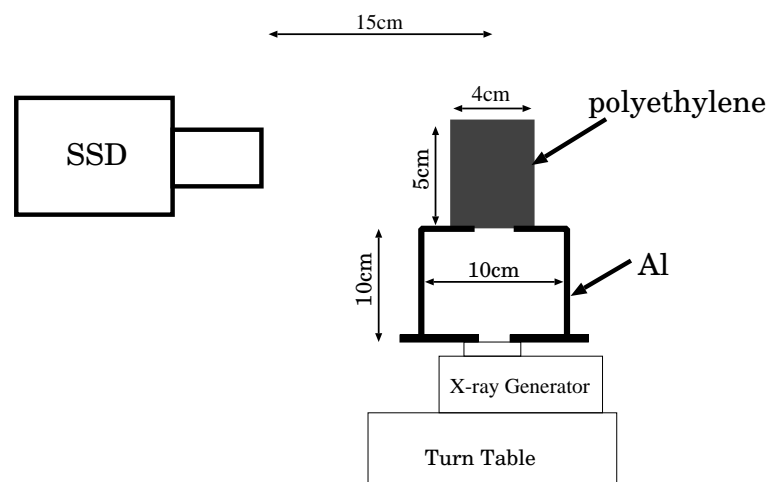


図 3.1: 実験装置配置

#### 3.2 スペクトルの測定

X線ジェネレーターの電圧を 15kV 電流を 0.1mA に設定して、観測したところ図 3.2 のようなスペクトルが得られた。今まで観測されていなかった、Fe のラインが見えている。これは、実験装置を囲んでいる容器が鉄であるため、ポリエチレンを透過した X線が容器の天井に当たり 2次 X線を出しているものと思われる。

Fe、W および  $^{109}\text{Cd}$  のラインを用いて、エネルギーを決定した。

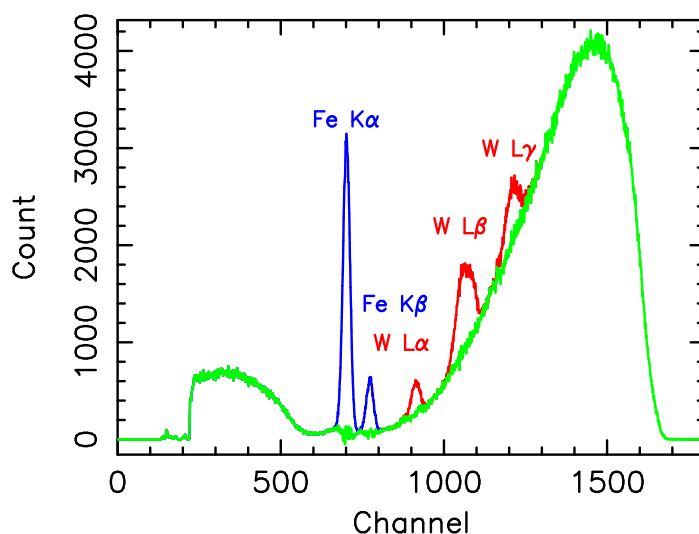


図 3.2: ポリエチレンによって散乱されたスペクトル

### 3.2.1 角度の決定

極大と極小の角度を決定するためにX線ジェネレーターの電圧を 15kV、電流を 0.1mA にして、おおよそX線ジェネレーターの電子の入射方向が SSD に向かう方向を 0 度として、120 度から -45 度まで 15° ずつ回転し livetime で 3000sec 測定した。(図 3.3)

その出力の 800ch 以上の部分のラインを除いたカウント数を W のラインの合計カウント数で割ったものを比較した。(図 3.4) 1 keV ごとに区切ったものは、(図 3.5) のようになった。この結果より、極小の位置を、 $-1.4^\circ$  とした。以降、この極小の位置を  $0^\circ$  とする。

### 3.2.2 偏光度の測定

3.2.1で求めた角度の  $0^\circ$  (極小)と  $90^\circ$  (極大)の2点でのスペクトルをX線ジェネレーターの電圧を 13kV ~ 18kV の間を 1kV 刻みで変え 6 点を livetime で 3000sec 測定した。(図 3.3)

### 3.3 データ解析

まず、それぞれの電圧で  $0^\circ$  と  $90^\circ$  のスペクトルからラインを取り除いた。次に、0.8keV 毎にカウント数を合計して、W のラインの合計カウント数で割った。これは、積分時間の誤差を無くすためである。偏光度  $\Pi$  は次の式で定義される。

$$\Pi = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (3.1)$$

偏光度は図 3.6 のようになった。

次に、横軸を X 線の  $energy/\max\ energy$  としてみたところ、図 3.7 のようになった。

| 角度  | 連続成分<br>(count/s) | W ライン<br>(count/s) | 測定日  | realtime<br>(sec) | 電圧<br>(kV) | 電流<br>(mA) | 角度 | realtime<br>(sec) | 測定日  |
|-----|-------------------|--------------------|------|-------------------|------------|------------|----|-------------------|------|
| 120 | 550.1             | 33.9               | 1/22 | 3067              | 13         | 0.14       | 0  | 3015              | 1/29 |
| 105 | 597.3             | 32.8               | 1/22 | 3073              |            |            | 90 | 3025              |      |
| 90  | 549.2             | 31.1               | 1/18 | 3067              | 14         | 0.14       | 0  | 3034              | 1/29 |
| 75  | 572.3             | 31.8               | 1/22 | 3070              |            |            | 90 | 3054              |      |
| 60  | 529.7             | 31.4               | 1/22 | 3065              | 15         | 0.1        | 0  | 3048              | 1/29 |
| 45  | 423.5             | 29.3               | 1/18 | 3052              |            |            | 90 | 3075              |      |
| 30  | 421.5             | 30.7               | 1/22 | 3052              | 16         | 0.1        | 0  | 3090              | 2/2  |
| 15  | 390.0             | 28.9               | 1/22 | 3048              |            |            | 90 | 3136              |      |
| 0   | 361.1             | 28.7               | 1/18 | 3045              | 17         | 0.08       | 0  | 3122              | 2/2  |
| -15 | 370.5             | 28.1               | 1/22 | 3046              |            |            | 90 | 3184              |      |
| -30 | 382.6             | 26.6               | 1/22 | 3047              | 18         | 0.08       | 0  | 3195              | 2/2  |
| -45 | 419.1             | 24.2               | 1/18 | 3052              |            |            | 90 | 3289              |      |

図 3.3: 測定 log

### 3.4 結論

図 3.6,3.7をみると、偏光度は最高エネルギーからどれだけエネルギーを失ったかではなく、最高エネルギーの何%失ったかに依存している。(付録??)

また、最高エネルギーにおいても偏光度が 100%に近い値とならず低い値となったのは、ターゲット内での散乱が繰り返された可能性がある。(付録 B)

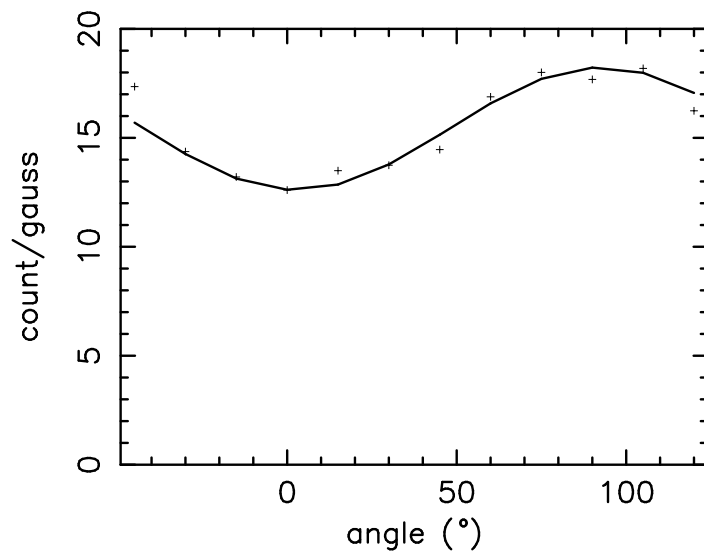


図 3.4: 角度に対するカウント数の変化

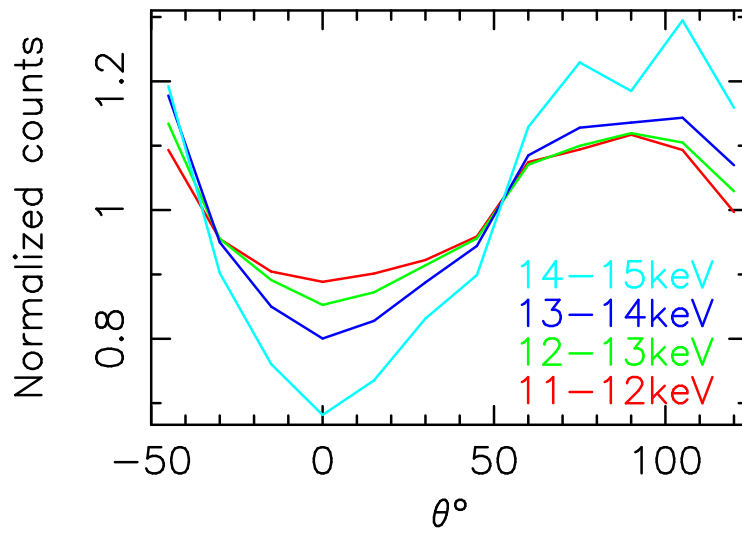


図 3.5: 角度に対するカウント数の変化 (エネルギー毎)

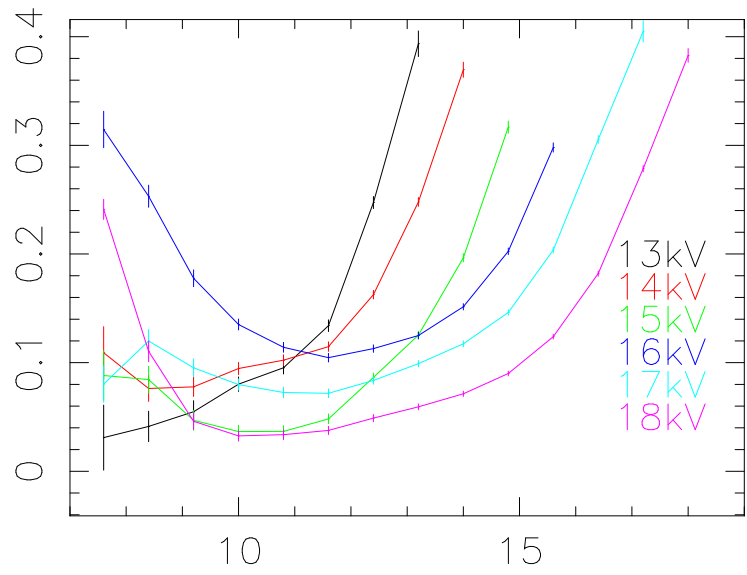


図 3.6: エネルギー vs 偏光度

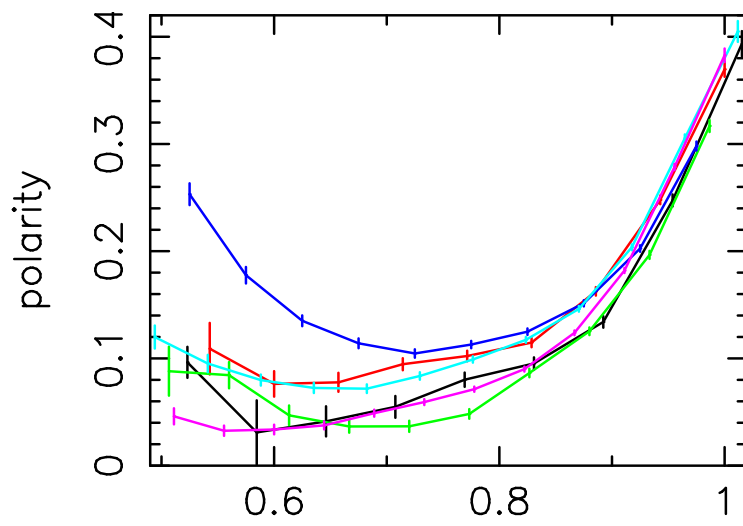


図 3.7: エネルギー比 vs 偏光度



## 付録 A

### Thomson 散乱について

Thomson 散乱は、十分にゆっくりな電子が電磁波の照射によって輻射を起こす過程のことである。

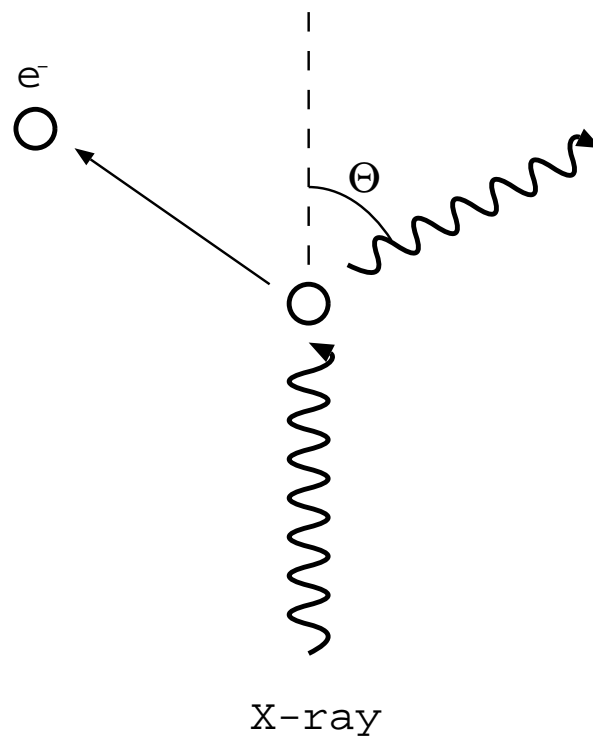


図 A.1: Thomson 散乱

入射してきた直線偏波から受ける力を

$$\mathbf{F} = e\epsilon E_0 \sin\omega_0 t \quad (\text{A.1})$$

とする。これより電子の運動方程式は、

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\epsilon E_0 \sin\omega_0 t \quad (\text{A.2})$$

ここで dipole moment  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$  を用いると、

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}} &= \frac{e^2 E_0}{m} \epsilon \sin\omega_0 t \\ \mathbf{d} &= -\left(\frac{e^2 E_0}{m\omega_0^2}\right) \sin\omega_0 t \end{aligned}$$

さて、双極輻射近似より、双極輻射の単位時間あたり単位立体角当たりのエネルギーは、

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2\Theta \\ P &= \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} \end{aligned}$$

であった。今、dipole の大きさは

$$\mathbf{d}_0 = \frac{e^2 E_0}{m\omega_0^2} \epsilon \quad (\text{A.3})$$

であるので、

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m^2 c^3} \sin^2\Theta \quad (\text{A.4})$$

$$P = \frac{e^4 E_0^2}{3m^2 c^3} \quad (\text{A.5})$$

このことから分かるように、輻射は入射X線と平行な方向には出ず、入射X線と垂直な方向にもっとも大きく出ることが分かる。また輻射は直線偏光しており、その偏光方向は、入射X線の偏光方向と輻射の進行方向のある平面内にある。

## 付録 B

### ターゲット内における多重散乱について

我々の実験では、X線の偏光方向を調べるために Thomson 散乱を利用した。この時、もしターゲット内でX線が多重散乱を起こしたらどうなるであろうか。今は簡単にターゲット内でX線が2回散乱した時のことを考えよう。Fig.B.1のように一回目の散乱で  $(\theta + \phi)^\circ$  に散乱し、2回目の散乱で  $\theta^\circ$  に散乱することを考える。

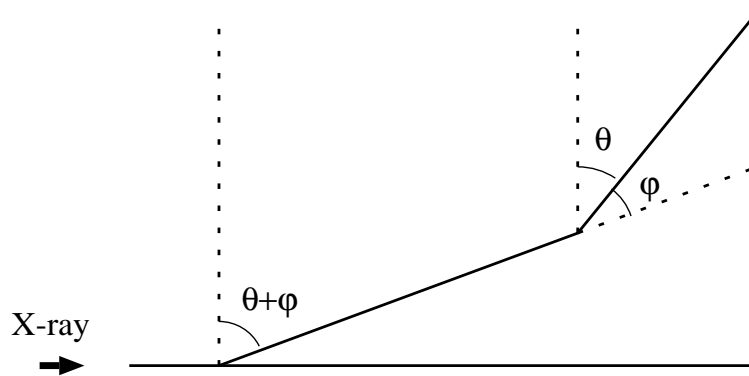


図 B.1: 2回散乱の模式図

Thomson 散乱のところで述べた通り、入射波に対する輻射のエネルギー分布は

$$I(\theta) \propto \sin^2 \theta \quad (\text{B.1})$$

であった。今、2回散乱したX線の相対的な強度を  $I^{(2)}(\theta)$  とすると、

$$I^{(2)}(\theta) = \sin^2(\theta + \phi) \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \quad (\text{B.2})$$

$\phi$  は  $-\pi$  から  $\pi$  までの値をとるので、 $\phi$  をこの範囲で積分してみよう。

$$\begin{aligned} I^{(2)}(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\theta + \phi) \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) d\phi \\ &= 2 \int_0^{\pi} \{\sin \theta \cos \phi + \sin \phi \cos \theta\}^2 \cos^2 \phi d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin^2 \theta \int_0^\pi \cos^4 \phi \, d\phi + 4 \sin \theta \cos \theta \int_0^\pi \sin \phi \cos^3 \phi \, d\phi \\
&\quad + 2 \cos^2 \theta \int_0^\pi \sin^2 \phi \cos^2 \phi \, d\phi \\
&= \dots = \frac{3\pi}{4} \sin^2 \theta + \frac{\pi}{4} \cos^2 \theta \tag{B.3}
\end{aligned}$$

さて、この多重散乱によって偏光度はどのくらい変わって見えるだろうか。簡単のために 60% の X 線が 1 回散乱し、40% の X 線が 2 回散乱をすとする。見かけの偏光度  $\Pi'$  は、

$$\begin{aligned}
\Pi' &= \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \\
&= \frac{(0.6 \times 1 + 0.4 \times \frac{3\pi}{4}) - (0.6 \times 0 + 0.4 \times \frac{\pi}{4})}{(0.6 \times 1 + 0.4 \times \frac{3\pi}{4}) + (0.6 \times 0 + 0.4 \times \frac{\pi}{4})} \\
&\simeq 0.662 \tag{B.4}
\end{aligned}$$

従って、入射 X 線が 100% 偏光していたとしても、見かけ上の偏光度は 70% 程度にまで落ちてしまうことになる。実際には 3 回散乱、4 回散乱といったことも起こるため、偏光度はさらに落ちることが予想される。

## 付録 C

### 偏光率はなぜ変化するのか

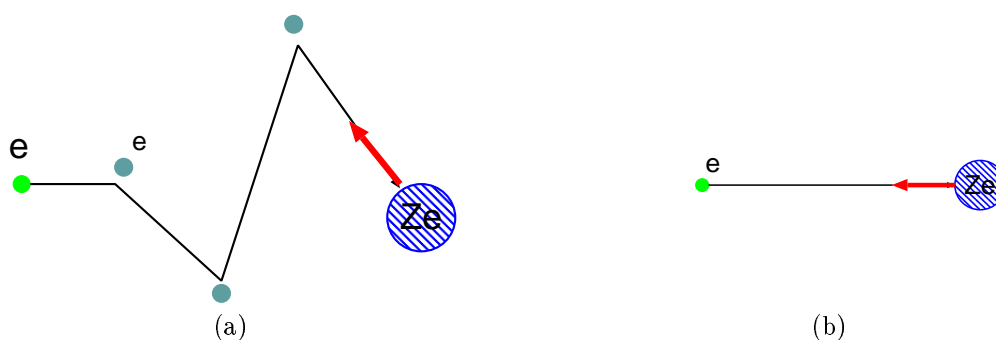


図 C.1: 電子がそのエネルギーを失うまでのさまざまな過程

X線発生装置からのX線の偏光率はなぜ変化するのだろうか。まず最初に、定性的に考えてみよう。先ほども述べたように、電子は原子核との相互作用でそのエネルギーを輻射に変換するが、今は簡単のために電子は輻射の際にそのすべての運動エネルギーを輻射に変えると仮定する。電子が輻射をする際、Fig.C.1(a)のように何度も原子を電離したり電子と衝突した後であれば、その向きはバラバラになっているはずである。電子の方向がバラバラになっていればその輻射の偏光方向もバラバラであり、偏光率は低くなるはずである。しかし、Fig.C.1(b)のように他の電子や原子と相互作用をせずに輻射したならば、その向きはほぼ一定となり、偏光率は大きくなる。これは実験結果と一致している。

このように、定性的には偏光率の変化を説明することができた。しかし、定量的に説明するのは大変難しい。そこで、正確ではないが次のようなモデルを考えてみよう。Fig.C.2のように、電子は他の電子と一回だけ散乱した後に原子核と相互作用をしてその全エネルギーを電磁波として輻射するとする。これは、電子が他の原子を電離した後に輻射を起こす過程の近似である。電子ははじめエネルギー  $E$ 、運動量  $p$  を持っていて静止した電子に衝突し、角度  $\theta$  で散乱され、運動量  $p_1$ 、エネルギー  $\alpha E$  になったとする。

ここで、運動量保存とエネルギー保存より、 $\alpha$  と  $\theta$  の関係を求めてみよう。

$$p = p_1 \cos \theta + p_2 \cos \phi \quad (\text{C.1})$$

$$0 = -p_1 \sin \theta + p_2 \sin \phi \quad (\text{C.2})$$

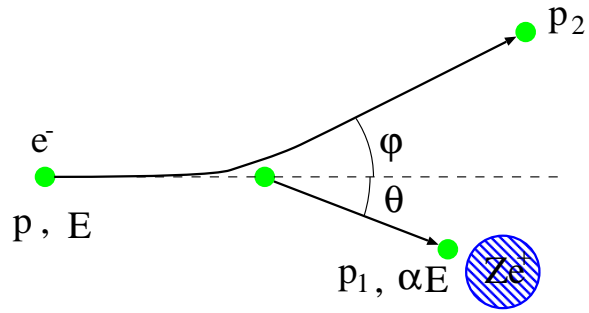


図 C.2: 電子-電子散乱モデル

$$\alpha = \frac{p_1^2}{2m_e E} \quad (\text{C.3})$$

これより、偏光率  $\Pi(\alpha)$  は

$$\Pi(\alpha) = \frac{5\alpha^2 + 6\alpha - 3}{3\alpha^2 + 2\alpha + 3} \quad (\text{C.4})$$